BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Winkelrelationen am Simplex und die *Euler*sche Charakteristik

Von **Ernst Peschl** in Bonn*

Vorgelegt von Herrn Robert König am 11. November 1955

Gliederung

1. Einleitung

Die Berechnung des Simplexinhalts in Räumen mit nichteuklidischer Metrik stößt nach wie vor für höhere Dimensionen auf Schwierigkeiten. Schläfli konnte bereits 1852 für Simplizes auf der Kugel den Fall der geraden Dimensionen auf niedrigere

---

* Ausarbeitung eines Vortrags, gehalten bei der akademischen Feier, die am 20. 5. 1955 am Mathematischen Institut der Universität München zu Ehren von Herrn Professor Dr. Robert König von seinen Freunden, ehemaligen Schülern und Assistenten veranstaltet wurde.

Dimensionen reduzieren, wenn dieses Resultat auch erst 1901 publiziert wurde (siehe [12], [2][1]). Weiter haben sich H. Poincaré ([11a]) und H. Hopf ([6]) mit dieser Frage befaßt, und Hopf hat diese Reduktionsformel auch auf die hyperbolische Geometrie ausgedehnt. Dies Problem verdient auch vom funktionentheoretischen Standpunkt aus Interesse, weil zu erwarten ist, daß für die Berechnung des Simplexinhaltes beim Aufstieg von einer geraden Dimension zur nächsthöheren ungeraden Dimension neue transzendente Funktionen auftreten. Zumindest ist dies für $n = 3$ (Lobatschefskij [7], [7a], Coxeter [3], [3a], siehe auch die in [12], Seite 390, gegebenen weiteren Zitate) und neuerdings für $n = 5$ ([8], [9]) erwiesen worden. Diese Untersuchungen waren für mich der Anlaß, die Gesamtheit der Winkelrelationen am Simplex aufzustellen, wobei nur elementare Begriffe benötigt werden.

Die bekannte Schlußweise, die zur Poincaré-Hopfschen Formel ([6]) führt, liefert dann entsprechende Relationen für simpliziale Zerlegungen in Clifford-Kleinschen Raumformen. Diese gelten aber auch unabhängig von der Metrik, d. h., sie lassen sich rein kombinatorisch topologisch herleiten, wobei ein gewisser Parallelismus der Formeln in Erscheinung tritt. Es ist interessant, und es mag besonders darauf hingewiesen werden, daß die hier auftretenden Bernoullischen Zahlen und die methodische Verwertung von formalen Potenzreihen auch neuerdings in der Topologie eine sehr bemerkenswerte Rolle spielen ([5]).

I. Das Simplex in der n-Sphäre

2. Grundbegriffe und Bezeichnungen

Seien x_ν, $\nu = 0, 1, \ldots n$, kartesische Koordinaten im euklidischen Raum E^{n+1}, der n-dimensionale Inhalt der n-dimensionalen Einheitssphäre S^n: $\sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1$ werde c_n genannt, also

[1] Nummern in eckigen Klammern verweisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß.

$c_1 = 2\pi$, $c_2 = 4\pi$ usw. Ein n-dimensionales *sphärisches Simplex* $\mathfrak{S}^n$ werde (als Teil von S^n) gegeben durch die Gleichungen:

$$(2.1)\quad l_\mu = \sum_{\nu=0}^{n} a_{\mu\nu} x_\nu \geqq 0,\ \mu = 0, 1, \ldots n,\ \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1,\ \det(a_{\mu\nu}) \neq 0.$$

Sei $i_{\nu_0 \ldots \nu_k}$ der n-dimensionale Inhalt des sphärischen Gebietes:

$$\left\{ l_{\nu_0} > 0,\ l_{\nu_1} > 0, \ldots l_{\nu_k} > 0,\ \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1 \right\}$$

so nennen wir (für $k \geqq 1$)

$$(2.2)\qquad a_{\nu_0 \ldots \nu_k} = \frac{1}{c_n} i_{\nu_0 \ldots \nu_k}$$

den „*k-dimensionalen (relativen) Innenwinkel*" von $\mathfrak{S}^n$ am $(n-k-1)$-dimensionalen Simplex

$$\mathfrak{s}^{n-k-1} =$$

$$\left\{ l_{\nu_0} = l_{\nu_1} = \ldots l_{\nu_k} = 0,\ l_{\nu_{k+1}} \geqq 0,\ l_{\nu_{k+2}} \geqq 0, \ldots l_{\nu_n} \geqq 0,\ \sum_{\nu=0}^{n} x_\nu^2 = 1 \right\}$$

(bei Hopf [6] „$(k+1)$-facher" Innenwinkel) und $\mathfrak{s}^{n-k-1}$ seinen „*Scheitel*". Hierbei ist $(\nu_0, \ldots \nu_k, \nu_{k+1} \ldots \nu_n)$ eine Permutation von $(0, 1, \ldots, n)$.

Für $k = 0$ werde $\frac{1}{c_n} i_{\nu_0} = \frac{1}{2}$ gesetzt mit einem $\mathfrak{s}^{n-1}$ als Scheitel; für $k = n - 1$ ist $\frac{1}{c_n} i_{\nu_0 \ldots \nu_{n-1}}$ der $(n-1)$-dimensionale Innenwinkel mit einem $\mathfrak{s}^0 = \left\{ l_{\nu_0} = \ldots = l_{\nu_{n-1}} = 0,\ \sum_{v=0}^{n} x_\nu^2 = 1 \right\}$, d. h. einem Eckpunkt des Simplexes $\mathfrak{S}^n$ als Scheitel. Die „*Dimension*" *k des Winkels* haben wir hierbei gerade so festgesetzt, daß zu seiner Berechnung im allgemeinen k-dimensionale sphärische Simplexinhalte ausreichen (siehe später II, 7.). Wir merken uns noch an, daß bei dieser Sprechweise die Summe der Dimensionen von Winkel und Scheitel jeweils $n - 1$ ist.

Sodann führen wir für $k = 1, 2, \ldots n - 1$ die Summe ω_k (bei Hopf [6] $w^{(n-k-1)}$) der k-dimensionalen relativen Winkel von $\mathfrak{S}^n$ ein:

(2.3) $$\omega_k = \frac{1}{c_n} \sum_{\nu_0 < \nu_1 < \ldots < \nu_k} i_{\nu_0 \ldots \nu_k}$$

und ergänzen diese Festsetzung für $k = 0$ und $k = -1$ durch:

(2.4) $$\omega_0 \; (= w^{(n-1)}) = \frac{n+1}{2}, \quad \omega_{-1} \; (= w^{(n)}) = 1$$

3. Poincarésche Relationen und Poincarésche Formel

Ein Zugang zu den gesuchten Relationen stammt von Poincaré [11a]. Führen wir mit ihm die Summe s_k^n der n-dimensionalen Inhalte aller derjenigen Teilgebiete von S^n ein, für welche genau k der gegebenen $n+1$ Linearformen l_ν positiv (und die übrigen genau $n-k+1$ negativ) werden, sowie $\sigma_k^n = \frac{1}{c_n} s_k^n$ als „Relativ-Inhalt" aller dieser Teilgebiete, so ist:

$$\sigma_0^n = \sigma_{n+1}^n = \frac{1}{c_n} i_{01\ldots n} = \omega_n = \text{„Relativinhalt" von } \mathfrak{S}^n$$

und allgemeiner

(3.1.a) $$\sigma_\nu^n = \sigma_{n+1-\nu}^n, \quad \nu = 0, \ldots n+1, \quad \text{sowie}$$

(3.1.b) $$\omega_k = \sum_{\nu=k+1}^{n+1} \binom{\nu}{k+1} \sigma_\nu^n, \quad k = -1, 0, 1, \ldots n-1, n,$$

$$\Bigl(k = -1 : \omega_{-1} = 1 = \sum_{\nu=0}^{n+1} \sigma_\nu^n, \; k = 0 : \omega_0 = \frac{n+1}{2} = \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu \cdot \sigma_\nu^n,$$

$$k = 1 : \omega_1 = \sum_{\nu=2}^{n+1} \binom{\nu}{2} \sigma_\nu^n, \text{usw. bis } \omega_{n-1} = \sigma_n^n + (n+1)\,\sigma_{n+1}^n, \; \omega_n = \sigma_{n+1}^n\Bigr)$$

Hieraus hat bereits Poincaré [6] die bekannte Formel für die „Winkelwechselsumme" oder „verallgemeinerte Winkelsumme" W (Hopf) hergeleitet:

(3.2) $$W = \sum_{\nu=-1}^{n-1} (-1)^{n-\nu-1} \omega_\nu = (1 + (-1)^n)\, \omega_n$$

