BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Extreme Derivierte von Zellenfunktionen in Booleschen σ-Algebren und ihre Integration

Von Klaus Krickeberg in Würzburg

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 1. Juli 1955

Einleitung

In jeder Theorie nicht integrierbarer, also auch nicht additiver Zellenfunktionen[1] tritt neben die Frage nach der Gültigkeit der „klassischen" Differentiationssätze, die das Burkillsche Integral einer integrierbaren Zellenfunktion als Integral ihrer Ableitung nach einem Maß μ darzustellen erlauben, die Frage nach einer Darstellung des oberen und unteren Integrals einer Zellenfunktion als Integral ihrer oberen und unteren Derivierten. Aussagen dieser Art über *abstrakte* Zellenfunktionen, also Zellenfunktionen in Räumen, in denen von vornherein keine Metrik, Topologie oder ähnliche Struktur vorliegt, werden ausführlich in [11],[2] Nr. 10 behandelt. Dort kommen jedoch ausschließlich punktuelle extreme Derivierte vor, zu deren Bildung die Konvergenz der derivierenden Mengenfamilien definiert ist durch das Kleinwerden ihrer Maße, und die oberen und unteren Integrale der Zellenfunktionen werden dementsprechend mit der Feinheit nach der μ-Norm[3] konstruiert. Eine unmittelbare Übertragung jener Ergebnisse auf andere Feinheitsrelationen, vor allem auf die durch $\sqsubset$ bezeichnete Feinheit der Einteilung nach,[3] die wegen ihrer Einfachheit und ihrer rein mengentheoretischen Beschreibung in der Theorie der *Integration* von Zellenfunktionen eine ausgezeichnete Rolle spielt, scheitert daran, daß diese Feinheitsrelationen, im Gegensatz zur Feinheit nach der μ-Norm, im allgemeinen keine abzählbare Basis haben, so daß die μ-Meßbar-

[1] In älterer Terminologie: verallgemeinerte Intervallfunktionen.

[2] Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit hin.

[3] Zu deren Definition vgl. in der vorliegenden Arbeit S. 237.

keit der punktuellen extremen Derivierten von Zellenfunktionen, die sie erzeugen, nicht feststeht.[1] In der vorliegenden Arbeit werden daher nicht *punktuelle*, sondern *globale* extreme Derivierte verwendet, deren Definition sich auf die Vollständigkeit des Verbandes der Klassen meßbarer, fast überall gleicher reeller Funktionen stützt und die von vornherein meßbar sind. Bei ihrer Untersuchung stellte sich heraus, daß man, anders als in der Theorie der punktuellen Derivierten, überall mit Vitalischen Bedingungen auskommt, in denen nur Überdeckungen meßbarer Mengen auftreten, und diese Feststellung erlaubte es, die ganze Theorie „somatisch" im Sinne von Carathéodory aufzubauen, also Zellenfunktionen über einer beliebigen Booleschen σ-Algebra $\mathfrak{B}$ zu betrachten.

Der § 2 behandelt dementsprechend Bedingungen, unter denen die Gleichung (2.4) gilt. Zugrunde gelegt wird ein System Θ von disjunkten, endlichen oder abzählbaren Zerlegungen des Einselementes E von $\mathfrak{B}$ in Zellen, ein strikt positives Maß μ, das nicht endlich, sondern nur σ-endlich zu sein braucht, und eine „Feinheitsrelation" $\ll$ in Θ, mit der Θ nach rechts filtrieren soll, die aber im übrigen völlig beliebig sein kann. Da Θ durchaus auch nur aus endlichen Zerlegungen bestehen darf, werden die Integrale vom Burkillschen und vom Burkill-Kolmogoroffschen Typ gleichzeitig in derselben Theorie behandelt. Θ braucht ferner, anders als in [11], nicht *alle* endlichen disjunkten Zerlegungen von E in Zellen zu enthalten, und dieser allgemeinere Standpunkt läßt zum erstenmal einen grundlegenden Unterschied zwischen solchen Vitalischen Bedingungen (V, vgl. S. 244), die die Differentiationssätze über extreme Integrale und extreme Derivierte sichern, und den bisher betrachteten Vitalischen Bedingungen (etwa vom Typ V_0, vgl. S. 261), die in den Differentiationssätzen über totalstetige additive Zellenfunktionen eine Rolle spielen, hervortreten. Das Axiom V verlangt, daß sich die fraglichen disjunkten Überdeckungen zu beliebig feinen Zerlegungen ergänzen lassen, während V_0 eine solche Forderung nicht enthält. Zwar läßt sich V unter den sonst üblichen Voraussetzungen der Theorie der Zellenfunktionen aus V_0 ableiten, doch das

[1] Vgl. die sehr allgemeinen Kriterien für die Meßbarkeit punktueller extremer Derivierter in [13].

Beispiel der de la Vallée-Poussinschen Netze in § 5 zeigt, daß $\boldsymbol{V}$ durchaus nicht ohne weiteres aus $\boldsymbol{V}_0$ folgt. In einem solchen Netz gelten die klassischen Differentiationssätze über *additive* totalstetige Zellenfunktionen, aber nicht die Formeln für die Integration extremer Derivierter *beliebiger* totalstetiger Zellenfunktionen.

Um die Bedeutung der einzelnen der Gleichung (2.4) zugrunde gelegten Voraussetzungen möglichst klar erscheinen zu lassen, wurde (2.4) in die beiden Ungleichungen (2.6) und (2.9) zerlegt. Aus dem gleichen Grunde wurden die Begriffe „totalstetig“ und „von beschränkter Variation“, die übrigens noch von der Feinheitsrelation abhängen, in je zwei Begriffe „nach oben“ und „nach unten“ aufgespalten. Es zeigte sich, daß die Ungleichung (2.6) gar nichts mit Vitalischen Bedingungen zu tun hat. Die Bedingung $\boldsymbol{V}$ ist notwendig für die Gültigkeit von (2.9). Sie reicht aber auch hin im Fall der Feinheit der *Einteilung* nach. Dies ist insofern bemerkenswert, als $\boldsymbol{V}$ nur eine starke Vitalische Bedingung vom „reduzierten“ Typ darstellt, in der die disjunkten, A „bis auf ε“ überdeckenden Zellensysteme beliebig weit über A hinausragen dürfen, während in [11] noch eine *volle* starke Vitalische Eigenschaft benötigt wurde. In der Tat hängt die Möglichkeit, auch eine beliebig genaue Approximation von A „von oben her“ durch disjunkte Zellensysteme zu erhalten, nicht mit den betreffenden Differentiationssätzen zusammen, sondern sie ist charakteristisch dafür, daß $\mathfrak{B}$ die *kleinste* Boolesche σ-Algebra über dem System aller Zellen darstellt (vgl. [21]).

Die in § 3 gegebene Antwort auf die Frage nach der Gültigkeit der Ungleichung (2.9) mit extremen Integralen und Derivierten hinsichtlich einer *von* $\sqsubset$ *verschiedenen* Feinheitsrelation $\ll$ besteht in Bedingungen ($\boldsymbol{R}$, S. 252 und $\boldsymbol{U}$, S. 255), die notwendig und hinreichend für die Gleichheit der extremen Integrale totalstetiger oder der Derivierten beliebiger Zellenfunktionen hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ sind. Dabei stellt sich heraus, daß es sich um Verallgemeinerungen und „somatische Formulierungen“ gewisser Bedingungen handelt, die in [11] als zusätzliche Voraussetzungen überall auftreten und die in konkreten, früher behandelten Fällen stets erfüllt sind. Diese Bedingungen sind ferner charakteristisch für die Äquivalenz der Begriffe „feine Überdeckung hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$" und ziehen die Gleichwertigkeit der Vitalischen Bedingung hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ nach sich. Der § 3 enthält schließlich noch unter gewissen Voraussetzungen mögliche Umformungen von Überdeckungs- und Vitalischen Bedingungen, die sie den sonst üblichen zu vergleichen gestatten, insbesondere im Fall der Feinheit der Einteilung oder der μ-Norm nach.

Natürlich lassen sich die in §§ 2–3 angestellten Überlegungen, die sich auf eine abstrakte Boolesche σ-Algebra mit strikt positivem Maß beziehen, in ganz ähnlicher Weise bei einer Booleschen σ-Mengenalgebra durchführen, wie in § 4 skizziert. Im Fall einer Mengenalgebra haben aber neben den globalen auch die punktuellen extremen Derivierten einen Sinn, jedenfalls wenn $\ll$ eine abzählbare Basis hat, und in § 4 finden sich denn auch Untersuchungen über Beziehungen zwischen beiden. Sie ergeben insbesondere, daß die Vitalische Bedingung in der sonst üblichen Gestalt ($\boldsymbol{V}^*$, vgl. S. 267), in der auch Überdeckungen nicht meßbarer Mengen auftreten, in zwei Bedingungen zerfällt, von denen die eine, $\boldsymbol{L}$, notwendig und hinreichend für die Gleichheit von globalen und punktuellen Derivierten fast überall ist, während die andere, eben die Bedingung $\boldsymbol{V}$, die Differentiationssätze über die globalen Derivierten sichert. Zusammen mit den Ergebnissen des § 3 zeigt dies, daß die bisher bekannten Sätze über die Darstellung extremer Integrale totalstetiger Zellenfunktionen als Integrale ihrer extremen Derivierten Spezialfälle der in § 2 gegebenen sind: in der Tat sind unter den bisher üblichen Voraussetzungen die punktuellen Derivierten hinsichtlich der betrachteten Feinheitsrelation $\ll$, meist der μ-Norm, in Wirklichkeit gleich den globalen hinsichtlich $\sqsubset$, und auch die extremen Integrale totalstetiger Zellenfunktionen und die fraglichen Vitalischen Bedingungen stimmen hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ überein.

Als Beispiel wird in § 5 vor allem das System Θ *aller* Zerlegungen von E in endlich oder abzählbar viele paarweise fremde Elemente endlichen positiven Maßes mit $\sqsubset$ als Feinheitsrelation behandelt, das ja bei der Konstruktion des Lebesgueschen Integrals und der oberen und unteren Lebesgue-Darbouxschen Integrale von Punktfunktionen auftritt.

Die Theorie der Zellenfunktionen unterscheidet sich von der Theorie der Differentiation abzählbar additiver Mengenfunktionen, wie sie in abstrakter Form auf de Possel zurückgeht (vgl. die Darstellung in [11], Nr. 9), durch das Vorliegen einer globalen Struktur in Gestalt der Zerlegungen des ganzen Raumes E. Die punktuellen derivierenden Mengenfamilien werden, soweit überhaupt sinnvoll, durch diese Zerlegungen induziert, und ihre Konvergenz wird durch die Feinheit der *vollen* Zerlegungen beschrieben. Die Theorie der Zellenfunktionen verhält sich zu jener anderen ähnlich wie die Theorie der uniformen zu der der allgemeinen topologischen Räume. Der Gebrauch der globalen Derivierten erscheint daher der Sache besonders angemessen. Das Axiom V läßt sich, im Gegensatz zu V_0, überhaupt nur mit Hilfe des Systems der Zerlegungen von ganz E formulieren. Die vorliegende Arbeit operiert nun auch mit einer *Methode*, die diesem globalen Charakter der Betrachtungen von vornherein gerecht wird. Es treten nämlich ausschließlich Burkill-Kolmogoroffsche Integrale über den *ganzen* Raum E auf, in den von E verschiedenen Zellen brauchen überhaupt keine Systeme von Zerlegungen mit Feinheitsrelationen vorzuliegen, und es ist nicht, wie bisher, nötig, die als Mengenfunktion aufgefaßten über Zellen erstreckten Integrale von Zellenfunktionen zu Mengenfunktionen in $\mathfrak{B}$ zu erweitern und dann Sätze aus der Theorie der Differentiation abzählbar additiver Mengenfunktionen anzuwenden. Die Gleichung (2.4) wird vielmehr direkt zurückgeführt auf die Vertauschung der Operation $\overline{\lim}$ mit der Integration nach einem strikt positiven Maß, und zwar bei einer im allgemeinen überabzählbaren Moore-Smithschen Folge von Ortsfunktionen (vgl. S. 225). Der § 1 enthält eine Theorie solcher Vertauschungen. Die bekannten Sätze von Lebesgue, Vitali, B. Levi und Fatou über die Vertauschung von Integration und Grenzübergang werden auf den Fall einer überabzählbaren Funktionenfolge übertragen. Die Sätze 1.4 und 1.5 dürften auch bei abzählbaren Folgen noch nicht bekannt gewesen sein.

Ein Teil der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit wurde ohne Beweise in einer kurzen Note [17] angezeigt. Herr Chr. Pauc danke ich sehr herzlich für viele wertvolle Anregungen und nützliche Kritik vor und während der Niederschrift beider Arbeiten.