4. System linear unabhängiger Relationen

Stellen wir uns nun die Aufgabe, ein vollständiges System von linear unabhängigen linearen Relationen zwischen den ω_ν aufzufinden, die nach Elimination der σ_ν^n aus dem System (3.1 a, b) zu folgern sind, so erhalten wir die folgenden weiteren Relationen:

$$\omega_0 - \frac{1}{2}\binom{n+1}{1}\omega_{-1} = 0, \qquad \text{für } n \geqq 0,$$

$$\omega_2 - \frac{1}{2}\binom{n-1}{1}\omega_1 + \frac{1}{4}\binom{n+1}{3}\omega_{-1} = 0, \qquad \text{für } n \geqq 2,$$

$$\omega_4 - \frac{1}{2}\binom{n-3}{1}\omega_3 + \frac{1}{4}\binom{n-1}{3}\omega_1 - \frac{1}{2}\binom{n+1}{5}\omega_{-1} = 0,$$
$$\text{für } n \geqq 4,$$

$$\omega_6 - \frac{1}{2}\binom{n-5}{1}\omega_5 + \frac{1}{4}\binom{n-3}{3}\omega_3 - \frac{1}{2}\binom{n-1}{5}\omega_1 + \frac{17}{8}\binom{n+1}{7}\omega_{-1} = 0,$$
$$\text{für } n \geqq 6, \text{ usw.}$$

allgemein ergeben sich Gleichungen dieser Form:

$$(4.1) \quad \omega_{2l} + \sum_{h=0}^{l}(-1)^{h+1}a_{2h+1}\binom{n-2l+2h+1}{2h+1}\omega_{2l-2h-1} = 0, \qquad \text{für } n \geqq 2l.$$

Wir zeigen jetzt den

Satz 1: *Für ein beliebiges sphärisches Simplex* $\mathfrak{S}^n$ *erfüllen die Winkelsummen* ω_ν *die Gleichungen* (4.1) *für* $l = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n}{2}\right]$ *mit*

$$(4.2.) \quad a_{2h+1} = \frac{1}{h+1}(2^{2h+2}-1)(-1)^h B_{2h+2}, \quad h = 0, 1, 2, \ldots,$$

$$\textit{worin } B_2 = \frac{1}{6},\ B_4 = -\frac{1}{30},\ B_6 = \frac{1}{42}, \ldots$$

die Bernoullischen Zahlen bedeuten. Die Relationen (4.1) *stellen ein vollständiges System von linear unabhängigen linearen Relationen zwischen den* ω_ν *dar, die sich nach Elimination der* σ_ν^n *aus* (3.1. a, b) *ergeben.*

Den Beweis führen wir in drei Schritten:

(1) Aus der Gültigkeit von (4.1) für ein $l \geqq 0$ und $n = 2l$ folgt (4.1) für dieses l und alle $n > 2l$. Man braucht nämlich diese Gleichungen dann nur auf jeden einzelnen $2l$-dimensionalen Winkel aus ω_{2l} anzuwenden und alle diese Gleichungen über alle Winkel aus ω_{2l} zu summieren, dann wird ein Winkel aus der Summe ω_k (k ungerade) genau in so vielen von diesen Gleichungen auftreten, als er in verschiedenen $2l$-dimensionalen Winkeln (aus ω_{2l}) mit vorkommt, und diese Anzahl ist gerade gleich

$$\binom{(n+1)-(k+1)}{(2l+1)-(k+1)} = \binom{n-k}{2l-k}\bigg|_{k=2l-2h-1} = \binom{n-2l+2h+1}{2h+1},$$

so daß dieser Faktor dann noch zu jedem Glied

$$(-1)^{h+1}\, a_{2h+1}\, \omega_{2l-2h-1}$$

hinzutritt.

(2) Trivialerweise ist nun (4.1) richtig für $l = 0$ und $n \geqq 0$ mit $a_1 = \frac{1}{2}$; nehmen wir an, daß es Zahlen $a_1, \ldots a_{2\lambda-1}$ $(\lambda \geqq 1)$ gibt und daß für diese die Richtigkeit von (4.1) für alle l mit $\lambda - 1 \geqq l \geqq 0$ und für $n = 2\lambda$ gezeigt ist, so wollen wir jetzt zeigen, daß dann die Gleichung (4.1) für $l = \lambda$ (und $n = 2\lambda$) folgt. Es ist nach der aus (3.1) hergeleiteten Gleichung (3.2):

$$\begin{aligned}
\omega_{2\lambda} &= \frac{1}{2}\sum_{\nu=-1}^{n-1} (-1)^{n-\nu-1}\,\omega_\nu = -\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\omega_{2j} + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda}\omega_{2j-1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\sum_{h=0}^{j}(-1)^{h+1}\, a_{2h+1}\binom{2\lambda-2j+2h+1}{2h+1}\omega_{2j-2h-1} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda}\omega_{2j-1} \qquad\qquad (4.3) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{J=j-h=0}^{\lambda-1}\;\sum_{h=0}^{\lambda-J-1}(-1)^{h+1}\, a_{2h+1}\binom{2\lambda-2J+1}{2h+1}\omega_{2J-1} \\
&\qquad + \frac{1}{2}\sum_{J=0}^{\lambda}\omega_{2J-1} + \frac{1}{2}\,\omega_{2\lambda-1} \\
&= \sum_{J=0}^{\lambda}\omega_{2J-1}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sum_{h=0}^{\lambda-J-1}(-1)^{h+1}\, a_{2h+1}\binom{2\lambda-2J+1}{2h+1}\right)
\end{aligned}$$

die zu beweisende Gleichung (4.1) mit $l = \lambda = \frac{n}{2}$ verlangt, zu zeigen, daß dies gleich sei dem folgenden Ausdruck

$$\sum_{h=0}^{\lambda} (-1)^h a_{2h+1} \omega_{2\lambda-2h-1}$$
$$= \sum_{J=0}^{\lambda} (-1)^{\lambda+J} a_{2\lambda-2J+1} \omega_{2J-1}.$$

Koeffizientenvergleich für $0 \leqq J \leqq \lambda$ liefert das rekurrente Gesetz der Koeffizienten:

$$(-1)^{\lambda+J} a_{2\lambda-2J+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\lambda-J-1} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2\lambda-2J+1}{2h+1}$$

oder

$$(4.4) \qquad (-1)^{\mu} a_{2\mu+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{h=0}^{\mu-1} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2\mu+1}{2h+1}$$

$$\text{für } \mu = 0, 1, \ldots \lambda,$$

$\left(\text{für } \mu = 0 \text{ bedeutet diese Gleichung } a_1 = \frac{1}{2}\right)$.

(3) Hiernach ist der Beweis von (4.1) durch vollständige Induktion beendet, wenn die $a_{2\mu+1}$ so gewählt werden, daß sie diese Bedingung (4.4) für beliebige $\mu \geqq 0$ erfüllen. Setzen wir

$$(4.5) \qquad \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} x^{2\lambda+1} = g(x)$$

als formale Potenzreihe an, so ist (4.4) gleichbedeutend mit

$$(4.6) \qquad 1 + \sum_{h=0}^{\lambda} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2\lambda+1}{2h+1} = (-1)^{\lambda} a_{2\lambda+1}$$

oder mit

(4.7)

$$\frac{1}{(2\lambda+1)!} + \sum_{h=0}^{\lambda} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \frac{1}{(2h+1)!(2\lambda-2h)!} = (-1)^{\lambda} \frac{a_{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!}$$

oder im Sinne des formalen Potenzreihenrechnens mit

$$g(x) \cos x = g(x) \cdot \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} x^{2\mu}}{(2\mu)!}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{\lambda} (-1)^{h} \frac{a_{2h+1}}{(2h+1)!} \frac{1}{(2(\lambda-h))!} \right) (-1)^{\lambda} x^{2\lambda+1}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\frac{1}{(2\lambda+1)!} - (-1)^{\lambda} \frac{a_{2\lambda+1}}{(2\lambda+1)!} \right) (-1)^{\lambda} x^{2\lambda+1}$$

$$= \sin x - g(x).$$

Also ergibt sich:

$$g(x) = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

Hieraus folgt:

$$\frac{a_{2h+1}}{(2h+1)!} = \frac{2^{2h+2} (2^{2h+2} - 1) (-1)^{h} B_{2h+2}}{(2h+2)!} \cdot \frac{1}{2^{2h+1}} \text{ oder}$$

$$a_{2h+1} = \frac{(-1)^{h} (2^{2h+2} - 1) B_{2h+2}}{h+1},$$

womit der erste Teil von Satz 1 bewiesen ist.

Der zweite Teil von Satz 1 ist rasch einzusehen. Aus der Gestalt des Systems (3.1. a, b) ergibt sich nämlich sehr leicht, daß die Eliminationsaufgabe auf höchstens $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ linear unabhängige lineare Gleichungen führt. Da sich außerdem nicht schwer einsehen läßt, daß die Gleichungen (4.1) Folgegleichungen des Systems (3.1. a, b) sind und da die Gleichungen (4.1) offensichtlich linear unabhängig sind, so folgt, daß sie ein vollständiges System von linear unabhängigen linearen Gleichungen darstellen, die sich nach Elimination der σ_{ν}^{n} aus (3.1. a, b) ergeben.

Bemerkung: Die für $n = 2l$ im System (4.1) enthaltene Gleichung

$$(4.8) \qquad \omega_{2l} + \sum_{h=0}^{l} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \, \omega_{2l-2h-1} = 0$$

kommt bereits bei Schläfli [12], S. 240, vor, der sie jedoch auf ganz andere Art (über seine allgemeine Integralformel) beweist. Um die Schläflische Formel mit unserer Formel (4.8) in Übereinstimmung zu bringen, hat man zu beachten, daß 1. bei

Schläfli die Dimension des sphärischen Simplexes so definiert ist, daß sie um 1 größer ist als nach der heute üblichen Definition und 2. als Einheit für die ν-dimensionalen relativen Winkel der $2^{\nu+1}$-te Teil (d. h. der verallgemeinerte „Oktant") der ν-Sphäre genommen wird und deswegen $\omega_\nu = 2^{-\nu-1} f_{\nu+1}$ zu setzen ist.

5. Die Zahlen a_{2h+1}

Die Zahlen a_{2h+1} berechnen sich der Reihe nach wie folgt:

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{2}, a_7 = \frac{17}{8}, a_9 = \frac{31}{2}, a_{11} = \frac{691}{4}, a_{13} = \frac{5461}{2}, \ldots$$

Es gilt der

Satz 2. *Für alle* $h \geqq 0$ *ist* $a_{2h+1} = 2^{-\lambda-1} A_{2h+1}$, *worin* A_{2h+1} *eine ganze, und zwar ungerade Zahl darstellt und* λ *aus der Gleichung* $h+1 = 2^\lambda q$, q *ganz und ungerade, zu bestimmen ist.*

Bemerkung: Anders ausgedrückt, gilt für $\nu = 2^{k-1} q - 1$, q ganz und ungerade: $A_{2\nu+1} = 2^k a_{2\nu+1}$ ist ganz und ungerade; also ist z. B. $a_{31} = 2^{-5} A_{31}$, A_{31} ganz und ungerade.

Beweis. Die Zahlen $T_{h+1} = 2^{2h+1} a_{2h+1}$ sind die durch die Potenzreihe $\operatorname{tg} x = \sum_{h=0}^{\infty} T_{h+1} \frac{x^{2h+1}}{(2h+1)!}$ definierten sogenannten „Tangentenzahlen".[2] Sie sind bekanntlich ganze Zahlen, und es gilt:

$$T_{h+1} = \frac{1}{h+1} 2^{2h+1} (2^{2h+2} - 1) \cdot (-1)^h \cdot B_{2h+2}$$

Andererseits ist

$$(-1)^h \cdot B_{2h+2} = \frac{\alpha_h}{2\beta_h},$$

worin α_h, β_h ganz, positiv, teilerfremd und außerdem beide ungerade sind. Setzen wir $h+1 = 2^\lambda q$, q ganz und ungerade, so folgt aus der Ganzzahligkeit von

$$T_{h+1} = 2^{2h-\lambda} (2^{2h+2} - 1) \cdot \frac{\alpha_h}{\beta_h}, \ \beta_h \text{ ungerade,}$$

[2] Siehe z. B. [10], S. VIII, aus der Rekursionsformel S. IX (oben) folgt die Ganzzahligkeit; die Zahlen $A_{2h+1} = 2^{-(2h-\lambda)} \cdot T_{h+1}$, $2h+1 \leqq 59$, können aus der Tafel für T_n, $n \leqq 30$, [10] S. 88, leicht gewonnen werden, z. B. $A_{15} = 929569$, $A_{17} = 3202291$, $A_{19} = 221930581, \ldots$, die Zahl A_{59} hat 52 Stellen, A_{99} 108 Stellen.

die Darstellung $T_{h+1} = 2^{2h-\lambda} A_{2h+1}$, A_{2h+1} ganz und ungerade, also: $a_{2h+1} = 2^{-\lambda-1} A_{2h+1}$, womit alles bewiesen ist.[2a]

Bemerkung: Die Tangentenzahlen spielen übrigens zusammen mit den Sekantenzahlen eine besondere Rolle bei der Aufgabe, die Anzahl $2t_n$ der sog. Zickzackpermutationen von n Elementen zu bestimmen ([4]). Eine Permutation $\begin{pmatrix} 1, & \dots n \\ z_1, & \dots z_n \end{pmatrix}$ heißt hierbei Zickzackpermutation, wenn kein z_ν der Größe nach zwischen seinen Nachbarn $z_{\nu-1}$, $z_{\nu+1}$ liegt, d. h. wenn $(z_\nu - z_{\nu-1}) \cdot (z_{\nu+1} - z_\nu) < 0$ ist für alle $2 \leqq \nu \leqq n-1$.

Es ist sec x

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} t_{2\nu} \frac{x^{2\nu}}{(2\nu)!}, \ \operatorname{tg} x = \sum_{\nu=0}^{\infty} t_{2\nu+1} \frac{x^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!}, \ t_{2\nu+1} = 2^{2\nu+1} a_{2\nu+1} = T_{\nu+1}.$$

6. Die Winkelwechselsumme W

Wir beweisen

Satz 3: *Für gerades $n = 2m$ ist*

$$W = 2 \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu a_{2\mu+1} \, \omega_{2m-2\mu-1};$$

für ungerades $n = 2m+1$ ist $W = 0$ eine Folgerelation der Gleichungen (4.1).

Beweis: Für gerades $n = 2 \cdot m$ ist

$$W = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \omega_{n-\nu-1} = \sum_{\mu=-1}^{n-1} (-1)^{\mu-1} \omega_\mu = -\sum_{j=0}^{m-1} \omega_{2j} + \sum_{j=0}^{m} \omega_{2j-1}$$

$$= -\sum_{j=0}^{m-1} \sum_{h=0}^{j} (-1)^h a_{2h+1} \binom{n-2j+2h+1}{2h+1} \omega_{2j-2h-1} + \sum_{\lambda=0}^{m} \omega_{2\lambda-1}$$

$$= \sum_{\lambda=j-h=0}^{m} \left(\sum_{h=0}^{m-\lambda-1} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2m-2\lambda+1}{2h+1} + 1 \right) \omega_{2\lambda-1}$$

$$= 2 \sum_{\mu=0}^{m} (-1)^\mu a_{2\mu+1} \, \omega_{2m-2\mu-1}.$$

[2a] (Zusatz bei der Korrektur:) Siehe hierzu auch L. Saalschütz, [17], S. 117–119.

Für ungerades $n = 2m + 1$ ist

$$-W = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^{\nu-1} \omega_{n-\nu-1} = \sum_{\mu=-1}^{n-1} (-1)^{n-\mu} \omega_\mu = \sum_{j=0}^{m} (-\omega_{2j} + \omega_{2j-1})$$

$$= -\sum_{j=0}^{m} \sum_{h=0}^{j} (-1)^h a_{2h+1} \binom{n-2j+2h+1}{2h+1} \omega_{2j-2h-1} + \sum_{\lambda=0}^{l} \omega_{2\lambda-1}$$

$$= \sum_{\lambda=j-h=0}^{l} \left(\sum_{h=0}^{m-\lambda} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2m-2\lambda+2}{2h+1} + 1 \right) \omega_{2\lambda-1}$$

$$= \sum_{\mu=m-\lambda=0}^{m} \left(\sum_{h=0}^{\mu} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2\mu+2}{2h+1} + 1 \right) \omega_{2m-2\mu-1} = 0,$$

weil $\sum_{h=0}^{\mu} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{2\mu+2}{2h+1} + 1 = 0$ ist. Um letzteres einzusehen, schreiben wir die Beziehung $g(x) \sin x = 1 - \cos x$ in Potenzreihen an:

$$\sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_{2h+1}}{(2h+1)!} x^{2h+1} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\mu x^{2\mu+1}}{(2\mu+1)!} = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h x^{2h+2}}{(2h+2)!}$$

Die linke Seite formt sich um in:

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{\lambda} \frac{a_{2h+1}}{(2h+1)!} \frac{(-1)^{\lambda-h}}{(2\lambda-2h+1)!} \right) x^{2\lambda+2}$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{\infty} \left(\sum_{h=0}^{\lambda} (-1)^h a_{2h+1} \binom{2\lambda+2}{2h+1} \right) \frac{(-1)^\lambda}{(2\lambda+2)!} x^{2\lambda+2}$$

woraus die Koeffizientenvergleichung das gewünschte Resultat ergibt.