§ 1. Vertauschung von Integration und Grenzübergang

$\mathfrak{B}$ sei eine *Boolesche σ-Algebra*, E das *Eins*- und O das *Nullelement* von $\mathfrak{B}$. Wir bezeichnen die *Ordnung*[1] in $\mathfrak{B}$ durch $\leq$ und die Bildung des *Infimums* durch $\frown$ und die des *Supremums* durch $\smile$. Daneben gebrauchen wir, der Auffassung von $\mathfrak{B}$ als Ring entsprechend, die einfachere Schreibweise AB statt $A \frown B$. Der Begriff einer in E erklärten *$\mathfrak{B}$-meßbaren reellen* (endlichen oder unendlichen) *Funktion*, mit dem wir operieren werden, mag nach Belieben mit Hilfe des Begriffs der Carathéodoryschen *Ortsfunktion* über $\mathfrak{B}$, vgl. [6], oder des Begriffs der *Spektralschar* (Zerlegung der Einheit) in $\mathfrak{B}$, vgl. [24] S. 382–383, oder [19] S. 164–173, erklärt sein. Das System aller solcher $\mathfrak{B}$-meßbarer Funktionen über E heiße $\mathfrak{F}$. Seine Eigenschaften sind z. B. in den Arbeiten [19] und [9] zusammengestellt worden und können im übrigen größtenteils unmittelbar dem Loomisschen Satz [18] entnommen werden, nach dem $\mathfrak{B}$ isomorph einer Quotientenalgebra $\tilde{\mathfrak{B}}/\tilde{\mathfrak{N}}$ einer Booleschen σ-Mengenalgebra $\tilde{\mathfrak{B}}$ nach einem σ-Mengenideal $\tilde{\mathfrak{N}}$ ist und infolgedessen $\mathfrak{F}$ in seiner linearen und Ordnungsstruktur isomorph dem Raum der Klassen mod $\tilde{\mathfrak{N}}$ gleicher, $\tilde{\mathfrak{B}}$-meßbarer und in der größten Menge aus $\tilde{\mathfrak{B}}$ erklärter reeller Funktionen. Für die wie üblich definierte Ordnung in $\mathfrak{F}$ und die daraus entspringende Bildung des Infimums und des Supremums sollen dieselben Zeichen $\leq$, $\frown$ und $\smile$ verwendet werden wie in $\mathfrak{B}$. Dann und nur dann ist $\mathfrak{F}$ *vollständig* im verbandstheoretischen Sinne, wenn $\mathfrak{B}$ es ist ([9] S. 41). Schließlich wollen wir auch für die Bildung der *unteren* und *oberen Grenze* von Zahlenmengen die Zeichen $\frown$ und $\smile$ gebrauchen.

Eine Gleichung der Gestalt „$f = g\,[A]$" mit $f, g \in \mathfrak{F}$ und $A \in \mathfrak{B}$ soll ausdrücken, daß die Einschränkungen von f und g auf A einander gleich sind; entsprechend wären Ungleichungen wie $f \leq g\,[A]$ oder $f < g\,[A]$ aufzufassen. Insbesondere besagt

[1] Bei ordnungstheoretischen Begriffen und Aussagen beziehen wir uns auf [2], wo es übrigens „teilweise Ordnung" statt „Ordnung" heißt.

$f = g\,[E]$ dasselbe wie $f = g$ usw. Vermöge der erwähnten Darstellung der $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen durch Klassen von Punktfunktionen bedeutet z. B. $f < g[A]$, daß je zwei Repräsentanten $\tilde{f}$ und $\tilde{g}$ von f und g die Ungleichung $\tilde{f}(x) < \tilde{g}(x)$ mod $\tilde{\mathfrak{N}}$ in jedem Repräsentanten $\tilde{A}$ von A erfüllen. Hiervon ist die Aussage „$f \leq g[A]$, aber nicht $f = g[A]$" wohl zu unterscheiden. $f \not\leq g[A]$ und $f \neq g[A]$ seien jedoch die Negationen von $f \leq g[A]$ und $f = g[A]$.

Wir bedienen uns im folgenden auch der üblichen Abkürzungen der Gestalt $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f \leq \lambda\}$ usw., wobei λ eine reelle Zahl bedeute. Vermöge der Darstellung von $\mathfrak{B}$ und der $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen wäre z. B. $\{f < g\}$ die Klasse der Mengen, die sich von $\{x : f(x) < g(x)\}$ nur um eine Menge aus $\tilde{\mathfrak{N}}$ unterscheiden. $\{f \leq \lambda\}$ als Funktion von λ ist in [24] die f definierende Spektralschar.

Wir werden hinfort stets mit einem ein für allemal festgelegten *strikt positiven σ-endlichen Maß* über $\mathfrak{B}$ operieren, d. h. einer in $\mathfrak{B}$ definierten, σ-endlichen und abzählbar additiven reellen Funktion μ, bei der $\mu(A) > 0$ für jedes von O verschiedene Element A aus $\mathfrak{B}$ gilt.[1] Die Existenz eines derartigen Maßes allein zieht bekanntlich die *Vollständigkeit* von $\mathfrak{B}$ nach sich, und zu jeder Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ gibt es eine abzählbare[2] Teilmenge $\mathfrak{C}$ von $\mathfrak{A}$ mit $\bigwedge \mathfrak{A} = \bigwedge \mathfrak{C}$ und $\bigvee \mathfrak{A} = \bigvee \mathfrak{C}$ ([24] S. 380). Die Begriffe der *Integrierbarkeit* und des *Integrals* einer Funktion f aus $\mathfrak{F}$ sollen stets im üblichen, Radonschen Sinne aufgefaßt werden; ist $\int_E f\,d\mu$ endlich, so nennen wir f *summierbar* über E hinsichtlich μ.

Satz 1.1. *Jede Teilmenge $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ enthält eine abzählbare Menge $\mathfrak{E}$ mit $\bigwedge \mathfrak{G} = \bigwedge \mathfrak{E}$ und $\bigvee \mathfrak{G} = \bigvee \mathfrak{E}$. Ist $\mathfrak{G}$ hinsichtlich $\leq$ nach rechts filtrierend (gerichtet),[3] jede Funktion aus $\mathfrak{G}$ integrierbar und $-\infty < \int_E f_0\,d\mu$ für wenigstens ein f_0 aus $\mathfrak{G}$, so wird auch $\bigvee \mathfrak{G}$ integrierbar und*

---

[1] Zur Theorie von Maßen auf einer Booleschen σ-Algebra vgl. neben [6] und [19] auch die Darstellung in [11].

[2] Mit „abzählbar" meinen wir im folgenden immer „endlich oder abzählbar".

[3] Vgl. z. B. [3] S. 36 oder [10] Nr. 6.1.5.

$$\int_E (\bigvee \mathfrak{G})\,d\mu = \bigvee_{f\in\mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu. \tag{1.1}$$

Unter analogen Voraussetzungen gilt die analoge Formel für $\bigwedge \mathfrak{G}$.

Beweis. 1. Die erste Behauptung folgt unmittelbar aus der Darstellung der $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen durch Spektralscharen. Ein Beweis der verallgemeinerten Beppo Levischen Formel (1.1), der sich auf die Vollständigkeit des mit der Metrik der Konvergenz im Mittel versehenen Raumes der summierbaren Funktionen stützt, findet sich für den Fall eines Radonschen Maßes in einem lokalkompakten Raum in [4] S. 137. Hier werde stattdessen ein Beweis skizziert, der sich direkt auf dem Beppo Levischen Satz über abzählbare Folgen aufbaut. Dieser Beweis liefert zugleich die erste Behauptung unter einschränkenden Voraussetzungen, von denen man sich jedoch leicht befreien kann.

2. Aus $-\infty < \int_E f_0\,d\mu$ und $f \leq \bigvee \mathfrak{G}$ für jedes f aus $\mathfrak{G}$ folgt zunächst die Existenz von $\int_E (\bigvee \mathfrak{G})\,d\mu$ und $-\infty < \bigvee_{f\in\mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu \leq \int_E (\bigvee \mathfrak{G})\,d\mu$. Wir können daher

$$-\infty < \bigvee_{f\in\mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu < +\infty \tag{1.2}$$

voraussetzen, da sonst nichts mehr zu beweisen bliebe. Ist dann $(h_n)_{n=1,2,\ldots}$ eine Folge aus $\mathfrak{G}$ mit $\lim_n \int_E h_n\,d\mu = \bigvee_{f\in\mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu$, setzen wir $g_1 = h_1$ und bestimmen sukzessive Funktionen g_n aus $\mathfrak{G}$ mit $g_n \geq g_{n-1} \smile h_n$, so haben wir eine monoton wachsende Folge (g_n) aus $\mathfrak{G}$ mit $\lim_n \int_E g_n\,d\mu = \bigvee_{f\in E} \int_E f\,d\mu$. Die Funktion $g = \lim_n g_n$ erfüllt daher nach dem Beppo-Levischen Satz die Gleichung

$$\int_E g\,d\mu = \bigvee_{f\in\mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu. \tag{1.3}$$

Bedeutet sodann f eine beliebige Funktion aus $\mathfrak{G}$ und wählen wir zunächst eine Funktion f_1 aus $\mathfrak{G}$ mit $f_1 \geq f \smile g_1$ und danach sukzessive Funktionen f_n aus $\mathfrak{G}$ mit $f_n \geq f_{n-1} \smile g_n$, so erhalten wir eine monoton wachsende Folge (f_n) aus $\mathfrak{G}$ mit $f \leq f_n$ und $g_n \leq f_n$, also

(1.4a) $f \leq \lim_n f_n$, (1.4b) $g \leq \lim_n f_n$.

Eine zweite Anwendung des Beppo-Levischen Satzes ergibt

$$\int_E (\lim_n f_n)\,d\mu = \lim_n \int_E f_n \; d\mu \leq \bigvee_{f \in \mathfrak{G}} \int_E f\,d\mu,$$

und somit gilt wegen (1.2), (1.3) und (1.4b):

$$-\infty < \int_E g\,d\mu = \int_E (\lim_n f_n)\,d\mu < +\infty.$$

Da μ strikt positiv ist, folgt hieraus und aus (1.4b) die Gleichung $g = \lim_n f_n$ und daher aus (1.4a) die Ungleichung $f \leq g$. Dies trifft aber auf jedes f aus $\mathfrak{G}$ zu, so daß auch $\bigvee \mathfrak{G} \leq g$, d. h. $\bigvee \mathfrak{G} = g$ wird. Aus (1.3) ergibt sich nun (1.1). Zugleich haben wir $\bigvee \mathfrak{G} = \bigvee \mathfrak{E}$ mit $\mathfrak{E} = \{g_1, g_2, \ldots\}$.

3. Der Beweis der Existenz einer abzählbaren Teilmenge $\mathfrak{E}$ von $\mathfrak{G}$ mit $\bigvee \mathfrak{G} = \bigvee \mathfrak{E}$ läßt sich nun bei beliebigem $\mathfrak{G}$ leicht auf Grund der beiden folgenden Bemerkungen bewerkstelligen: das System $\mathfrak{G}'$ aller Suprema endlicher Teilmengen von $\mathfrak{G}$ ist nach rechts filtrierend; das System $\mathfrak{G}''$ aller Funktionen der Gestalt $a \smile (b \frown f) = b \frown (a \smile f)$ mit $f \in \mathfrak{G}'$, wobei a und b zwei feste summierbare Funktionen mit $a \leq b$ bedeuten, besteht aus lauter summierbaren Funktionen und erfüllt überdies die Bedingung (1.2).

Es sei jetzt Θ eine hinsichtlich einer *transitiven* Relation $\ll$ *gerichtete (nach rechts filtrierende)*[1] nicht leere Menge. Wir nennen eine Teilmenge Δ von Θ *terminal*, wenn es ein Element τ aus Θ gibt, so daß Δ jedes Element σ mit $\tau \ll \sigma$ enthält. Eine Teilmenge von Θ heißt *konfinal*, wenn ihr Komplement in Θ nicht terminal ist, d. h. wenn sie mit jeder terminalen Menge einen nicht leeren Durchschnitt hat.

Zu jeder Moore-Smithschen Folge $(f_\sigma)_{\sigma \in \Theta}$ in $\mathfrak{F}$ mit Θ als Indexbereich lassen sich die Funktionen

$$\underline{\lim_\sigma}\, f_\sigma = \bigvee_{\tau \in \Theta} \bigwedge_{\tau \ll \sigma} f_\sigma \quad \text{und} \quad \overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma = \bigwedge_{\tau \in \Theta} \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$$

[1] Anders als in [3] werde $\ll$ hier lediglich als transitiv vorausgesetzt.

bilden. Beide hängen natürlich von den in der Bezeichnung nicht zum Ausdruck gebrachten Größen Θ und $\ll$ ab, ändern sich jedoch nicht, wenn wir von Θ zu einer terminalen Teilmenge Δ übergehen. Es ist stets $\underline{\lim}_{\sigma} f_\sigma \leq \overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma$. Gilt hier das Gleichheitszeichen, so bezeichnen wir die Folge (f_σ) als *konvergent* gegen die Funktion $\lim_{\sigma} f_\sigma = \underline{\lim}_{\sigma} f_\sigma = \overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma$. Dies tritt z. B. ein, wenn (f_σ) *monoton wächst*, d. h. wenn aus $\tau \ll \sigma$ folgt $f_\tau \leq f_\sigma$, und es ist dann $\lim_{\sigma} f_\sigma = \bigvee_{\sigma \in \Theta} f_\sigma$. Wir erhalten eine spezielle monoton wachsende Folge, wenn Θ, wie in Satz 1.1, eine hinsichtlich $\leq$ gerichtete Teilmenge $\mathfrak{G}$ von $\mathfrak{F}$ darstellt und wenn wir $\ll$ mit $\leq$ und f_σ mit σ identifizieren.

Aus $\overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma \leq \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$ folgt $\int_E (\overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma) d\mu \leq \int_E (\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma) d\mu$ für jedes τ aus Θ, also

$$(1.5) \qquad \int_E (\overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma)\, d\mu \leq \bigwedge_{\tau \in \Theta} \int_E (\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma)\, d\mu,$$

soweit die hier auftretenden Funktionen integrierbar sind. Da die Menge der Funktionen $g_\tau = \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$ hinsichtlich $\leq$ nach links filtriert, gilt in (1.5) nach Satz 1.1 sogar das Gleichheitszeichen, wenn $\int_E g_\tau\, d\mu < +\infty$ auf wenigstens ein τ zutrifft. Diese Bedingung allein zieht außerdem die Integrierbarkeit von $\overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma$ und von terminal vielen f_σ und g_τ nach sich. Da schließlich im Fall $\tau \ll \sigma$ gilt $f_\sigma \leq g_\tau$, d. h. $\int_E f_\sigma\, d\mu \leq \int_E g_\tau\, d\mu$, so wird $\overline{\lim}_{\sigma} \int_E f_\sigma\, d\mu \leq \int_E g_\tau\, d\mu$ für terminal viele τ, also $\overline{\lim}_{\sigma} \int_E f_\sigma\, d\mu \leq \bigwedge_{\tau \in \Theta} \int_E g_\sigma\, d\mu$. Damit haben wir das verallgemeinerte Fatousche Lemma:

Satz 1.2. *Ist* $\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$ *integrierbar und* $\int_E (\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma) d\mu < +\infty$ *für wenigstens ein* τ *aus* Θ, *so sind terminal viele* f_σ *und* $\overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma$ *integrierbar, und es gilt*

$$(1.6) \qquad \overline{\lim}_{\sigma} \int_E f_\sigma\, d\mu \leq \int_E (\overline{\lim}_{\sigma} f_\sigma)\, d\mu.$$

Unter der Voraussetzung $-\infty < \int_E (\bigwedge_{\tau \ll \sigma} f_\sigma) d\mu$ *gilt entsprechend*

$$(1.7)\qquad \int_E (\underline{\lim}_\sigma f_\sigma)\, d\mu \leq \underline{\lim}_\sigma \int_E f_\sigma\, d\mu.$$

Corollar (*Verallgemeinerter Lebesguescher Grenzwertsatz*). *Konvergiert die Folge* (f_σ) *und sind die Funktionen* $\bigwedge_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$ *und* $\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$ *für wenigstens ein* τ *summierbar, so sind auch terminal viele* f_σ *und* $\lim_\sigma f_\sigma$ *summierbar und*

$$(1.8)\qquad \lim_\sigma \int_E f_\sigma\, d\mu = \int_E (\lim_\sigma f_\sigma)\, d\mu.$$

Daß die der Ungleichung (1.6) zugrunde liegende Voraussetzung $\int_E g_\tau\, d\mu < +\infty$ nicht entbehrt werden kann, selbst wenn alle Funktionen g_τ integrierbar und alle f_σ und $\overline{\lim}_\sigma f_\sigma$ summierbar sind, ist schon von den gewöhnlichen abzählbaren Folgen her wohlbekannt. Wir werden (1.6) jedoch später auch noch unter schwächeren Voraussetzungen benötigen. Ihrer Formulierung dienen die folgenden Begriffe.

Es sei $(\varphi_\sigma)_{\sigma \in \Theta}$ eine Moore-Smithsche Folge in $\mathfrak{B}$ definierter, abzählbar additiver reeller Funktionen. Wir sagen, diese Folge sei *terminal gleichmäßig totalstetig nach oben* in bezug auf $\ll$, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ, ein Element H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ und eine in Θ terminale Menge Δ gibt, so daß aus $A \in \mathfrak{B}$, $\mu(AH) < \delta$ und $\sigma \in \Delta$ folgt $\varphi_\sigma(A) < \varepsilon$.[1] Ersetzen wir die letzte Ungleichung durch $-\varepsilon < \varphi_\sigma(A)$, so haben wir die Definition der terminal gleichmäßigen Totalstetigkeit nach unten. Terminal gleichmäßige Totalstetigkeit soll dasselbe bedeuten wie terminal gleichmäßige Totalstetigkeit sowohl nach oben als auch nach unten. Offenbar ist (φ_σ) dann und nur dann nach oben terminal gleichmäßig totalstetig, wenn die Folge der positiven Variationen der φ_σ terminal gleichmäßig totalstetig ist.

Es ist für spätere Anwendungen wichtig zu wissen, daß das Element H in unserer Definition noch gewissen Bedingungen unterworfen werden kann. Bildet z. B. $(H_k)_{k=1,2,\ldots}$ eine monoton wachsende Folge von Elementen endlichen Maßes aus

---

[1] Daß sich dieser Begriff beim Übergang zu einem anderen strikt positiven σ-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}$ nicht ändert, interessiert uns hier nicht.

$\mathfrak{B}$ mit $\bigvee_k H_k = E$, so läßt sich H offenbar stets als ein, natürlich von ε abhängendes, Element dieser Folge bestimmen. Wählen wir nämlich k so, daß $\mu(H) \leq \mu(HH_k) + \frac{\delta}{2}$ wird, so folgt $\mu(AH) < \delta$ aus $\mu(AH_k) < \frac{\delta}{2}$. Im Fall $\mu(E) < +\infty$ können wir $H = E$ setzen, wodurch sich die Definition vereinfacht.

Der Begriff der terminal gleichmäßigen Totalstetigkeit der Folge $(\varphi_\sigma)_{\sigma \in \Theta}$ nach oben, unten oder schlechthin hängt durchaus von der transitiven Relation $\ll$ in Θ ab. Die Folge (φ_σ) wird jedoch sicher dann terminal gleichmäßig totalstetig nach oben hinsichtlich jeder solchen Relation $\ll$ in Θ, wenn die Menge aller φ_σ *gleichmäßig totalstetig nach oben*[1] ist, d. h. wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ und ein Element H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ gibt, so daß aus $A \in \mathfrak{B}$ und $\mu(AH) < \delta$ folgt $\varphi_\sigma(A) < \varepsilon$ bei beliebigem σ in Θ. Die Umkehrung dieser Feststellung ist i. a. nicht richtig, wohl aber dann, wenn (φ_σ) eine gewöhnliche abzählbare Folge, d. h. $\ll$ die natürliche Anordnung im Indexbereich $\Theta = \{1, 2, \ldots\}$ darstellt, und wenn außerdem $\varphi_\sigma(E) < +\infty$ $(\sigma = 1, 2, \ldots)$ gilt. In diesem Fall hat nämlich jede terminale Menge ein endliches Komplement in Θ, und ferner ist jedes endliche System abzählbar additiver in $\mathfrak{B}$ definierter Funktionen, die den Wert $+\infty$ nicht annehmen, von selbst gleichmäßig totalstetig nach oben, da μ strikt positiv ist.[2]

Satz 1.3. *Die Funktion $\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma$ sei integrierbar. Ferner seien terminal viele f_σ integrierbar und die Folge $(\int_A f_\sigma\, d\mu)_{\sigma \in \Theta}$ ihrer unbestimmten (d. h. als Funktionen von A in $\mathfrak{B}$ betrachteten) Integrale sei terminal gleichmäßig totalstetig nach oben. Dann gilt* (1.6), *und unter analogen Voraussetzungen gilt* (1.7).

Corollar. *Konvergiert die Folge (f_σ), sind die Funktionen f_σ und $\lim_\sigma f_\sigma$ summierbar und ist die Folge $(\int_A f_\sigma\, d\mu)$ der unbestimmten Integrale der f_σ terminal gleichmäßig totalstetig, so gilt* (1.8).

---

[1] Im Sinne von [23] S. 139 und [5] S. 28, wenn man von der hier vorgenommenen Aufspaltung „nach oben" und „nach unten" absieht.

[2] Vgl. [22] S. 188.

Beweis.[1] Wir betrachten zunächst den Fall $-\infty < \int\limits_E (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma)\, d\mu$. Zu beliebigem positivem ε gibt es von O verschiedene Elemente H_1 und H_2 aus $\mathfrak{B}$ endlichen Maßes, positive Zahlen δ_1 und δ_2 und eine in Θ terminale Menge Δ, so daß aus $\mu(AH_1) < \delta_1$ folgt

$$-\varepsilon < \int\limits_A (\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma)\, d\mu \tag{1.9}$$

und aus $\mu(AH_2) < \delta_2$ und $\sigma \in \Delta$ folgt

$$\int\limits_A f_\sigma\, d\mu < \varepsilon. \tag{1.10}$$

Wir setzen $H = H_1 \smile H_2$ und $\delta = \delta_1 \frown \delta_2$. Aus $\mu(AH) < \delta$ und $\sigma \in \Delta$ folgt dann sowohl (1.9) als auch (1.10).

Die Moore-Smithsche Folge $H_\tau = H\left\{g_\tau \leq \overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma + \frac{\varepsilon}{\mu(H)}\right\}$ in $\mathfrak{B}$ wächst monoton. Wegen $-\infty < \int\limits_E (\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma)\, d\mu$ ist $-\infty < \overline{\lim_\sigma} f_\sigma$ und deshalb $\bigvee_\tau H_\tau = H$. Aus dem Satz 1.2, auf die Folge der charakteristischen Funktionen der H_τ angewandt, folgt nun $\lim_\tau \mu(H_\tau) = \mu(H)$. Daher läßt sich τ so wählen, daß $A = E - H_\tau$ die Ungleichung $\mu(AH) < \delta$ erfüllt. Es gelten dann (1.9) und (1.10) für jedes σ aus Δ, ferner im Fall $\tau \ll \sigma$ auch noch $f_\sigma \leq g_\tau$, also nach Definition von H_τ:

$$\begin{aligned}
\int\limits_E f_\sigma d\mu &= \int\limits_{H_\tau} f_\sigma\, d\mu + \int\limits_A f_\sigma\, d\mu \leq \int\limits_{H_\tau} f_\sigma\, d\mu + \varepsilon \leq \int\limits_{H_\tau} g_\tau\, d\mu + \varepsilon \\
&\leq \int\limits_{H_\tau} (\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma)\, d\mu + 2\,\varepsilon \leq \int\limits_{H_\tau} (\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma)\, d\mu + \int\limits_A (\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma)\, d\mu + 3\,\varepsilon \\
&= \int\limits_E (\overline{\lim_\sigma}\, f_\sigma)\, d\mu + 3\,\varepsilon.
\end{aligned}$$

Dies also trifft, bei gegebenem ε, auf terminal viele σ zu, und damit ist (1.6) bewiesen.

---

[1] Zum Fall gewöhnlicher abzählbarer Folgen vgl. [22] S. 199, wo jedoch außerdem $\overline{\lim_\sigma} f_\sigma$ und $\underline{\lim_\sigma} f_\sigma$ beide als summierbar vorausgesetzt werden.

Wir verzichten jetzt auf die zusätzliche Annahme $-\infty < \int_E (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma) d\mu$. Stattdessen können wir $\int_E (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma)\, d\mu < +\infty$ voraussetzen, da die Ungleichung (1.6) sonst trivial ist. Infolge der σ-Endlichkeit von μ läßt sich eine Folge $(g_n)_{n=1,2,\ldots}$ von $\mathfrak{B}$-meßbaren über E summierbaren Funktionen mit den folgenden Eigenschaften konstruieren: $-\infty < g_n < 0$, $g_{n+1} \leq g_n$, $\lim_n g_n = -\infty$. Wir setzen $f_{\sigma n} = f_\sigma \smile g_n$, so daß $\overline{\lim_\sigma} f_{\sigma n} = (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma) \smile g_n$. Die $f_{\sigma n}$ sind integrierbar und $\overline{\lim_\sigma} f_{\sigma n}$ ist summierbar. Wegen $g_n < 0$ ist bei festem n die Folge der unbestimmten Integrale der $f_{\sigma n}$ terminal gleichmäßig totalstetig nach oben. Aus $f_\sigma \leq f_{\sigma n}$ und dem schon Bewiesenen folgt also $\overline{\lim_\sigma} \int_E f_\sigma\, d\mu \leq \overline{\lim_\sigma} \int_E f_{\sigma n}\, d\mu \leq \int_E (\overline{\lim_\sigma} f_{\sigma n})\, d\mu$. Da die Folge $(\overline{\lim_\sigma} f_{\sigma n})_n$ monoton fallend gegen $\overline{\lim_\sigma} f_\sigma$ konvergiert mit $\int_E (\overline{\lim_\sigma} f_{\sigma n})\, d\mu < +\infty$, so erhalten wir aus dem Beppo-Levischen Satz wiederum die Behauptung (1.6).