II. Das Simplex in Räumen konstanter Krümmung

7. System linear unabhängiger Relationen

Ist das Simplex in einem *Raum konstanter Krümmung* mit der Krümmungskonstanten $k = +1, 0, -1$ (für sphärische, euklidische bzw. hyperbolische Metrik) eingebettet und natürlich von ebenen

Unterräumen dieser Metrik begrenzt, so ergänzen wir die Definition der *Winkel* in bekannter Weise (siehe etwa Hopf [6]): Man schlägt um einen inneren Punkt P_0 des „Scheitel"-Simplexes $\mathfrak{s}^{n-\nu-1}$ der Dimension $(n-\nu-1)$ eine genügend kleine $(n-1)$-Sphäre S^{n-1} mit P_0 als Mittelpunkt (im Sinn der betreffenden Geometrie),[3] so daß diese keine anderen Randsimplizes von $\mathfrak{S}^n$ trifft, als die im Scheitelsimplex zusammenstoßenden, d. h. dieses enthaltenden Simplizes. Der mit $\frac{1}{v_{n-1}}$ multiplizierte $(n-1)$-dimensionale Inhalt des im Inneren von $\mathfrak{S}^n$ gelegenen Teils von S^{n-1} ist unabhängig vom Radius und von der Wahl des Mittelpunktes auf $\mathfrak{s}^{n-\nu-1}$ und liefert den relativen Innenwinkel zu diesem „Scheitelsimplex". Er kann auch gewonnen werden, indem man durch P_0 einen ebenen Normalraum der Dimension $\nu+1$ legt, dieser schneidet S^{n-1} in einer ν-Sphäre S^ν[4]; der mit $\frac{1}{v_\nu}$ multiplizierte ν-dimensionale Inhalt des innerhalb $\mathfrak{S}^n$ gelegenen Teils von S^ν liefert ebenfalls diesen Winkel. Verwendet man diese Erklärung auch für die sphärische Metrik auf der Kugel S^n, so bleibt man in Übereinstimmung mit der in I. gegebenen Winkeldefinition. Da für die Messung der Winkel der Dimension $\nu < n$ jeweils nur der ν-dimensionale Inhalt von Simplexen auf S^ν benutzt wird, ist hiernach klar, daß auf jeden Fall bei beliebiger Krümmungskonstante k die Formeln (4.1) und ebenso die Formeln für W (aus 6.) voll gültig bleiben, erstere so lange $2l < n$ ist. Lediglich für gerade $n = 2m$ ist daher die im sphärischen Fall gültige Formel für $2l = n$ aus (4.1) zu ersetzen durch

$$W = \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \omega_{n-\nu-1} = k^m \cdot 2\,\omega_{2m} \tag{7.1}$$

(siehe Hopf [6]), worin k die eben erwähnte Krümmungskonstante ist und ω_{2m} der mit $\frac{1}{c_{2m}}$ multiplizierte $2m$-dimensionale Inhalt von $\mathfrak{S}^n$ in der zugrunde liegenden Geometrie ist. Unter Verwendung der Resultate von 6. erhalten wir somit den Satz:

---

[3] und $(n-1)$-dimensionalem Inhalt v_{n-1}

[4] mit ν-dimensionalem Inhalt v_ν

Satz 4. *In jeder der drei Geometrien gelten für alle* l *mit* $0 \leqq 2l < n$ *die Relationen* (4.1)*; für gerades* $n = 2m$ *kommt noch diese eine weitere Relation hinzu:*

$$k^m \omega_{2m} = \frac{1}{2} W = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h a_{2h+1} \omega_{2m-2h-1} \tag{7.2}$$

d. h. für sphärische Metrik die Gleichung (4.1) *mit* $l = m$*, für euklidische Metrik:*

$$\omega_{2m-1} + 2 \sum_{h=1}^{m} (-1)^h a_{2h+1} \omega_{2m-2h-1} = 0, \tag{7.3}$$

für hyperbolische Metrik:

$$\omega_{2m} + (-1)^m \sum_{h=0}^{m} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \omega_{2m-2h-1} = 0, \tag{7.4}$$

oder (7.4a)

$$\omega_{2m} \pm \sum_{h=0}^{m} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \omega_{2m-2h-1} = 0 \ \text{für} \ \begin{cases} n = 4q, \ \textit{bzw.} \\ n = 4q+2. \end{cases}$$

Wir schließen hier noch die folgenden Bemerkungen an:

(1) Das Volumen eines hyperbolischen bzw. sphärischen $\mathfrak{S}^{2m}$ ist durch die (sphärisch zu messenden) Winkelsummen der ungeraden Dimensionen $1, 3, 5, \ldots, 2m-1$ linear ausdrückbar [siehe 7.4a] bzw. [4.1] mit $l = m$).[5] Insbesondere gilt also für $n = 4$ (und hyperbolische oder sphärische Metrik):

$$\omega_4 = \frac{1}{2} \omega_3 - \frac{1}{4} \omega_1 + \frac{1}{2} \tag{7.5a}$$

für $n = 6$:

$$\omega_6 = \pm \left(\frac{1}{2} \omega_5 - \frac{1}{4} \omega_3 + \frac{1}{2} \omega_1 - \frac{17}{8} \right), \tag{7.5b}$$

je nachdem sphärische (oberes Vorzeichen) oder hyperbolische Metrik (unteres Vorzeichen) vorliegt.

---

[5] Dies ist für sphärische Metrik zuerst von Schläfli [12] ausgesprochen worden. Siehe auch die Bemerkung am Schluß von 4., (4.8).

(2) Es ist besonders bemerkenswert, daß sich die (sphärisch zu messende) Winkelsumme ω_{2m-1} der ungeraden Dimension $2m-1$ eines euklidischen $\mathfrak{S}^{2m}$ durch die (sphärisch zu messenden) Winkelsummen der ungeraden Dimensionen $1, 3, 5, \ldots, 2m-3$ linear ausdrücken läßt. Insbesondere hat man:

$$
(7.6') \quad \begin{cases}
\text{für } n = 2: & \omega_1 = \frac{1}{2} \\
\text{für } n = 4: & \omega_3 = \frac{\omega_1}{2} - 1 \\
\text{für } n = 6: & \omega_5 = \frac{1}{2}\omega_3 - \omega_1 + \frac{17}{4} \\
\text{für } n = 8: & \omega_7 = \frac{1}{2}\omega_5 - \omega_3 + \frac{17}{4}\omega_1 - 31
\end{cases}
$$

usw., allgemein

$$
(7.6'') \quad \text{für} \quad n = 2m : \omega_{2m-1} = 2\sum_{h=1}^{m} (-1)^{h-1} a_{2h+1}\,\omega_{2m-2h-1}\,.
$$

(3) Im euklidischen Fall sind die Winkel der Dimension 1, (welche $[n-2]$-dimensionale Seitenimplizes als „Scheitel" haben), wie man sich leicht überlegt, genau einer Relation unterworfen: Setzt man

$$
c_{ik} = \begin{cases} \cos(c_1\,\alpha_{ik}) \\ -1 \end{cases} \text{für} \begin{cases} i \neq k \\ i = k \end{cases}, \quad i, k = 0, 1, \ldots n,
$$

so gilt:

$$
(7.7) \qquad \det_{i,k=0,1,\ldots n}(c_{ik}) = 0
$$

Diese Relation ist für $n = 2$ eine Folge der linearen Relation $a_{01} + a_{02} + a_{12} = \omega_1 = \frac{1}{2}$. Durch Angabe aller eindimensionalen Winkel bis auf einen ist ein euklidisches Simplex bis auf Ähnlichkeiten eindeutig bestimmt, d. h. sind auch die höherdimensionalen Winkelsummen $\omega_3, \omega_5, \ldots$ daraus berechenbar, wenn auch im allgemeinen in diese Berechnung transzendente Funktionen eingehen werden.