Auch beim eben bewiesenen Satz weiß man schon vom Fall der abzählbaren Folgen mit der gewöhnlichen Anordnung der Indizes her, daß sich keine der beiden Voraussetzungen einfach entbehren läßt.[1]

Wir wollen uns jetzt dem Problem zuwenden, wann die entgegengesetzten Ungleichungen zu (1.6) oder (1.7) gelten, insbesondere also dem Problem, wann in diesen Ungleichungen das Gleichheitszeichen steht. Es ist auch hier wieder sinnvoll, die Beziehungen zwischen den oberen Limites getrennt von denen zwischen den unteren Limites zu behandeln, denn es kann z. B. durchaus vorkommen, daß sowohl in (1.6) als auch in (1.7) das Gleichheitszeichen steht und die vier darin vorkommenden Zahlen auch noch endlich sind, ohne daß diese vier Zahlen allesamt einander gleich sind, d. h. ohne daß die Folgen (f_σ) und $(\int_E f_\sigma d\mu)$ konvergieren. Dies tritt z. B. dann ein, wenn $\mu(E) < +\infty$ ist, jedes f_σ konstant bleibt und die Folge dieser Konstanten beschränkt, aber nicht konvergent ist.

---

[1] Zur Unentbehrlichkeit der Annahme der Integrierbarkeit von $\overline{\lim_\sigma} f_\sigma$ siehe [8] S. 14.

Es wird sich als zweckmäßig erweisen, für zwei Aussagen über die Folge $(f_\sigma)_{\sigma \in \Theta}$ Abkürzungen einzuführen.

$\boldsymbol{F}_1$. *Alle Funktionen* f_σ *und* $g_\tau = \bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma$ *sind integrierbar, und zu jeder positiven Zahl* ε *und jedem* ϱ *aus* Θ *gibt es Indizes* ζ *und* ξ *aus* Θ *mit* $\varrho \ll \zeta \ll \xi$, *so daß*

$$(1.11) \qquad \int_E g_\zeta \, d\mu \leq \int_E f_\xi \, d\mu + \varepsilon.$$

$\boldsymbol{F}_2$. *Alle Funktionen* f_σ *sind integrierbar, und zu jeder positiven Zahl* ε *und jedem* ϱ *aus* Θ *gibt es einen Index* ζ *mit* $\varrho \ll \zeta$, *so daß zu jeder endlichen Menge* $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ *von Indizes* σ_k *mit* $\zeta \ll \sigma_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ *ein Index* ξ *mit* $\zeta \ll \xi$ *und*

$$(1.12) \qquad \int_E (f_{\sigma_1} \smile \cdots \smile f_{\sigma_p}) \, d\mu \leq \int_E f_\xi \, d\mu + \varepsilon$$

existiert.

Satz 1.4. *Aus* $\boldsymbol{F}_1$ *folgt* $\boldsymbol{F}_2$. *Ist* $-\infty < \int_E f_\sigma \, d\mu$ *für konfinal viele* σ, *so folgt* $\boldsymbol{F}_1$ *aus* $\boldsymbol{F}_2$.

Ist $\overline{\lim_\sigma} f_\sigma$ *integrierbar, so zieht jede der beiden folgenden Bedingungen die Ungleichung*

$$(1.13) \qquad \int_E (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma) \, d\mu \leq \overline{\lim_\sigma} \int_E f_\sigma \, d\mu$$

nach sich:

1. *Alle* f_σ *sind integrierbar, aber konfinal viele der* g_τ *nicht, oder es gilt* $\boldsymbol{F}_1$.
2. *Es gilt* $\boldsymbol{F}_2$ *und* $-\infty < \int_E f_\sigma \, d\mu$ *für konfinal viele* σ.

Beweis. Im Fall $\zeta \ll \sigma_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ gilt $f_{\sigma_1} \smile \cdots \smile f_{\sigma_p} \leq g_\zeta$, und daher folgt $\boldsymbol{F}_2$ unmittelbar aus $\boldsymbol{F}_1$. Es sei nun andererseits $\boldsymbol{F}_2$ erfüllt und $-\infty < \int_E f_\sigma \, d\mu$ für konfinal viele σ. Bei beliebigem τ aus Θ betrachten wir die Menge $\mathfrak{G}_\tau$ aller Suprema endlich vieler Funktionen f_σ mit $\tau \ll \sigma$. Offenbar ist $\mathfrak{G}_\tau$ hinsichtlich $\leq$ gerichtet und $-\infty < \int_E f \, d\mu$ für mindestens ein f aus $\mathfrak{G}_\tau$, ferner $g_\tau = \bigvee \mathfrak{G}_\tau$, und daher wird g_τ nach Satz 1.1 integrierbar mit

$$(1.14) \qquad \int_E g_\tau \, d\mu = \bigvee_{f \in \mathfrak{G}_\tau} \int_E f \, d\mu.$$

Die Bedingung F_2 besagt nun, daß bei beliebigem ϱ und ε ein Index ζ mit $\varrho \ll \zeta$ und

$$\bigvee_{f \in \mathfrak{G}_\zeta} \int_E f d\mu \leq \bigvee_{\zeta \ll \sigma} \int_E f_\sigma d\mu + \varepsilon$$

existiert, und hieraus, zusammen mit (1.14) im Fall $\tau = \zeta$, folgt unmittelbar F_1.

Um den Beweis des Satzes zu vollenden, brauchen wir jetzt nur noch zu zeigen, daß aus 1. die Ungleichung (1.13) folgt. Da im Fall $\int\limits_E (\overline{\lim\limits_\sigma} f_\sigma)\, d\mu = -\infty$ nichts mehr zu beweisen bliebe, können wir $-\infty < \int\limits_E (\overline{\lim\limits_\sigma} f_\sigma)\, d\mu$ voraussetzen. Wegen $\overline{\lim\limits_\sigma} f_\sigma \leq g_\tau$ für jedes τ sind dann alle Funktionen g_τ integrierbar, so daß die Annahme 1. die Bedingung F_1 nach sich zieht. Auf Grund der Ungleichung (1.5) ist jetzt (1.13) bewiesen, sobald wir

$$\bigwedge_{\tau \in \Theta} \int_E (\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma)\, d\mu \leq \overline{\lim_\sigma} \int_E f_\sigma d\mu \tag{1.15}$$

abgeleitet haben.

Zu gegebenen ϱ und ε seien ζ und ξ gemäß F_1 bestimmt. Aus (1.11) resultiert

$$\bigwedge_{\tau \in \Theta} \int_E (\bigvee_{\tau \ll \sigma} f_\sigma)\, d\mu \leq \int_E g_\zeta\, d\mu \leq \int_E f_\xi\, d\mu + \varepsilon \leq \bigvee_{\varrho \ll \sigma} \int_E f_\sigma\, d\mu + \varepsilon,$$

also, da dies bei beliebigem positivem ε gilt,

$$\bigwedge_{\tau \in \Theta} \int_E g_\tau\, d\mu \leq \bigvee_{\varrho \ll \sigma} \int_E f_\sigma\, d\mu.$$

Dies trifft auf jedes ϱ aus Θ zu, und damit haben wir (1.15).

Daß die Voraussetzung, es sei $-\infty < \int\limits_E f_\sigma\, d\mu$ für konfinal viele σ, bei der Ableitung von F_1 oder (1.13) aus F_2 nicht entbehrt werden kann, ist aus der Theorie des gewöhnlichen Beppo Levischen Grenzwertsatzes über abzählbare Folgen wohlbekannt, denn es gibt z. B. eine monoton wachsende Folge $(f_\sigma)_{\sigma=1,2,\ldots}$ integrierbarer Funktionen, so daß $\overline{\lim\limits_\sigma} f_\sigma = 0$, aber $\int\limits_E f_\sigma\, d\mu = -\infty$ für jedes σ gilt. Auch die Voraussetzung der Integrierbarkeit von $\overline{\lim\limits_\sigma} f_\sigma$ ist, wie einfache Beispiele zeigen, beim Beweis von

(1.13) unentbehrlich, d. h. folgt aus keiner der Voraussetzungen $\boldsymbol{F}_1$, $\boldsymbol{F}_2$, 1. und 2. Sind dagegen konfinal viele f_σ sogar summierbar, so sind alle g_τ integrierbar, und aus $\boldsymbol{F}_1$ oder $\boldsymbol{F}_2$ folgt dann auch die Integrierbarkeit von $\overline{\lim_\sigma} f_\sigma$.

Angesichts des Satzes 1.1 könnte man vermuten, zur Ableitung von $\boldsymbol{F}_1$ oder (1.13) genüge es, die Bedingung $\boldsymbol{F}_2$ nur mit zweielementigen statt mit beliebigen endlichen Indexmengen $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_p\}$ zu formulieren. Das folgende Beispiel widerlegt diese Vermutung. Es sei Θ_ε die Menge aller im Intervall $[0,1]$ erklärten reellen Funktionen σ der folgenden Gestalt: $\sigma(x) = 1$, wenn $a \leq x \leq a + \varepsilon$, und $\sigma(x) = 0$ sonst; dabei sei $0 < \varepsilon < 1$ und a durchlaufe alle Zahlen mit $0 \leq a < a + \varepsilon \leq 1$. Diese Mengen Θ_ε sind paarweise fremd. Θ bilde die geordnete Summe der durch die Identität geordneten Θ_ε, wobei die Indizes ε nach abnehmender Größe geordnet zu denken seien, d. h. Θ sei die Vereinigung aller Θ_ε, versehen mit der folgenden Ordnung: ist $\sigma \in \Theta_\varepsilon$ und $\tau \in \Theta_\delta$ und $\delta > \varepsilon$, so sei $\tau \ll \sigma$, aber nicht $\sigma \ll \tau$; ist hingegen $\delta = \varepsilon$, so sei $\tau \ll \sigma$ gleichbedeutend mit $\tau = \sigma$. Definieren wir jetzt f_σ im Fall $\sigma \in \Theta$ als die Klasse aller in $[0,1]$ erklärten und bezüglich des eindimensionalen Lebesgueschen Maßes fast überall mit σ übereinstimmenden Funktionen und entsprechend μ als das reduzierte Lebesguesche Maß, so wird $\overline{\lim_\sigma} \int_E f_\sigma \, d\mu = 0$ und $\int_E (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma) \, d\mu = 1$. Wählen wir aber bei gegebenem positivem ε und gegebenem ϱ aus Θ_δ das Element ζ irgendwie in $\Theta_{\frac{1}{2}\min(\delta,\varepsilon)}$, so gilt $\varrho \ll \zeta$, und aus $\zeta \ll \sigma_1$ und $\zeta \ll \sigma_2$ folgt $\int_E (f_{\sigma_1} \smile f_{\sigma_2}) \, d\mu \leq \varepsilon$, also erst recht $\int_E (f_{\sigma_1} \smile f_{\sigma_2}) \, d\mu \leq \int_E f_\xi \, d\mu + \varepsilon$ sogar für jedes ξ aus Θ.

Die Bedingungen $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ erscheinen deshalb besonders interessant, weil sie unter passenden Endlichkeitsvoraussetzungen auch notwendig für das Bestehen der Ungleichung (1.13) sind, im Gegensatz zur spezielleren Bedingung, die Folge (f_σ) wachse monoton mit $-\infty < \int_E f_\sigma \, d\mu$ für wenigstens ein σ.

Satz 1.5. *Die Funktion g_τ sei integrierbar mit*

$$\int_E g_\tau \, d\mu < +\infty \tag{1.16}$$

für wenigstens ein τ aus Θ, und es gelte

$$-\infty < \overline{\lim_{\sigma}} \int_E f_\sigma \, d\mu. \tag{1.17}$$

Dann sind die Aussagen

$$\int_E (\overline{\lim_{\sigma}} f_\sigma) \, d\mu \leq \overline{\lim_{\sigma}} \int_E f_\sigma \, d\mu, \tag{1.18}$$

$$\int_E (\overline{\lim_{\sigma}} f_\sigma) \, d\mu = \overline{\lim_{\sigma}} \int_E f_\sigma \, d\mu \tag{1.19}$$

einander und jeder der Bedingungen $\boldsymbol{F}_1$ *und* $\boldsymbol{F}_2$ *äquivalent.*

Beweis. Unter der Voraussetzung (1.16) sind terminal viele der Funktionen f_σ und g_τ integrierbar, und wegen (1.17) gilt $-\infty < \int_E f_\sigma \, d\mu$ für konfinal viele σ. Daher sind jetzt $\boldsymbol{F}_1$ und $\boldsymbol{F}_2$ nach Satz 1.4 äquivalent und implizieren (1.18). Ferner sind (1.18) und (1.19) nach Satz 1.2 gleichwertig. Somit brauchen wir nur noch zu zeigen, daß (1.18) die Bedingung $\boldsymbol{F}_2$ zur Folge hat.

Aus (1.16), (1.18) und Satz 1.1 erhalten wir, da die Menge der Funktionen g_τ nach links filtriert,

$$\bigwedge_\tau \int_E g_\tau \, d\mu = \int_E (\overline{\lim_{\sigma}} f_\sigma) \, d\mu \leq \overline{\lim_{\sigma}} \int_E f_\sigma \, d\mu.$$

Infolgedessen gibt es wegen (1.17) zu gegebenem positivem ε einen Index ζ mit

$$\int_E g_\zeta d\mu \leq \overline{\lim_{\sigma}} \int_E f_\sigma \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1.20}$$

Da die linke Seite dieser Ungleichung, als Funktion von ζ betrachtet, monoton fällt, können wir ζ bei gegebenem ϱ gleich so bestimmen, daß $\varrho \ll \zeta$ wird, und wegen (1.16) läßt sich auch noch $\int_E g_\zeta \, d\mu < +\infty$ erreichen. Aus (1.20) folgt insbesondere

$$\int_E g_\zeta \, d\mu \leq \bigvee_{\zeta \ll \sigma} \int_E f_\sigma \, d\mu + \frac{\varepsilon}{2}$$

und damit die Existenz eines Index ξ mit $\zeta \ll \xi$ und

$$\int_E g_\zeta \, d\mu \leq \int_E f_\xi \, d\mu + \varepsilon,$$

womit $\boldsymbol{F}_1$ bewiesen ist.

Die beiden folgenden Beispiele zeigen, daß bei der Ableitung von $\boldsymbol{F}_1$ oder $\boldsymbol{F}_2$ aus (1.19) weder die Voraussetzung (1.16) noch (1.17) entbehrt werden kann. Im ersten Beispiel sind (1.17) und (1.19) erfüllt, aber weder $\boldsymbol{F}_1$ noch $\boldsymbol{F}_2$. An Stelle von (1.16) trifft sogar noch eine abgeschwächte Bedingung zu, nämlich die Endlichkeit der Funktionen g_τ und des Integrals $\int\limits_E (\overline{\lim_\sigma} f_\sigma)\, d\mu$, und alle f_σ sind nicht negativ und summierbar.

Zur Konstruktion dieses Beispiels gehen wir, bei natürlichem n, von der Menge Θ_n aller im Intervall $]0,1[$ erklärten reellen Funktionen σ der folgenden Gestalt aus: $\sigma(x) = \frac{1}{n\alpha}$, wenn $0 < x \leq \alpha$, und $\sigma(x) = 0$, wenn $\alpha < x < 1$; dabei durchlaufe α alle Zahlen zwischen 0 und 1. Die Mengen Θ_n sind paarweise fremd. Θ sei die geordnete Summe der vollkommen geordneten Θ_n, d. h. ihre Vereinigung, versehen mit der folgenden Ordnung: Ist $\sigma \in \Theta_n$ und $\tau \in \Theta_m$, so sei $\tau \ll \sigma$ gleichbedeutend mit $m \leq n$. Wiederum bilde f_σ die Klasse aller fast überall mit σ übereinstimmenden Funktionen und μ das reduzierte Lebesguesche Maß. (1.17) folgt dann aus $0 \leq f_\sigma$. Ferner gilt, wenn $\sigma \in \Theta_n$,

$$\int\limits_E f_\sigma\, d\mu = \frac{1}{n}, \tag{1.21}$$

d. h. $\lim\limits_\sigma \int\limits_E f_\sigma\, d\mu = 0$. Da g_τ im Fall $\tau \in \Theta_n$ die Klasse der fast überall mit $\frac{1}{nx}$ zusammenfallenden Funktionen darstellt, erhalten wir auch $\lim\limits_\sigma f_\sigma = 0$, also (1.19), und ferner

$$\int\limits_E g_\tau\, d\mu = +\infty \tag{1.22}$$

für jedes τ. Wegen (1.21) und (1.22) gilt aber $\boldsymbol{F}_1$ nicht, also nach Satz 1.4 auch nicht $\boldsymbol{F}_2$.

Im folgenden, zweiten Beispiel sind (1.16) und (1.19) erfüllt, aber wiederum weder $\boldsymbol{F}_1$ noch $\boldsymbol{F}_2$. Die g_τ sind sogar summierbar. Wie im ersten Beispiel sind auch alle f_σ summierbar, $\mu(E)$ ist endlich, und es existieren $\lim\limits_\sigma \int\limits_E f_\sigma\, d\mu$ und $\lim\limits_\sigma f_\sigma$ mit $-\infty < \lim\limits_\sigma f_\sigma < +\infty$.

Es sei η die in $]0,1[$ folgendermaßen erklärte Funktion: $\eta(x) = -2^m$, wenn $\frac{1}{2^m} \leq x < \frac{1}{2^{m-1}}$, $(m = 1,2, \ldots)$. Bei natürlichem n sei Θ_n das System der Funktionen σ, zu denen es eine Zahl α mit $0 < \alpha < \alpha + \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^{n-1}}$ gibt, so daß

$$(1.23)\qquad \sigma(x) = \begin{cases} -2^n, & \text{wenn } 0 < x < \alpha, \\ -2^{n-1}, & \text{wenn } \alpha \leq x \leq \alpha + \frac{1}{2^n}, \\ -2^n, & \text{wenn } \alpha + \frac{1}{2^n} < x < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ \eta(x), & \text{wenn } \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1. \end{cases}$$

Bedeutet μ das reduzierte Lebesguesche Maß, Θ die geordnete Summe der vollkommen geordneten Θ_n und f_σ die durch σ bestimmte Funktionenklasse, so wird im Fall $\sigma \in \Theta_n$:

$$(1.24)\qquad \int_E f_\sigma \, d\mu = -n - \frac{1}{2}.$$

g_τ mit $\tau \in \Theta_n$ bildet die Klasse der Funktionen, die fast überall gleich der folgenden sind:

$$\bigvee_{\tau \ll \sigma} \sigma(x) = \begin{cases} -2^{n-1}, & \text{wenn } 0 < x < \frac{1}{2^{n-1}}, \\ \eta(x), & \text{wenn } \frac{1}{2^{n-1}} \leq x < 1. \end{cases}$$

Demnach ist

$$(1.25)\qquad \int_E g_\tau \, d\mu = -n.$$

Aus (1.24) folgt nun $\lim\limits_\sigma \int_E f_\sigma \, d\mu = -\infty$, und nach (1.23) wird $\lim\limits_\sigma f_\sigma$ die durch η bestimmte Funktionenklasse, d. h. $\int_E (\lim\limits_\sigma f_\sigma) \, d\mu = -\infty$, so daß (1.19) erfüllt ist. Die Gültigkeit von (1.16) ergibt sich aus (1.25). Wegen (1.24) und (1.25) kann jedoch $\boldsymbol{F}_1$ nicht erfüllt sein, also nach (1.24) und Satz 1.4 auch nicht $\boldsymbol{F}_2$.

§ 2. Integration und Differentiation von Zellenfunktionen

Wie im ersten Paragraphen sei $\mathfrak{B}$ eine Boolesche σ-Algebra mit dem Einselement E und dem Nullelement O und μ ein σ-endliches strikt positives Maß über $\mathfrak{B}$. Zur Unterscheidung von den verbandstheoretischen Relationen und Operationen $\leq$, $\wedge$ und $\vee$ in $\mathfrak{B}$ wollen wir die entsprechenden mengentheoretischen Relationen und Operationen durch die runden Zeichen $\subseteq$, $\cap$ und $\cup$ wiedergeben. Mit der *Differenz* $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{Q}$ zweier Mengen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Q}$ operieren wir nur unter der Annahme $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{P}$, ebenso wie wir die in $\mathfrak{B}$ gebildete Differenz $A - B$ nur im Fall $B \leq A$ betrachten, also nur in dem Fall, in dem sie mit der symmetrischen, algebraischen Differenz, wie sie der Auffassung von $\mathfrak{B}$ als Ring entspricht, übereinstimmt. Eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ heißt *disjunkt*, wenn ihre Elemente paarweise disjunkt sind, d. h. $AB = O$, wenn $A, B \in \mathfrak{A}$ und $A \neq B$. Wegen der σ-Endlichkeit von μ ist jede disjunkte Teilmenge von $\mathfrak{B}$ abzählbar.

Es liege nun eine nicht leere Teilmenge $\mathfrak{K}$ von $\mathfrak{B}$ vor, deren Elemente, *Zellen* genannt, sämtlich von O verschieden mit endlichem Maß seien. Unter einer *Zerlegung* von E wollen wir eine disjunkte Menge $\mathfrak{S}$ von Zellen mit $\bigvee \mathfrak{S} = E$ verstehen. Die Elemente von $\mathfrak{S}$ bezeichnen wir als die *Komponenten* von $\mathfrak{S}$; bildet Ω irgendein System von Zerlegungen, so wird demnach $\bigcup \Omega = \bigcup\limits_{\mathfrak{S} \in \Omega} \mathfrak{S}$ das System aller Komponenten aller Zerlegungen aus Ω.

Θ bedeute jetzt ein nicht leeres und hinsichtlich einer transitiven Relation $\ll$, der *Feinheitsrelation*, nach rechts filtrierendes System von Zerlegungen. Ein Beispiel für eine transitive Relation in Θ bekommen wir, wenn wir $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ definieren, sobald jede Komponente von $\mathfrak{S}$ Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ ist; wir nennen $\sqsubset$ die Relation der *Feinheit der Einteilung nach*. Hinreichend, jedoch nicht notwendig dafür, daß Θ hinsichtlich $\sqsubset$ nach rechts filtriert, ist, daß das Infimum zweier Zellen, soweit von O verschieden, stets wieder eine Zelle bildet. Wir bezeichnen die Zahl $\nu(\mathfrak{S}) = \bigvee\limits_{S \in \mathfrak{S}} \mu(S)$ als die *μ-Norm* einer Zerlegung $\mathfrak{S}$. Jedes nicht leere System Θ von Zerlegungen ist hinsichtlich der durch „$\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$ *genau dann, wenn* $\nu(\mathfrak{S}) \leq \nu(\mathfrak{T})$“ definierten „*Feinheit der μ-Norm nach*“ nach rechts filtrierend, und ebenso hinsichtlich der durch „$\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$ für jedes $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$“ definierten „*gröbsten*“ Feinheitsrelation.

Unter einer *Zellenfunktion* Ψ verstehen wir eine im Bereich $\mathfrak{K}$ aller Zellen erklärte, endliche oder unendliche reelle Funktion. Bedeutet $\mathfrak{J}$ ein disjunktes Zellensystem, so setzen wir $\Psi(\mathfrak{J}) = \sum_{J \in \mathfrak{J}} \Psi(J)$, wenn diese Reihe unbedingt konvergiert, d. h. wenn nicht gleichzeitig die Summe der Positivteile $\Psi^+(J)$ und die der Negativteile $\Psi^-(J)$ gleich $+\infty$ ist.[1] Unter der Annahme, $\Psi(\mathfrak{S})$ existiere für alle Zerlegungen $\mathfrak{S}$ einer hinsichtlich $\ll$ terminalen Teilmenge Δ von Θ, erklären wir das *untere* und das *obere* Burkill-Kolmogoroff*sche Integral* von Ψ über E durch $\underline{\int_E} \Psi = \underline{\lim}_{\mathfrak{S}} \Psi(\mathfrak{S})$ und $\overline{\int_E} \Psi = \overline{\lim}_{\mathfrak{S}} \Psi(\mathfrak{S})$, wobei $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$ hinsichtlich Θ und $\ll$ zu verstehen sind. Diese Integrale sind von der Wahl der terminalen Teilmenge Δ unabhängig, solange nur $\Psi(\mathfrak{S})$ für jedes $\mathfrak{S}$ aus Δ existiert. Sie hängen dagegen natürlich von Θ und $\ll$ ab, doch wollen wir darauf verzichten, diese Abhängigkeit in der Bezeichnung zum Ausdruck zu bringen, da wir stets nur ein festes System Θ von Zerlegungen von E und neben $\sqsubset$ nur *eine* abstrakte Feinheitsrelation $\ll$ betrachten. Die Integrale hinsichtlich $\sqsubset$ sollen zur Unterscheidung durch $'\underline{\int_E} \Psi$ und $'\overline{\int_E} \Psi$ bezeichnet und *Integrale der Einteilung nach* genannt werden. Bedeutet $\ll$ die Feinheit der μ-Norm nach, so sprechen wir sinngemäß von *Integralen der μ-Norm nach*.[2] Sind $\underline{\int_E} \Psi$ und $\overline{\int_E} \Psi$ vorhanden und einander gleich, so heißt ihr gemeinsamer Wert, geschrieben $\int_E \Psi = \lim_{\mathfrak{S}} \Psi(\mathfrak{S})$, das *Integral* von Ψ über E hinsichtlich Θ und $\ll$, und Ψ heißt *integrierbar* über E. Wir nennen Ψ *summierbar* über E, wenn $\int_E \Psi$ endlich ist.

Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Θ läßt sich die $\mathfrak{S}$-*Ableitung* von Ψ bilden, nämlich diejenige $\mathfrak{B}$-meßbare Funktion $D(\Psi, \mathfrak{S})$, die in jeder Komponente S von $\mathfrak{S}$ konstant mit dem Wert $\frac{\Psi(S)}{\mu(S)}$ ist. Wir nennen die Funktion $\underline{D}\Psi = \underline{\lim}_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$ die *untere Derivierte* von Ψ nach μ in bezug auf Θ und $\ll$ und definieren entsprechend die *obere Derivierte* $\bar{D}\Psi = \overline{\lim}_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$, ohne das Maß μ, das

---

[1] Es ist $a^+ = a \vee 0$ und $a^- = (-a) \vee 0$ bei beliebigem reellem a.

[2] Zur Integration von Zellenfunktionen hinsichtlich abstrakter Feinheitsrelationen vgl. z. B. [7] und [1] S. 298, und zur Integration der Einteilung oder der Norm nach vgl. [14] und [11] Nr. 10.

System Θ der Zerlegungen oder die Feinheitsrelation $\ll$ in die Bezeichnung aufzunehmen. Die *Derivierten der Einteilung nach*, d. h. bezüglich $\sqsubset$, werden sinngemäß durch $'\underline{D}\Psi$ und $'\bar{D}\Psi$ bezeichnet, wenn Θ hinsichtlich $\sqsubset$ nach rechts filtriert. Sind $\underline{D}\Psi$ und $\bar{D}\Psi$ gleich, so nennen wir Ψ *differenzierbar* und die Funktion $D\Psi = \lim\limits_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$ heißt die *Ableitung* von Ψ.

Offenbar ist $D(\Psi, \mathfrak{S})$ dann und nur dann integrierbar über E bezüglich μ, wenn $\Psi(\mathfrak{S})$ existiert, und in diesem Fall gilt

$$\int_E D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu = \Psi(\mathfrak{S}). \tag{2.1}$$

Infolgedessen können wir z. B. die Definition des oberen Integrals von Ψ auch so schreiben:

$$\bar{\int_E} \Psi = \overline{\lim_{\mathfrak{S}}} \int_E D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu. \tag{2.2}$$

Andererseits ist im Fall der Integrierbarkeit von $\bar{D}\Psi$:

$$\int_E \bar{D}\Psi\, d\mu = \int_E \left(\overline{\lim_{\mathfrak{S}}}\, D(\Psi, \mathfrak{S})\right) d\mu, \tag{2.3}$$

so daß also die Frage nach der Gültigkeit der Gleichung

$$\bar{\int_E} \Psi = \int_E \bar{D}\Psi\, d\mu \tag{2.4}$$

auf ein Problem der Vertauschung der Integration mit der Operation $\overline{\lim}$ hinausläuft.

Wir beginnen nun damit, die Ungleichung $\bar{\int\limits_E} \Psi \leq \int\limits_E \bar{D}\Psi$ zu behandeln, und erklären hierzu die folgenden, sich auf eine Zellenfunktion Ψ beziehenden Begriffe. Ψ heißt *von beschränkter Variation nach oben*, wenn $\bar{\int\limits_E} \Psi^+ < +\infty$, *von beschränkter Variation nach unten*, wenn $\bar{\int\limits_E} \Psi^- < +\infty$, und *von beschränkter Variation*, wenn beides der Fall ist, d. h. $\bar{\int\limits_E} |\Psi| < +\infty$. Natürlich hängen diese Begriffe von der Feinheitsrelation $\ll$ ab; ist $\ll$ mit $\sqsubset$ identisch, so sagen wir z. B., Ψ sei *von beschränkter Variation nach oben hinsichtlich der Feinheit der Einteilung*. Dann und nur dann ist Ψ von beschränkter Variation nach oben, wenn es eine terminale Menge Δ von Zerlegungen aus Θ gibt, so daß $\Psi(\mathfrak{Z})$ im Bereich aller in den Zerlegungen von Δ enthaltenen Zellensysteme $\mathfrak{Z}$ existiert und nach oben beschränkt bleibt. Daher ist Ψ dann und nur dann von beschränkter Variation nach oben hinsichtlich jeder Feinheitsrelation in Θ, wenn $\Psi(\mathfrak{Z})$ im Bereich aller Zellensysteme $\mathfrak{Z}$, die in einer beliebigen Zerlegung aus Θ enthalten sind, existiert und nach oben beschränkt bleibt; in diesem Fall wollen wir sagen, Ψ sei *universell* von beschränkter Variation nach oben. Die so gebildeten universellen Begriffe sind einfach die Begriffe hinsichtlich der gröbsten Feinheitsrelation. Ist Ψ von beschränkter Variation nach oben (hinsichtlich $\ll$), so sind $\overline{\int_E} \Psi$ und $\underline{\int_E} \Psi$ vorhanden und kleiner als $+\infty$. Entsprechende Aussagen treffen auf Zellenfunktionen von beschränkter Variation nach unten oder schlechthin zu.

Satz 2. 1. *Dann und nur dann ist Ψ von beschränkter Variation nach oben, wenn es in Θ eine terminale Menge Δ von Zerlegungen gibt, so daß alle $\mathfrak{S}$-Ableitungen $D(\Psi, \mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S} \in \Delta$ integrierbar sind und das System ihrer unbestimmten Integrale $\int_A D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu$ mit $A \in \mathfrak{B}$ gleichmäßig nach oben beschränkt ist.*

Beweis. Aus der Existenz der Integrale der $D(\Psi, \mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S} \in \Delta$ folgt die Existenz von $\Psi(\mathfrak{Z}) = \int_{\bigvee \mathfrak{Z}} D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu$, wenn $\mathfrak{Z} \subseteq \mathfrak{S}$, und aus dieser Gleichung ergibt sich weiter, daß Ψ von beschränkter Variation nach oben ist, sobald die unbestimmten Integrale der $D(\Psi, \mathfrak{S})$ gleichmäßig nach oben beschränkt sind. Es sei nun andererseits Ψ nach oben von beschränkter Variation und dementsprechend $\Psi^+(\mathfrak{S}) \leq a < +\infty$ für alle Zerlegungen einer gewissen terminalen Teilmenge Δ von Θ. Im Fall $\mathfrak{S} \in \Delta$ und $A \in \mathfrak{B}$ gilt dann die Ungleichung $\int_A D(\Psi, \mathfrak{S})^+\, d\mu$

$$= \sum_{S \in \mathfrak{S}} \frac{\Psi^+(S)}{\mu(S)} \mu(AS) \leq \sum_{S \in \mathfrak{S}} \Psi^+(S) = \Psi^+(\mathfrak{S}) \leq a < +\infty,$$

woraus die Existenz von $\int_A D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu$ und $\int_A D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu \leq a$ folgen.

Wir nennen Ψ *totalstetig nach oben*, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ, ein Element H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ und eine in Θ terminale Menge Δ gibt, so daß für jedes in einer Zerlegung aus Δ enthaltene Zellensystem $\mathfrak{Z}$ mit $\mu(H \bigvee \mathfrak{Z}) < \delta$ die Summe $\Psi(\mathfrak{Z})$ existiert und $\Psi(\mathfrak{Z}) < \varepsilon$ wird. Die Definition der

Totalstetigkeit nach unten oder *schlechthin* erhalten wir sinngemäß, wenn wir die Ungleichung $\Psi(\mathfrak{J}) < \varepsilon$ ersetzen durch $-\varepsilon < \Psi(\mathfrak{J})$ oder $|\Psi(\mathfrak{J})| < \varepsilon$.[1] Die Totalstetigkeit von Ψ nach oben ist offenbar gleichwertig der Totalstetigkeit von Ψ^+. Bedeutet $\mathfrak{Y}$ irgendeine Zerlegung aus Θ, so läßt sich H stets als ein Element der Gestalt $H = \bigvee \mathfrak{H}$ bestimmen, wobei $\mathfrak{H}$ eine endliche Teilmenge von $\mathfrak{Y}$ bildet, die natürlich von ε abhängt. Im Fall $\mu(E) < +\infty$ können wir $H = E$ setzen und erhalten so eine einfachere Definition.

Diese Begriffe hängen von der Feinheitsrelation $\ll$ ab. Die üblicherweise betrachtete Totalstetigkeit ist nichts anderes als die Totalstetigkeit hinsichtlich jeder Feinheitsrelation oder, was auf dasselbe hinausläuft, hinsichtlich der gröbsten Feinheitsrelation in Θ und soll hier als *universelle Totalstetigkeit* bezeichnet werden. Ψ heißt also z. B. universell totalstetig nach oben, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine positive Zahl δ und ein Element H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ gibt, so daß für jedes in irgendeiner Zerlegung aus Θ enthaltene Zellensystem $\mathfrak{J}$ mit $\mu(H \bigvee \mathfrak{J}) < \delta$ die Summe $\Psi(\mathfrak{J})$ existiert und $\Psi(\mathfrak{J}) < \varepsilon$ wird. Von *Totalstetigkeit der Feinheit der Einteilung nach* sprechen wir sinngemäß, wenn $\ll$ gleich $\sqsubset$ ist.

Satz 2.2. *Es seien terminal viele $\mathfrak{S}$-Ableitungen $D(\Psi, \mathfrak{S})$ integrierbar, und die Moore-Smithsche Folge $\left(\int\limits_A D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu\right)_{\mathfrak{S}\in\Theta}$ ihrer unbestimmten Integrale sei terminal gleichmäßig totalstetig nach oben hinsichtlich der Feinheitsrelation $\ll$ im Indexbereich Θ. Dann ist Ψ totalstetig nach oben. Ist andererseits Ψ totalstetig nach oben und von beschränkter Variation nach oben und $\mu(E) < +\infty$, so sind terminal viele $D(\Psi, \mathfrak{S})$ integrierbar, und die Folge ihrer unbestimmten Integrale ist terminal gleichmäßig totalstetig nach oben; die Annahme $\mu(E) < +\infty$ kann entbehrt werden, wenn $\ll$ mit $\sqsubset$ zusammenfällt.*

Beweis. Die erste Behauptung resultiert unmittelbar aus $\Psi(\mathfrak{J}) = \int\limits_{\bigvee\mathfrak{J}} D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu$, wenn $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \in \Theta$ und das Integral existiert. Zum Beweis der zweiten setzen wir $\mu(E) < +\infty$ voraus und wählen die positiven endlichen Zahlen α und δ und die

[1] Diese Begriffe hängen tatsächlich nicht vom Maß μ ab.

terminale Menge Δ bei gegebenem ε so, daß alle $D(\Psi, \mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S} \in \Delta$ integrierbar sind, $\Psi^+(\mathfrak{J}) \leq a$ für jedes in einer Zerlegung aus Δ enthaltene $\mathfrak{J}$ gilt und außerdem $\Psi^+(\mathfrak{J}) < \varepsilon$, falls $\mu(\bigvee \mathfrak{J}) < \delta$. Es sei nun $A \in \mathfrak{B}$, $\mathfrak{S} \in \Delta$ und $\mu(A) < \frac{\varepsilon\delta}{a}$. Dann wird

$$(2.5) \qquad \int_A D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu = \sum_{S \in \mathfrak{S}} \frac{\Psi(S)}{\mu(S)}\, \mu(AS).$$

Wir zerlegen $\mathfrak{S}$ in die Menge $\mathfrak{S}_1$ aller Zellen S aus $\mathfrak{S}$ mit $\frac{\mu(AS)}{\mu(S)} \leq \frac{\varepsilon}{a}$ und die Menge $\mathfrak{S}_2 = \mathfrak{S} \sim \mathfrak{S}_1$ der Zellen S aus $\mathfrak{S}$ mit $\mu(S) < \frac{a}{\varepsilon}\, \mu(AS)$. Wegen $\Psi^+(\mathfrak{S}_1) \leq a$ ist

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_1} \frac{\Psi(S)}{\mu(S)}\, \mu(AS) \leq \sum_{S \in \mathfrak{S}_1} \Psi^+(S)\, \frac{\mu(AS)}{\mu(S)} \leq \frac{\varepsilon}{a} \sum_{S \in \mathfrak{S}_1} \Psi^+(S) \leq \varepsilon.$$

Ferner gilt

$$\mu(\bigvee \mathfrak{S}_2) = \sum_{S \in \mathfrak{S}_2} \mu(S) < \frac{a}{\varepsilon} \sum_{S \in \mathfrak{S}_2} \mu(AS) \leq \frac{a}{\varepsilon}\, \mu(A) < \delta,$$

also

$$\sum_{S \in \mathfrak{S}_2} \frac{\Psi(S)}{\mu(S)}\, \mu(AS) \leq \sum_{S \in \mathfrak{S}_2} \Psi^+(S) = \Psi^+(\mathfrak{S}_2) < \varepsilon.$$

Aus (2.5) folgt nun $\int_A D(\Psi, \mathfrak{S})\, d\mu < 2\varepsilon$.