8. Abgeleitete Relationen

(a) Allgemeine Gestalt für die Winkelsumme W im Falle gerader Dimension $n = 2m$

Mit Rücksicht auf Satz 3. und (4. 1) können wir mit willkürlichen Zahlen $\beta_{2\sigma-1}$ den folgenden Ansatz machen:

$$\beta_{-1}\frac{1}{2}W = \beta_{-1}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu} a_{2\mu+1}\,\omega_{2m-2\mu-1} +$$

(8. 1)

$$+\sum_{\sigma=1}^{m}\beta_{2\sigma-1}\left[-\omega_{2m-2\sigma}+\sum_{h=0}^{m-\sigma}(-1)^{h} a_{2h+1}\binom{2\sigma+2h+1}{2h+1}\omega_{2m-2\sigma-2h-1}\right]$$

$$= -\sum_{\sigma=1}^{m}\beta_{2\sigma-1}\,\omega_{2m-2\sigma}+\beta_{-1}\sum_{\mu=0}^{m}(-1)^{\mu} a_{2\mu+1}\,\omega_{2m-2\mu-1}$$

$$+\sum_{l=1}^{m}\left[\sum_{h=0}^{l-1}(-1)^{h}\beta_{2l-2h-1}\,a_{2h+1}\binom{2l+1}{2h+1}\right]\omega_{2m-2l-1}\quad (\text{mit } l=\sigma+h)$$

$$= -\sum_{\sigma=1}^{m}\beta_{2\sigma-1}\,\omega_{2m-2\sigma}+\sum_{l=0}^{m}\beta_{2l}\,\omega_{2m-2l-1} = \sum_{\nu=0}^{2m}(-1)^{\nu}\beta_{\nu}\,\omega_{2m-\nu-1}$$

Wir haben somit den

Satz 5: *Im Falle* $n = 2m$ *ist die Winkelwechselsumme* W

$$= 2\sum_{\nu=0}^{2m}(-1)^{\nu}\beta_{\nu}\,\omega_{2m-\nu-1}\quad \textit{mit}$$

$$(8.\,1')\quad \beta_{2l}=\sum_{h=0}^{l}(-1)^{h}\beta_{2l-2h-1}\,a_{2h+1}\binom{2l+1}{2h+1}\ \textit{für}\ 0\leqq l\leqq m,$$

wobei $\beta_{-1}=1$ *zu setzen ist, während die übrigen* β_{2l-1} *mit* $1\leqq l\leqq 2m-1$ *frei gewählt werden können* $\left(l=0\right.$ *liefert* $\left.\beta_0=\frac{1}{2}\right)$.

Bemerkung: Unter Verwendung von

$$(8.\,2)\qquad f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}\beta_{2l}}{(2l+1)!}x^{2l+j},\ g(x) = \operatorname{tg}\frac{x}{2},\ h(x)$$

$$=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^{l}\beta_{2l-1}}{(2l)!}x^{2l-1+j}$$

können die Gleichungen (8.1′) zusammengefaßt werden in:

$$f(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}\, h(x) \qquad \text{mit } \beta_{-1} = 1, \tag{8.1''}$$

wobei man natürlich jeweils nur die β_ν mit $\nu \leqq 2m$ zu betrachten hat. Speziell liefern die folgenden Ansätze:

$$\begin{aligned}&h(x) = \gamma(1 + \cos x), \quad f(x) = \gamma \sin x, \quad j = 1, \ \beta_\nu = \gamma, \\ &(\nu \geqq 0),\ \beta_{-1} = 2\gamma = 1, \text{ also } \beta_\nu = \frac{1}{2}, (\nu \geqq 0), \ \text{(d. h. die Ausgangsdefinition von } W\text{)},\end{aligned} \tag{8.3.1}$$

$$\begin{aligned}&h(x) = \gamma \cos \frac{x}{2}, \ f(x) = \gamma \sin \frac{x}{2}, \ j = 1, \ \beta_\nu = \gamma \cdot 2^{-\nu-1}, \\ &\beta_{-1} = \gamma = 1, \ \text{ also } \ \beta_\nu = 2^{-\nu-1}, (\nu \geqq -1)\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

$$\begin{aligned}&h(x) = \gamma \sin x, f(x) = \gamma(1 - \cos x), \ j = 2, \ \beta_\nu = \frac{\gamma}{\nu + 2}, \\ &\beta_{-1} = \gamma = 1, \quad \text{also} \quad \beta_\nu = \frac{1}{\nu + 2}, \ (\nu \geqq -1).\end{aligned} \tag{8.3.3}$$

Wir haben also den

Satz 6: *Für die Winkelwechselsumme W eines Simplexes in einem Raum konstanter Krümmung und gerader Dimension $n = 2m$ gilt:*

$$\begin{aligned}W &= \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \omega_{2m-\nu-1} = \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu} \omega_{2m-\nu-1} \\ &= 2 \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{1}{\nu+2}\, \omega_{2m-\nu-1}\end{aligned} \tag{8.4}$$

(b) Allgemeine Gestalt einer linearen Relation zwischen den Winkelsummen im Falle gerader Dimension

Für $n = 2m$ ergibt sich aus Satz 4 und (8.1):

$$\begin{aligned}0 &= \beta_{-1} \left(-k^m \omega_{2m} + \frac{1}{2} W\right) \\ &= -\beta_{-1} k^m \omega_{2m} + \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \beta_\nu \omega_{2m-\nu-1},\end{aligned}$$

wobei jetzt β_{-1} keiner Einschränkung mehr unterliegt. Somit erhält man den

Satz 7: *Im Falle gerader Dimension $n = 2m$ gilt für die Winkelsummen ω_ν eines Simplexes die folgende allgemeine Relation:*

$$-\beta_{-1} k^m \omega_{2m} + \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \beta_\nu \omega_{2m-\nu-1} = 0, \tag{8.5}$$

worin die β_{2l-1} $(l \geqq 0)$ willkürlich gewählt werden können und die β_{2l} $(l \geqq 0)$ aus (8.1′) zu berechnen sind. ($k = 0, +1, -1$ für euklidische, sphärische bzw. hyperbolische Metrik.)

Bemerkung: Im euklidischen Fall kommt β_{-1} in (8.5) nicht vor, so daß die Gleichung $l = 0$ in (8.1′) die freie Wählbarkeit von β_0 besagt.

Die Beziehungen (8.1′) können wiederum in der Form (8.1″) geschrieben werden, nur ist jetzt β_{-1} frei wählbar. Während der Ansatz (8.3.1.) die Poincaré-Hopfsche Gleichung liefert, ergeben die speziellen Ansätze (8.3.2) und (8.3.3) den

Satz 8: *Im Falle gerader Dimension $n = 2m$ gelten für die Winkelsummen ω_ν eines Simplexes die Relationen:*

$$\left\{\begin{aligned} -k^m \omega_{2m} + \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{1}{2^{\nu+1}} \omega_{2m-\nu-1} &= 0, \\ -k^m \omega_{2m} + \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{1}{\nu+2} \omega_{2m-\nu-1} &= 0. \end{aligned}\right. \tag{8.6}$$

(c) Allgemeine Gestalt einer linearen Relation im Falle ungerader Dimension $n = 2m + 1$

Aus (4.1) erhalten wir unter Verwendung willkürlicher Zahlen $b_{2\sigma}$ $(0 \leqq \sigma \leqq m)$ weitere lineare Relationen in der folgenden Gestalt, wobei wir eine analoge Umformung wie in 8(a) vornehmen:

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{\sigma=0}^{m} b_{2\sigma} \left[\omega_{2m-2\sigma} - \sum_{h=0}^{m-\sigma} (-1)^h a_{2h+1} \binom{2\sigma+2h+2}{2h+1} \omega_{2m-2\sigma-2h-1} \right] \\ &= \sum_{\sigma=0}^{m} b_{2\sigma} \omega_{2m-2\sigma} - \sum_{l=0}^{m} \left[\sum_{h=0}^{l} (-1)^h b_{2l-2h} a_{2h+1} \binom{2l+2}{2h+1} \right] \omega_{2m-2l-1} \\ &= \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu b_\nu \omega_{2m-\nu} \quad \text{mit} \end{aligned}$$

$$(8.7)\qquad b_{2l+1} = \sum_{h=0}^{l} (-1)^h b_{2l-2h}\, a_{2h+1} \binom{2l+2}{2h+1}, \quad 0 \leqq l \leqq m.$$

Damit ergibt sich der

Satz 9: *Im Falle ungerader Dimension $n = 2m+1$ gilt für die Winkelsummen eines Simplexes die lineare Beziehung:*

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu b_\nu\, \omega_{n-\nu-1} = 0$$

wobei die b_{2l} $(0 \leqq l \leqq m)$ beliebig wählbare Zahlen sind und die b_{2l+1} sich aus (8.7) $(0 \leqq l \leqq m)$ *berechnen.*

Bemerkung: Analog wie bei (8.1′), (8.1″) besteht hier ebenfalls eine Äquivalenz von (8.7) mit der formalen Potenzreihengleichung (8.1″), wenn man dort setzt:

$$(8.7')\qquad \begin{aligned} h(x) &= \sum_{h=0}^{\infty} \frac{(-1)^h b_{2h}}{(2h+1)!} x^{2h+j}, \\ f(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l b_{2l+1}}{(2l+2)!} x^{2l+1+j}, \quad g(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Diesmal ergeben die speziellen Ansätze:

$$(8.8.1)\qquad \begin{aligned} &h(x) = 1 + \cos x, \quad f(x) = \sin x, \quad j = 0, \quad b_0 = 2, \\ &\qquad b_\nu = \nu + 1, \ (\nu \geqq 1), \end{aligned}$$

$$(8.8.2)\qquad h(x) = \cos\frac{x}{2},\ f(x) = \sin\frac{x}{2},\ j = 0,\ b_0 = \frac{\nu+1}{2^\nu},\ (\nu \geqq 0),$$

$$(8.8.3)\qquad h(x) = \sin x,\ f(x) = 1 - \cos x,\ j = 1,\ b_\nu = 1,\ (\nu \geqq 0),$$

$$(8.8.4)\qquad \begin{aligned} &h(x) = 1 + \cos x - \frac{1}{x}\sin x,\ f(x) = \sin x - \frac{1}{x}(1 - \cos x), \\ &\qquad j = 0, \quad b_0 = 1, \quad b_\nu = \nu \quad (\nu \geqq 1). \end{aligned}$$

Sehen wir von dem trivialen Fall (8.8.3) ab und auch von (8.8.1), der sich aus (8.8.3) und (8.8.4) kombiniert, so liefern die Ansätze (8.8.2) und (8.8.4) den

Satz 10: *Im Falle ungerader Dimension $n = 2m + 1$ gelten zwischen den Winkelsummen ω_ν eines Simplexes die folgenden Relationen:*

$$(8.9) \quad \left| \begin{aligned} &\omega_{n-1} + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \nu \cdot \omega_{n-\nu-1} = 0, \\ &\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \frac{(\nu+1)}{2^\nu} \omega_{n-\nu-1} = 0. \end{aligned} \right.$$

Zum Abschluß dieses Abschnittes sei bemerkt:

1. daß die Relationen (8.4), (8.6), (8.9) natürlich nur einige wenige von unendlich vielen möglichen Fällen herausgreifen, aber doch wegen der darin zutage tretenden Gesetzmäßigkeiten vielleicht einiges Interesse beanspruchen dürften, und

2. daß zu vermuten ist, daß die in den Sätzen 5, 7 und 9 auftretenden allgemeinen linearen Ausdrücke wirklich die allgemeinste Form von überhaupt für beliebige Simplizes gültigen linearen Winkelrelationen wiedergeben, jedoch wollen wir dies nicht behaupten, weil wir es nicht beweisen können.

III. Metrisch-simpliziale Zerlegungen geschlossener *Clifford-Klein*scher Raumformen

9. Sei eine metrisch-simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer geschlossenen Clifford-Kleinschen Raumform $\mathfrak{R}^n$ der Krümmungskonstante $k (= +1, 0, -1)$ vorgegeben, d. h. eine simpliziale Zerlegung von $\mathfrak{Z}$ in metrische Simplizes. Dabei wollen wir ein Simplex metrisch nennen, wenn seine Seitensimplizes in ebenen Unterräumen entsprechender Dimension der betreffenden Geometrie liegen. Für jedes Simplex $\mathfrak{S}_\nu^n (\nu = 1, \ldots, \alpha^n)$ aus $\mathfrak{Z}$ bilden wir die Winkelsummen $\omega_{l,\nu}$ der Dimension l und die Winkelwechselsumme W_ν; die Anzahl der k-dimensionalen Simpliesz aus $\mathfrak{Z}$ sei wie üblich α^k genannt. Bezeichnen wir mit v_n das n-dimensionale Volumen von $\mathfrak{R}^n$ und setzen

$$(9.1) \qquad \Omega_n = \frac{v_n}{c_n}$$

als „relatives" Volumen (von $\mathfrak{R}^n$) an, so ist:

$$(9.2)\qquad \sum_{\nu=1}^{\alpha^n} \omega_{n-l-1,\nu} = \begin{cases} \alpha^l \\ \Omega_n \end{cases} \quad \text{für} \quad l = \begin{cases} 0, 1, \ldots n \\ -1 \end{cases}$$

und $\sum_{\nu=1}^{\alpha^n} W_\nu = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \alpha^\lambda = \chi =$ Eulersche Charakteristik von $\mathfrak{Z}$ und damit von $\mathfrak{R}^n$.[6]

Aus einer beliebigen, für alle Simplizes von $\mathfrak{Z}$ gültigen Relation:

$$(9.3)\qquad \sum_{l=-1}^{n} (-1)^l\, b_l \omega_{n-l-1,\nu} = 0, \qquad \nu = 1, \ldots \alpha^n,$$

folgt somit durch Summation über ν:

$$(9.4)\qquad -b_{-1}\,\Omega_n + \sum_{l=0}^{n} (-1)^l\, b_l \alpha^l = 0.$$

Hiernach ergeben sich im Hinblick auf die in 7., 8. gewonnenen Ergebnisse die folgenden Sätze 11 bis 14:

Satz 11: *Für die metrisch-simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer geschlossenen Clifford-Kleinschen Raumform $\mathfrak{R}^n$ gelten die Beziehungen:*

$$(9.5)\qquad \alpha^{n-2l-1} + \sum_{h=0}^{l} (-1)^{h+1}\, a_{2h+1} \binom{n-2l+2h+1}{2h+1} \alpha^{n-2l+2h} = 0$$

für beliebiges n und $0 \leqq 2l < n$,

$$(9.6)\qquad \frac{1}{2}\chi = \sum_{h=0}^{m} (-1)^h\, a_{2h+1}\,\alpha^{2h} \quad \text{für} \quad n = 2m.$$

Satz 12: *Für die metrisch-simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer geschlossenen Clifford-Kleinschen Raumform $\mathfrak{R}^n$ gerader Dimension $n = 2m$ gilt:*

$$(9.7)\qquad -k^m\,\Omega_{2m} + \sum_{h=0}^{m} (-1)^h\, a_{2h+1}\,\alpha^{2h} = 0 \qquad (\textit{für } n = 2m)$$

[6] Siehe z. B. [1], S. 214, 358.

(9.8) *insbesondere für* $k = 0$, $n = 2m$:

$$\alpha^0 + 2\sum_{h=1}^{m} (-1)^h a_{2h+1}\, \alpha^{2h} = 0$$

Für gerade Dimension $n = 2m$ besagen die Gleichungen (9.5) bis (9.8): Jede Anzahl α^ν mit *ungeradem* Dimensionsindex ν drückt sich linear durch sämtliche α^λ mit geradem Index $\lambda > \nu$ aus. Die Eulersche Charakteristik χ läßt sich aus sämtlichen α^λ mit geradem Index $\lambda \geqq 0$ berechnen.

Für $k \neq 0$ ergibt sich hieraus: Ω_{2m} läßt sich durch die α^ν mit geraden Indizes $\nu = 0, 2, \ldots, 2m$ berechnen.

Im euklidischen Fall $k = 0$ läßt sich eine Anzahl α^ν mit geradem Index ν durch die übrigen α^λ mit geraden Indizes λ ausdrücken.

Für ungerade Dimension $n = 2m + 1$ besagen die Gleichungen (9.5):

Jede Anzahl α^ν mir *geradem* Index ν läßt sich aus sämtlichen α^λ mit ungeraden Indizes $\lambda > \nu$ linear berechnen.

Satz 13: *Für jede metrisch-simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer n-Sphäre S^n gerader Dimension $n = 2m$ gilt:*

$$\sum_{h=1}^{m} (-1)^h a_{2h+1}\, \alpha^{2h} = 1\,. \tag{9.9}$$

Satz 14: *Für jede metrisch-simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer geschlossenen Clifford-Kleinschen Raumform $\mathfrak{R}^n$ gilt:*

im Falle gerader Dimension $n = 2m$:

$$\chi = 2\sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \beta_\nu\, \alpha^\nu, \tag{9.10}$$

worin die β_ν das System von Gleichungen (8.1) *(mit $\beta_{-1} = 1$) erfüllen, ferner*

$$\chi = \sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{1}{2^\nu}\, \alpha^\nu = 2\sum_{\nu=0}^{2m} (-1)^\nu \frac{1}{\nu+2}\, \alpha^\nu, \tag{9.11}$$

im Falle ungerader Dimension $n = 2m+1$:

$$\sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu b_\nu\, \alpha^\nu = 0, \tag{9.12}$$

worin die Koeffizienten b_ν durch (8.7) bestimmt sind, sowie

$$(9.13)\quad \left|\begin{array}{l} \alpha^0 + \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^\nu \nu \cdot \alpha^\nu = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{n} (-1)^\nu \cdot \frac{(\nu+1)}{2^\nu} \alpha^\nu = 0. \end{array}\right.$$

IV. Simpliziale Zerlegungen beliebiger geschlossener Mannigfaltigkeiten

10. Es erhebt sich die Hauptfrage, ob die in III. entwickelten Relationen der Sätze 11, 13, 14 auch unabhängig von jeglicher Metrik für jede simpliziale Zerlegung einer geschlossenen Mannigfaltigkeit gelten. Diese Frage läßt sich in der Tat bejahen.