Ist $\mu(E) = +\infty$ und $\ll$ gleich $\sqsubset$, so verläuft der Beweis ganz ähnlich. Bei gegebenem positivem ε werden wieder a, δ und Δ und außerdem ein in einer Zerlegung $\mathfrak{Y}$ enthaltenes Zellensystem $\mathfrak{H}$ bestimmt, so daß $H = \bigvee \mathfrak{H}$ ein endliches Maß hat, $\Psi^+(\mathfrak{J}) \leq a$ gilt, wenn $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \in \Delta$ ist, und $\Psi^+(\mathfrak{J}) < \varepsilon$, wenn $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \in \Delta$ und $\mu(H \bigvee \mathfrak{J}) < \delta$. Dabei läßt sich Δ so einrichten, daß Δ nur Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Y} \sqsubset \mathfrak{S}$ enthält. Es sei nun $A \in \mathfrak{B}$ und $\mu(HA) < \frac{\varepsilon\delta}{a}$. Ferner bedeute $\mathfrak{S}$ eine Zerlegung aus Δ. Wegen $\mathfrak{Y} \sqsubset \mathfrak{S}$ gilt dann für jede Komponente S von $\mathfrak{S}$ entweder $S \leq H$ oder $HS = O$. Genau wie oben definieren wir $\mathfrak{S}_1$ und $\mathfrak{S}_2$ und behandeln $\mathfrak{S}_1$ auch in gleicher Weise. $\mathfrak{S}_2'$ sei das System der Zellen S aus $\mathfrak{S}_2$ mit $S \leq H$ und $\mathfrak{S}_2'' = \mathfrak{S}_2 \sim \mathfrak{S}_2'$. Wie oben können wir dann, indem wir dort A durch HA ersetzen, auf $\mu(\bigvee \mathfrak{S}_2') < \delta$ schließen. Trivialerweise ist $\mu(H \bigvee \mathfrak{S}_2'') = 0$, also $\mu(H \bigvee \mathfrak{S}_2) < \delta$, und nun läßt sich der Beweis wie oben vollenden.

Mit Hilfe des hiermit bewiesenen Satzes 2.2 folgt nun aus dem Satz 1.3 unmittelbar der

Satz 2.3. *Es sei $\mu(E) < +\infty$. Die Zellenfunktion Ψ sei nach oben totalstetig und nach oben von beschränkter Variation, und $\bar{D}\Psi$ sei integrierbar. Dann gilt*

$$\overline{\int_E} \Psi \leq \int_E \bar{D}\Psi \, d\mu. \tag{2.6}$$

Unter analogen Voraussetzungen gilt

$$\int_E \underline{D}\Psi \, d\mu \leq \underline{\int_E} \Psi. \tag{2.7}$$

Corollar. *Es sei $\mu(E) < +\infty$. Dann trifft (2.6) auf jede nirgends positive Zellenfunktion Ψ zu, entsprechend (2.7) auf jede nirgends negative. Ist Ψ totalstetig und von beschränkter Variation mit integrierbaren Derivierten $\underline{D}\Psi$ und $\bar{D}\Psi$, so gelten (2.6) und (2.7) gleichzeitig. Jede totalstetige differenzierbare Zellenfunktion Ψ von beschränkter Variation mit integrierbarer Ableitung ist summierbar und*

$$\int_E \Psi = \int_E D\Psi \, d\mu, \tag{2.8}$$

insbesondere $D\Psi$ sogar summierbar.

Im Satz wie im Corollar ist die Voraussetzung $\mu(E) < +\infty$ entbehrlich, wenn $\ll$ mit $\sqsubset$ zusammenfällt.[1]

Wir wenden uns nun der entgegengesetzten Ungleichung $\int_E \bar{D}\Psi \, d\mu \leq \overline{\int_E} \Psi$ zu und stellen zunächst notwendige Bedingungen über Θ und $\ll$ für ihre Gültigkeit auf. Wir sagen, $\mathfrak{L}$ sei hinsichtlich $\ll$ eine *feine Überdeckung* von A, abgekürzt $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$, wenn folgendes eintritt:

$\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$. *Es ist $A \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, und bedeutet Δ eine beliebige hinsichtlich $\ll$ terminale Teilmenge von Θ, so enthält $\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$ ein Teilsystem $\mathfrak{M}$ mit $A \leq \bigvee \mathfrak{M}$.*

Natürlich läßt sich $\mathfrak{M}$ stets als abzählbares System bestimmen.

Die folgende Eigenschaft von Θ und $\ll$ heißt die *starke Vitalische Eigenschaft.*

---

[1] Vgl. auch S. 260.

V. Ist $\varepsilon > 0$ *und* Γ *eine hinsichtlich* $\ll$ *terminale Teilmenge von* Θ, *so enthält jede hinsichtlich* $\ll$ *feine Überdeckung* $\mathfrak{L}$ *eines beliebigen Elementes* A *aus* $\mathfrak{B}$ *endlichen Maßes ein in einer Zerlegung aus* Γ *enthaltenes Zellensystem* $\mathfrak{P}$ *mit* $\mu(A - A \vee \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$.[1]

Offenbar kann man für $\mathfrak{P}$ immer ein endliches Zellensystem nehmen.

Unter einer *Lipschitzschen* Zellenfunktion Ψ verstehen wir eine, zu der es eine endliche Zahl a gibt, so daß $|\Psi(K)| \leq a\mu(K)$ für jede Zelle K. Im Fall $\mu(E) < +\infty$ ist jede Lipschitzsche Zellenfunktion universell totalstetig und universell von beschränkter Variation.

Satz 2.4. *Es sei* $\mu(E) < +\infty$, *und für jede nichtnegative Lipschitzsche Zellenfunktion* Ψ *gelte*

$$\int_E \bar{D}\Psi\, d\mu \leq \bar{\int_E} \Psi. \tag{2.9}$$

Dann haben Θ *und* $\ll$ *die Vitalische Eigenschaft* ***V***.

Die Voraussetzung $\mu(E) < +\infty$ *kann entbehrt werden, wenn* $\ll$ *mit* $\sqsubset$ *zusammenfällt;*[2] *in diesem Fall genügt es,* $\int_E{}' \bar{D}\Psi\, d\mu \leq {}'\bar{\int_E} \Psi$ *für jede nichtnegative Lipschitzsche Zellenfunktion* Ψ *vorauszusetzen, die universell totalstetig und universell von beschränkter Variation ist.*

Beweis. Wir werden uns der folgenden Abkürzung bedienen: $\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi = \bigvee_{\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$, wenn $\mathfrak{T} \in \Theta$. Wir nehmen zunächst $\mu(E) < +\infty$ an. Es sei $\varepsilon > 0$, $\mathfrak{L}$ eine feine Überdeckung von A und Γ terminal in Θ. Wir setzen

$$\Psi(K) = \begin{cases} \mu(K), \text{ wenn } K \in \mathfrak{L}, \\ 0, \text{ wenn } K \in \mathfrak{K} \sim \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Offensichtlich bildet Ψ eine nichtnegative Lipschitzsche Zellenfunktion mit

$$0 \leq \bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi \leq 1 \tag{2.10}$$

für jedes $\mathfrak{T}$ aus Θ.

---

[1] An der Gültigkeit von ***V*** ändert sich nichts beim Übergang zu einem anderen strikt positiven und σ-endlichen Maß auf $\mathfrak{B}$.

[2] Vgl. auch S. 260.

Ist $\mathfrak{Z} \in \Theta$ und Δ die durch $\mathfrak{Z}$ in Θ bestimmte terminale Menge aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$, so enthält $\mathfrak{K} \cap \bigcup \Delta$ voraussetzungsgemäß ein Teilsystem $\mathfrak{M}$ mit $A \leq \bigvee \mathfrak{M}$. Zu jedem K aus $\mathfrak{M}$ gibt es dann eine Zerlegung $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$ und $K \in \mathfrak{S}$. Zugleich gilt aber $K \in \mathfrak{K}$, d. h. $D(\Psi, \mathfrak{S}) = 1\,[K]$ und deshalb $1 \leq \bar{D}_{\mathfrak{Z}}\, \Psi\,[K]$. Hieraus folgt $1 \leq \bar{D}_{\mathfrak{Z}} \Psi\,[\bigvee \mathfrak{M}]$, also erst recht $1 \leq \bar{D}_{\mathfrak{Z}}\, \Psi\,[A]$, d. h. wegen (2.10) ist

$$1 = \bar{D}_{\mathfrak{Z}}\, \Psi\,[A]. \tag{2.11}$$

Auf Grund von Satz 1.5, $0 \leq \Psi$, (2.10) und der Endlichkeit von $\mu(E)$ gibt es Zerlegungen $\mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{X}$ aus Γ mit $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{X}$ und $\int\limits_E (\bar{D}_{\mathfrak{Z}} \Psi - D(\Psi, \mathfrak{X}))\, d\mu \leq \varepsilon$. Dies zieht wegen $D(\Psi, \mathfrak{X}) \leq \bar{D}_{\mathfrak{Z}} \Psi$ die Ungleichung

$$\int\limits_A (\bar{D}_{\mathfrak{Z}} \Psi - D(\Psi, \mathfrak{X}))\, d\mu \leq \varepsilon \tag{2.12}$$

nach sich.

Es sei $\mathfrak{P} = \mathfrak{X} \cap \mathfrak{K}$. Dann ist $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X} \in \Gamma$. Für jede Zelle K aus $\mathfrak{P}$ gilt $\Psi(K) = \mu(K)$, während wir im Fall $K \in \mathfrak{X} \sim \mathfrak{P}$ haben $\Psi(K) = 0$. Daher ist $D(\Psi, \mathfrak{X}) = 1\,[A \bigvee \mathfrak{P}]$ und $D(\Psi, \mathfrak{X}) = 0\,[A - A \bigvee \mathfrak{P}]$. Aus (2.11) folgt nun $\bar{D}_{\mathfrak{Z}}\, \Psi - D(\Psi, \mathfrak{X}) = 0\,[A \bigvee \mathfrak{P}]$ und $\bar{D}_{\mathfrak{Z}} \Psi - D(\Psi, \mathfrak{X}) = 1\,[A - A \bigvee \mathfrak{P}]$. Dies bedingt $\int\limits_A (\bar{D}_{\mathfrak{Z}} \Psi - D(\Psi, \mathfrak{X}))\, d\mu = \mu(A - A \bigvee \mathfrak{P})$, d. h. nach (2.12): $\mu(A - A \bigvee \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$.

Wir betrachten nun den Spezialfall der Feinheitsrelation $\sqsubset$, nehmen also insbesondere an, Θ filtriere hinsichtlich $\sqsubset$ nach rechts, und lassen die Voraussetzung $\mu(E) < +\infty$ fallen. Es sei wieder $\varepsilon > 0$, Γ eine hinsichtlich $\sqsubset$ terminale Teilmenge von Θ und $\mathfrak{K}$ eine hinsichtlich $\sqsubset$ feine Überdeckung von A. Da $\mu(A) < +\infty$ ist, können wir aus einer irgendwie gewählten Zerlegung $\mathfrak{Y}$ ein Teilsystem $\mathfrak{H}$ herausnehmen, so daß $H = \bigvee \mathfrak{H}$ ein endliches Maß hat und $\mu(A - HA) \leq \varepsilon$ wird. Das System aller Zellen aus $\mathfrak{K}$, die in einer Komponente von $\mathfrak{Y}$ enthalten sind, bildet wieder eine hinsichtlich $\sqsubset$ feine Überdeckung von A, und daher stellt das System $\mathfrak{K}'$ aller Zellen K aus $\mathfrak{K}$ mit $K \leq H$ eine feine Überdeckung von HA dar. Mit Hilfe von $\mathfrak{K}'$ an Stelle von $\mathfrak{K}$ definieren wir nun Ψ ganz genau so wie vorhin, erhalten eine nichtnegative Lipschitzsche universell totalstetige Zellenfunktion von universell beschränkter Variation und haben neben (2.10) auch noch $\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi = 0\,[E - H]$, so daß $\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi$ wegen $\mu(H) < +\infty$ summierbar wird. Operieren wir nun mit $\mathfrak{L}'$ und HA statt $\mathfrak{L}$ und A ebenso wie oben, so bekommen wir schließlich $\mu(HA - HA \vee \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$, d. h. $\mu(A - A \vee \mathfrak{P}) \leq 2\varepsilon$.

Vor der Formulierung des folgenden Satzes erinnern wir daran, daß $'\bar{\int\limits_E}\Psi$ und $'\bar{D}\Psi$ die oberen Integrale und Derivierten hinsichtlich der Feinheit der Einteilung, $\sqsubset$, bedeuten. Dementsprechend sollen $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ und $'\boldsymbol{V}$ aus $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ und $\boldsymbol{V}$ durch Einsetzen von $\sqsubset$ für $\ll$ hervorgehen. Dabei setzen wir dann natürlich voraus, Θ filtriere hinsichtlich $\sqsubset$ nach rechts. Ist $\mathfrak{T} \in \Theta$, so sei $'\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi = \bigvee\limits_{\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$.