Hierbei legen wir den Begriff der simplizialzerlegten n-dimensionalen Poincaréschen Mannigfaltigkeit zugrunde, wie er etwa bei Lefschetz [6a], VI. 5, S. 186, (als „Poincaré n-manifold") definiert ist: Es wird hiernach von der simplizialen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ verlangt, daß der „Außenrand"[7] des „Sternes"[8] $\mathfrak{St}(\mathfrak{S}^k)$ eines beliebigen $\mathfrak{S}^k \in \mathfrak{Z}$, $0 \leqq k \leqq n-1$ eine topologische S^{n-k-1} ist. Genauer gesagt, machen wir eigentlich nur von der Forderung Gebrauch, daß für ein beliebiges $\mathfrak{S}^k \in \mathfrak{Z}$, $0 \leqq k \leqq n-1$ mit *geradem* $n-k-1$ der „Außenrand" von $\mathfrak{St}(\mathfrak{S}^k)$ die Eulersche Charakteristik $\chi_0 = 2$ der S^{n-k-1} hat. Im Grunde genommen verwendet auch Poincaré ([11], § 17, S. 280) von der S^{n-k-1} nur die Eulersche Charakteristik (bei geradem und ungeradem $n-k-1$).[9]

---

[7] „*Außenrand*" von $\mathfrak{St}(\mathfrak{S}^k)$ (= „*linked complex*" von $\mathfrak{S}^k$ bei Lefschetz [6a], VI. 5, S. 186) heiße die Menge aller zu $\mathfrak{S}^k$ punktfremden $\mathfrak{s}^\lambda \in \mathfrak{Z}$, die die Eigenschaft haben, zusammen mit $\mathfrak{S}^k$ irgendein Simplex $\mathfrak{s}^\nu \in \mathfrak{St}(\mathfrak{S}^k)$ aufzuspannen.

[8] „*Stern*" $\mathfrak{St}(\mathfrak{S}^k)$ *eines* $\mathfrak{S}^k \in \mathfrak{Z}$ ist hierbei die Menge aller Simplizes $\mathfrak{s}^\nu \in \mathfrak{Z}$, $\nu \geqq k$, die $\mathfrak{s}^\nu$ als Seite enthalten; siehe hierzu etwa Poincaré [11], § 17, S. 280, Lefschetz [6a], III. 3, S. 89.

[9] Siehe auch die „χ-omogeneità" von M. Vaccaro, [15], [16], [10]).

Wir beweisen zunächst den

Satz 15:[10] *Für jede simpliziale Zerlegung einer topologischen n-Sphäre S^n gelten die Gleichungen:*

$$(10.1)\quad \alpha^{n-2l-1} + \sum_{h=0}^{l} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \binom{n-2l+2h+1}{2h+1} \alpha^{n-2l+2h} = 0$$

für beliebiges n und $0 \leqq 2l < n$, sowie

$$(10.2)\quad \sum_{h=0}^{m} (-1)^h a_{2h+1} \alpha^{2h} = 1 \qquad \text{für } n = 2m.$$

Man kann die Gleichung (10.2) aus der Gleichung (10.1) mit erhalten, wenn man dort $l = m$ setzt und außerdem $\alpha^{-1} = 1$ definiert, so daß wir insgesamt die Gleichung (10.1) für beliebiges n und für $0 \leqq 2l \leqq n$ zu beweisen haben.

Der Beweis verläuft analog zum Beweis in I. Wir zeigen:

(1) Wenn die Gleichung (10.1) gilt für ein bestimmtes l und für $n = 2l$, so folgt hieraus die Gültigkeit von (10.1) für dieses l und beliebiges $n > 2l$.

In der Tat ist dann

$$(10.3)\quad 1 + \sum_{h=0}^{l} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \alpha^{2h} = 0$$

richtig für alle simplizialen Zerlegungen einer topologischen $2l$-Sphäre. Wir betrachten dann für ein beliebiges Simplex $\mathfrak{s}^{n-2l-1}$ der Dimension $n-2l-1$ der simplizialen Zerlegung $\mathfrak{Z}$ von S^n den „Stern"[8] $\mathfrak{St}(\mathfrak{s}^{n-2l-1})$, der aus denjenigen Simplizes $\mathfrak{s}^n \in \mathfrak{Z}$ (samt zugehörigen Seitensimplizes) besteht, die $\mathfrak{s}^{n-2l-1}$ als Seitensimplex haben. Der „Außenrand"[7] dieses Sterns ist der simpliziale Komplex $\mathfrak{K}^{2l}$ einer $2l$-Sphäre S^{2l} und für diesen gilt:

$$(10.4)\quad 1 + \sum_{h=0}^{l} (-1)^{h+1} a_{2h+1} \beta^{2h} (\mathfrak{s}^{n-2l-1}) = 0$$

---

[10] Die Koeffizienten a_{2h+1} sind hier wie auch in den weiteren Ausführungen und Sätzen von 10. auf dieselbe Weise definiert wie in Satz 1, d. h., es ist

$$(10.2\,\mathrm{a})\quad \sum_{h=0}^{\infty} \frac{a_{2h+1}}{(2h+1)!} x^{2h+1} = \operatorname{tg} \frac{x}{2}.$$

wenn wir mit $\beta^{2h}(\mathfrak{s}^{n-2l-1})$ die Anzahl der $2h$-dimensionalen Simplizes aus $\mathfrak{K}^{2l}$ bezeichnen. Jedes Simplex $\mathfrak{s}^{\nu} \in \mathfrak{K}^{2l}$ hat $\nu+1$ Eckpunkte, diese bestimmen zusammen mit den $n-2l$ Eckpunkten von $\mathfrak{s}^{n-2l-1}$ als genaue Eckpunktmenge genau ein Simplex $\mathfrak{s}^{n-2l+\nu}$, und zwei verschiedene solcher $\mathfrak{s}^{\nu}$ bestimmen verschiedene $\mathfrak{s}^{n-2l+\nu}$. Also ist (10.5) $\beta^{\nu}(\mathfrak{s}^{n-2l-1})$ gleich der Anzahl $\alpha^{n-2l+\nu}(\mathfrak{s}^{n-2l-1})$ der Simplizes $\mathfrak{s}^{n-2l+\nu}$ aus $\mathfrak{St}(\mathfrak{s}^{n-2l-1})$. Daher gilt:

$$(10.6) \qquad 1+\sum_{h=0}^{l}(-1)^{h+1}a_{2h+1}\,\alpha^{n-2l+2h}(\mathfrak{s}^{n-2l-1})=0.$$

Wir summieren jetzt diese Gleichungen über alle $\mathfrak{s}^{n-2l-1} \in \mathfrak{Z}$ und bedenken dabei, daß

$$\sum_{\mathfrak{s}^{n-2l-1}} \alpha^{n-2l+2h}(\mathfrak{s}^{n-2l-1}) = N\cdot\alpha^{n-2l+2h}$$

ist, wobei N angibt, wieviel $(n-2l-1)$-dimensionale Seitensimplizes ein Simplex $\mathfrak{s}^{n-2l+2h}$ hat. Daher ist

$$N=\binom{n-2l+2h+1}{n-2l}=\binom{n-2l+2h+1}{2h+1},$$

also folgt dann (10.1) für dieses l und $n>2l$.

(2) Nun ist (10.1) trivialerweise richtig für $l=0$ und $n\geqq 0$ mit $a_1=\frac{1}{2}$, nämlich: $\alpha^{n-1}-\frac{1}{2}(n+1)\alpha^{n}=0$ (wobei wir noch $\alpha^0=2$ für $n=0$ definieren). Nehmen wir an, daß (10.1) bereits bewiesen ist für alle l mit $0\leqq l\leqq \lambda-1$ $(\lambda\geqq 1)$ und beliebige $n\geqq 2l$, so wollen wir jetzt zeigen, daß dann die Gleichung (10.1) für $l=\lambda$ und $n=2\lambda$ folgt. Wegen $\chi=2$ ist jetzt

(10.7)

$$1=\frac{1}{2}\sum_{\nu=-1}^{n-1}(-1)^{\nu+1}\alpha^{n-\nu-1}=-\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\alpha^{n-2j-1}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda}\alpha^{n-2j}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda-1}\sum_{h=0}^{j}(-1)^{h+1}a_{2h+1}\binom{2\lambda-2j+2h+1}{2h+1}\alpha^{n-2j+2h}+\frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\lambda}\alpha^{n-2j}.$$

Dies ist nach völlig analoger Umrechnung wie in (4.3) unter Benutzung der bereits bewiesenen Gleichung (4.4):

$$= \sum_{h=0}^{\lambda} (-1)^h a_{2h+1} \alpha^{2h},$$

womit Satz 15 bewiesen ist.[11]

Ebenso leicht folgt nun

Satz 16:[12] *Für jede simpliziale Zerlegung einer geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gelten die Gleichungen* (10.1) *mit* $0 \leqq 2l < n$. *Im Falle gerader Dimension* $n = 2m$ *ist*:

$$\chi = 2 \sum_{h=0}^{m} (-1)^h a_{2h+1} \alpha^{2h}. \tag{10.8}$$

Im Falle ungerader Dimension ist

$$\chi = \sum_{\lambda=0}^{n} (-1)^\lambda \alpha^\lambda = 0$$

eine Folgerelation der Gleichungen (10.1), $0 \leqq 2l < n$.

Der Beweis verläuft vollkommen analog zu dem von Satz 15, nur hat man am Anfang der Gleichungskette (10.7) $\frac{1}{2} \cdot \chi$ statt 1 zu schreiben. Auch das Verschwinden von χ infolge der Relationen (10.1) für ungerades n wird durch analoge Rechnungen wie beim Satz 6 bewiesen, wobei man nur immer ω_λ durch $\alpha^{n-\lambda-1}$ zu ersetzen hat. Genau so übertragen sich jetzt die Entwicklungen aus 8, und damit haben wir auch den Beweis für den folgenden

[11] Es sei besonders betont, daß bei unseren Überlegungen und Beweisen von der Orientierbarkeit der Mannigfaltigkeit kein Gebrauch gemacht wird, daß also sämtliche Sätze auch für nicht orientierte Mannigfaltigkeiten gelten. Siehe hierzu Tietze [14] und die dort S. 48 in Fußnote[13] zitierten Stellen bei Dyck und Poincaré, insbesondere Poincaré [11].

[12] Erst nach Fertigstellung dieser Abhandlung wurde ich von Herrn Heinz Hopf freundlicherweise auf die Untersuchungen von Herrn Michelangelo Vaccaro (Rom) aufmerksam gemacht, wofür ich ihm sehr zu Dank verpflichtet bin. Ebenso habe ich Herrn Vaccaro für seine daran anschließende briefliche Mitteilung und für die Möglichkeit, noch vor Erscheinen in einen Sonderabdruck seiner Arbeit [16] Einblick nehmen zu können, sehr zu danken. Soweit ich jedoch sehe, kommen die Hauptergebnisse der vorliegenden Arbeit und insbesondere die explizite Beziehung der Koeffizienten der obigen Gleichungen (10.1), (10.2), (10.8) zur Tangensreihe, wie sie durch die dortigen Darstellungen zusammen mit der Relation [10](10. 2a) gegeben ist, bei Vaccaro [15], [16] nicht vor.

Satz 17:[13] *Für jede simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer geschlossenen n-dimensionalen Mannigfaltigkeit gelten die Gleichungen* (9.10), (9.11), (9.12), 9.13) *mit den dortigen Festsetzungen über die Koeffizienten β_ν bzw. b_ν.*

Und schließlich ergibt sich trivialerweise aus der Poincaré-Hopfschen Formel und Satz 16, daß Satz 12 nicht bloß für jede metrisch-simpliziale Zerlegung, sondern überhaupt für jede (topologisch-) simpliziale Zerlegung gilt und damit die folgende Erweiterung des Satzes 12 ausgesprochen werden kann:

Satz 18: *Für jede (topologisch-) simpliziale Zerlegung $\mathfrak{Z}$ einer geschlossenen n-dimensionalen Clifford-Kleinschen Raumform gerader Dimension gilt die Gleichung* (9.7), *insbesondere im euklidischen Fall die Gleichung* (9.8).

Literatur

[1] P. Alexandroff–H. Hopf, Topologie, 1. Bd. = Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, Bd. XLV. Berlin 1935.

[2] J. J. Burckhardt, „Ludwig Schläfli", Verlag Birkhäuser, Basel, in der Reihe „Kurze Mathematiker-Biographien" als Beiheft 4 (Juli 1948) zur Zeitschrift „Elemente der Mathematik".

[3] H. S. M. Coxeter, The functions of Schläfli and Lobatschefskij, Quarterly J. Math., Oxford Series 6 (1935).

[3a] H. S. M. Coxeter, Non-Euclidean Geometry. Mathematical Expositions 2, Toronto 1947.

[4] H. Dörrie, Triumph der Mathematik (2. Aufl.) 1940, S. 64–68, Nr. 16, siehe auch die dortigen Hinweise auf André (C. R. 1879, J. de Math. 1881).

[5] F. Hirzebruch, Der Satz von Riemann-Roch in faisceau-theoretischer Formulierung, einige Anwendungen und offene Fragen. Vortrag auf dem Symposium on Algebraic Geometry. Amsterdam 1954.

[6] H. Hopf, Die curvatura integra Clifford-Kleinscher Raumformen. Nachr. Ges. d. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1925, S. 131–141.

[6a] S. Lefschetz, Introduction to Topology, Princeton Mathematical Series 11, Princeton (N. J.), 1949.

[13] Aus den Sätzen 2, 15 bis 17 lassen sich gewisse zahlentheoretische Eigenschaften der Anzahlen α^ν folgern, wie z. B., daß für jede simpliziale Zerlegung im Falle $n = 2m = 2^k - 2$ die Zahl $2\alpha^{m-1} + \alpha^{2m}$ durch 4 teilbar ist oder auch (aus dem letzten Ausdruck für χ in (9.11)) daß, wenn $n + 1$ eine Primzahl $p (> 2)$ ist, α^{n-1} durch diese Primzahl $p = n + 1$ teilbar sein muß, und anderes.

[7] (N. J. Lobatschefskij:) N. J. Lobatschefsky's Imaginäre Geometrie und Anwendung der imaginären Geometrie auf einige Integrale. Aus dem Russischen übersetzt und mit Anmerkungen herausgegeben von Heinrich Liebmann, Abhandlungen der Geschichte der Mathematischen Wissenschaften **19** (1904).

[7a] (N. J. Lobatschefskij:) Collection complète des œuvres géométriques de N. J. Lobatschefsky, Kazan 1886, insbesondere S. 608–610.

[8] P. F. Müller, Über Simplexinhalte in nichteuklidischen Räumen. Diss. Bonn 1954.

[9] E. Peschl–P. F. Müller, Über Simplexinhalte im hyperbolischen R_5. Erscheint demnächst im Archiv der Mathematik.

[10] J. Peters–J. Stein, Mathematische Tafeln = Anhang zum Bd. I von: J. Peters, Zehnstellige Logarithmen der Zahlen von 1 bis 100000, Berlin 1922.

[11] H. Poincaré, Analysis Situs, (Journal de l'École Polytechnique, t. 1, (1895), S. 1–121) = Œuvres de Henri Poincaré, VI, Paris 1953, insbesondere § 17, S. 280 ff.

[11a] H. Poincaré, Sur la généralisation d'un théorème élémentaire de géométrie. C. R. 1905, I.

[12] L. Schläfli, Theorie der vielfachen Kontinuität = Gesammelte Mathematische Abhandlungen Bd. I, Basel 1950, S. 167–389, insbesondere S. 240.
Das aus den Jahren 1850/52 stammende Originalmanuskript befindet sich in der Schweizerischen Landesbibliothek in Bern, es wurde 1901 als Bd. 38, I der Denkschriften der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft herausgegeben; siehe hierzu auch [2], S. 5 ff.

[13] H. Seifert–W. Threlfall, Lehrbuch der Topologie, Leipzig 1934.

[14] H. Tietze, Die topologischen Invarianten mehrdimensionaler Mannigfaltigkeiten. Monatshefte für Math. und Phys., 19, Wien 1908, S. 1–118, insbesondere S. 48, Fußnote[13].

[15] M. Vaccaro, Sulla caratteristica dei complessi simpliciali n-dimensionali χ-omogenei. Proceedings of the International Mathematical Congress Amsterdam, Sept. 1954 (Rend., vol. II, S. 261).

[16] M. Vaccaro, Sulla caratteristica dei complessi simpliciali χ-omogenei. Annali di Matematica pura ed applicata, Serie IV, Tomo XLI (1955), S. 1–20. (Im Erscheinen.)

[17] L. Saalschütz, Vorlesungen über die Bernoullischen Zahlen, ihren Zusammenhang mit den Secanten-Coefficienten und ihre wichtigeren Anwendungen. Berlin, 1893.