Satz 2.5. *Das System Θ von Zerlegungen habe die Vitalische Eigenschaft $'\boldsymbol{V}$. Die Zellenfunktion Ψ sei hinsichtlich der Feinheit der Einteilung nach unten totalstetig und nach unten von beschränkter Variation. Dann sind $'\bar{\int\limits_E}\Psi$ und $\int\limits_E{}'\bar{D}\Psi\,d\mu$ vorhanden und*

$$\int\limits_E {}'\bar{D}\Psi\,d\mu \leq {}'\bar{\int\limits_E}\Psi. \tag{2.13}$$

Ist Ψ hinsichtlich der Feinheit der Einteilung nach oben totalstetig und nach oben von beschränkter Variation, so gilt entsprechend

$$'\underline{\int\limits_E}\Psi \leq \int\limits_E {}'\underline{D}\Psi\,d\mu. \tag{2.14}$$

Corollar. (2.13) *trifft auf jede nirgends negative und* (2.14) *auf jede nirgends positive Zellenfunktion zu. Ist Ψ hinsichtlich der Feinheit der Einteilung totalstetig und von beschränkter Variation, so gelten* (2.13) *und* (2.14) *gleichzeitig. Ist Ψ hinsichtlich der Feinheit der Einteilung summierbar, totalstetig und von beschränkter Variation, so wird Ψ hinsichtlich der Feinheit der Einteilung auch differenzierbar, $'D\Psi$ wird summierbar und*

$$'\int\limits_E\Psi = \int\limits_E {}'D\Psi\,d\mu.$$

Beweis. 1. Um mit Überdeckungsbedingungen vom Typ $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ bequemer operieren zu können, bemerken wir zunächst, daß auf Grund des distributiven Gesetzes[1] in $\mathfrak{B}$ die folgenden Aussagen über eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{B}$ und ein Element A aus $\mathfrak{B}$ äquivalent sind: Es ist $A \leq \bigvee \mathfrak{M}$; zu jedem Element B aus $\mathfrak{B}$ mit $O < B \leq A$ gibt es ein Element M aus $\mathfrak{M}$ mit $O < BM$.

2. $'\overline{\int_E} \Psi$ existiert, weil Ψ nach unten von beschränkter Variation ist. Wir machen jetzt die beiden folgenden Voraussetzungen, von denen wir uns später wieder befreien werden: $\int_E {}'\bar{D}\Psi\, d\mu$ existiere mit

$$(2.15) \qquad -\infty < \int_E {}'\bar{D}\Psi\, d\mu,$$

und es gebe eine Zerlegung $\mathfrak{Y}_1$ aus Θ, so daß $'\bar{D}_{\mathfrak{Y}_1}\Psi$ über E integrierbar wird mit

$$(2.16) \qquad \int_E {}'\bar{D}_{\mathfrak{Y}_1}\Psi\, d\mu < +\infty.$$

Wir beweisen (2.13), indem wir für die Moore-Smithsche Funktionenfolge $(D(\Psi, \mathfrak{S}))_{\mathfrak{S}\in\Theta}$ das Kriterium $\boldsymbol{F}_2$ des Satzes 1.4 realisieren; da Ψ nach unten von beschränkter Variation ist, haben wir in der Tat $-\infty < \Psi(\mathfrak{S})$ sogar für terminal viele Zerlegungen $\mathfrak{S}$.

Es sei also $\mathfrak{R} \in \Theta$ und $\varepsilon > 0$. Wegen (2.16) gibt es eine positive Zahl δ_1 und ein in $\mathfrak{Y}_1$ enthaltenes Zellensystem $\mathfrak{H}_1$, so daß $H_1 = \bigvee \mathfrak{H}_1$ ein positives endliches Maß hat und

$$(2.17) \qquad \int_A {}'\bar{D}_{\mathfrak{Y}_1}\Psi\, d\mu < \varepsilon$$

für jedes A aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H_1 A) < \delta_1$ gilt. Wegen der Totalstetigkeit von Ψ nach unten existiert eine positive Zahl δ_2, ein in einer Zerlegung $\mathfrak{Y}_2$ aus Θ enthaltenes Zellensystem $\mathfrak{H}_2$ und eine terminale Menge Γ von Zerlegungen, so daß $H_2 = \bigvee \mathfrak{H}_2$ ein endliches Maß hat und

$$(2.18) \qquad -\varepsilon < \Psi(\mathfrak{J})$$

für jedes in einer Zerlegung aus Γ enthaltene Zellensystem $\mathfrak{J}$ mit $\mu(H_2 \vee \mathfrak{J}) < \delta_2$ gilt. Bildet $\mathfrak{Y}$ eine Verfeinerung von $\mathfrak{Y}_1$ und $\mathfrak{Y}_2$, so läßt sich $H = H_1 \vee H_2$ in der Gestalt $H = \bigvee \mathfrak{H}$ mit $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{Y}$ darstellen. Wir setzen $\delta = \delta_1 \wedge \delta_2$ und

[1] Siehe z. B. [2] S. 165.

$$\eta = \frac{\varepsilon}{\mu(H)}. \tag{2.19}$$

3. Zu beliebigem, von O verschiedenem B aus $\mathfrak{B}$ und einer beliebigen Zerlegung $\mathfrak{T}$ gibt es eine Komponente K einer Verfeinerung von $\mathfrak{T}$ mit $KB \neq O$ und

$$\frac{\Psi(K)}{\mu(K)} \lesssim {}'\bar{D}\Psi - \eta\,[KB]. \tag{2.20}$$

Andernfalls wäre nämlich $B = \bigvee_{\substack{K \in \mathfrak{S} \\ KB \neq O}} KB$ und $\frac{\Psi(K)}{\mu(K)} \leq {}'\bar{D}\Psi - \eta$ $[KB]$ für jede Verfeinerung $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{T}$ und jede Komponente K von $\mathfrak{S}$ mit $KB \neq O$, also $D(\Psi, \mathfrak{S}) \leq {}'\bar{D}\Psi - \eta\,[B]$. Infolgedessen gälte auch ${}'\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi \leq {}'\bar{D}\Psi - \eta\,[B]$ im Widerspruch zu ${}'\bar{D}\Psi \leq {}'\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi$, $B \neq O$, $\eta > 0$ und der aus (2.15) und (2.16) folgenden Endlichkeit von ${}'\bar{D}\Psi$.

4. Wir setzen $G_{\mathfrak{T}} = H\{{}'\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi \leq {}'\bar{D}\Psi + \eta\}$, wenn $\mathfrak{T} \in \Theta$. Aus $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ folgt $G_{\mathfrak{T}} \leq G_{\mathfrak{S}}$, und wegen der Endlichkeit von ${}'\bar{D}\Psi$ ist $\bigvee_{\mathfrak{T} \in \Theta} G_{\mathfrak{T}} = H$. Der Satz 1.2, auf die Folge der charakteristischen Funktionen der $G_{\mathfrak{T}}$ angewandt, zeigt nun, daß $\lim_{\mathfrak{T}} \mu(G_{\mathfrak{T}}) = \mu(H)$. Daher können wir eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ so bestimmen, daß $G = G_{\mathfrak{Z}}$ die Ungleichung

$$\mu(H - G) < \frac{\delta}{2} \tag{2.21}$$

erfüllt. Da die Folge $(G_{\mathfrak{T}})$ monoton wächst, läßt sich $\mathfrak{Z}$ außerdem so einrichten, daß $\mathfrak{Y} \sqsubset \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{R} \sqsubset \mathfrak{Z}$ ist und jede Verfeinerung von $\mathfrak{Z}$ zu Γ gehört. Nach Definition von G gilt

$${}'\bar{D}_{\mathfrak{Z}}\Psi \leq {}'\bar{D}\Psi + \eta\,[G]. \tag{2.22}$$

5. Es seien nun $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p$ Verfeinerungen von $\mathfrak{Z}$. Wir betrachten das System $\mathfrak{L}$ aller Zellen K mit $KG \neq O$ und

$$\frac{\Psi(K)}{\mu(K)} \lesssim {}'\bar{D}\Psi - \eta\,[KG]. \tag{2.23}$$

Ist $O < B \leq G$ und erfüllt eine Zelle K die Relationen $KB \neq O$ und (2.20), so erst recht $KG \neq O$ und (2.23), d. h. $K \in \mathfrak{L}$. Nach dem unter 1. und 3. Bewiesenen hat daher $\mathfrak{L}$ die Eigenschaft ${}'C(G, \mathfrak{L})$, so daß nach ${}'V$ eine Verfeinerung $\mathfrak{X}$ von $\mathfrak{S}_1, \ldots, \mathfrak{S}_p$

existiert, die ein Teilsystem $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{L}$ mit $\mu(G - G \bigvee \mathfrak{P}) < \frac{\delta}{2}$, also nach (2.21) mit $\mu(H - H \bigvee \mathfrak{P}) < \delta$ enthält. Wegen $\mathfrak{Y} \sqsubset \mathfrak{Z} \sqsubset \mathfrak{X}$ gilt für jede Zelle K aus $\mathfrak{P}$ entweder $K \leq H$ oder $KH = O$, so daß wir von vornherein $P = \bigvee \mathfrak{P} \leq H$ und damit

$$\mu(H - P) < \delta \tag{2.24}$$

annehmen können.

6. Wegen $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{L}$ und nach Definition von $\mathfrak{L}$ trifft (2.23) auf jede Zelle K aus $\mathfrak{P}$ zu. Hieraus und aus (2.22) folgt

$$\frac{\Psi(K)}{\mu(K)} \lesseqgtr {}'\bar{D}_{\mathfrak{z}}\Psi - 2\eta\,[KG].$$

Wegen $\mathfrak{Z} \sqsubset \mathfrak{S}_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ ist weiter $\bigvee\limits_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k) \leq {}'\bar{D}_{\mathfrak{z}}\Psi$, d. h.

$$\frac{\Psi(K)}{\mu(K)} \lesseqgtr \bigvee_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k) - 2\eta\,[KG].$$

Nun bleibt die auf der rechten Seite dieser Beziehung stehende Funktion infolge von $K \in \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{S}_k \sqsubset \mathfrak{X}$ $(k = 1, \ldots, p)$ offenbar konstant in K, und nach Definition von $\mathfrak{L}$ ist $KG \neq O$, so daß wir sogar

$$\frac{\Psi(K)}{\mu(K)} > \bigvee_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k) - 2\eta\,[K]$$

und damit

$$D(\Psi, \mathfrak{X}) > \bigvee_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k) - 2\eta\,[P]$$

haben, also wegen $P \leq H$ und (2.19):

$$\int_P \bigvee_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k)\,d\mu \leq \int_P D(\Psi, \mathfrak{X})\,d\mu + 2\varepsilon. \tag{2.25}$$

Auf Grund von (2.24), $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{X}$ und $\mathfrak{X} \in \Gamma$ gelten (2.17) und (2.18), wenn wir $A = E - P$ und $\mathfrak{I} = \mathfrak{X} \sim \mathfrak{P}$ setzen. Dabei ist aber $\Psi(\mathfrak{I}) = \int\limits_{E-P} D(\Psi, \mathfrak{X})\,d\mu$ und aus $\mathfrak{Y}_1 \sqsubset \mathfrak{S}_k$ $(k = 1, \ldots, p)$ folgt $\bigvee\limits_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k) \leq {}'\bar{D}_{\mathfrak{Y}_1}\Psi$, so daß wir mit Hilfe von (2.25) schließlich

$$\int_E \bigvee_{k=1}^{p} D(\Psi, \mathfrak{S}_k)\, d\mu \leq \int_E D(\Psi, \mathfrak{X})\, d\mu + 4\varepsilon$$

erhalten. Hiernach ist $\boldsymbol{F}_2$ erfüllt, also (2.13) bewiesen.

7. Wir lassen jetzt die zweite der beiden zusätzlichen Voraussetzungen, die wir unter 2. einführten, nämlich die Existenz einer Zerlegung $\mathfrak{Y}_1$ mit (2.16), fallen. Es sei $\mathfrak{U} = \{U_1, U_2, \ldots\} \in \Theta$. Zu jeder natürlichen Zahl m definieren wir $\Psi_m(K) = \Psi(K)$, wenn die Zelle K nicht Teil eines U_i ist, und $\Psi_m(K) = \Psi(K) \wedge \frac{m\mu(K)}{2^i \mu(U^i)}$, wenn $K \leq U_i$. Dann wird Ψ_m wegen $\Psi_m^- = \Psi^-$ ebenfalls nach unten totalstetig und nach unten von beschränkter Variation. Ferner ist $\Psi_m \leq \Psi$, also

$$(2.26) \qquad {}'\overline{\int_E} \Psi_m \leq {}'\overline{\int_E} \Psi.$$

Für jede Verfeinerung $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{U}$ gilt $D(\Psi_m, \mathfrak{S}) = D(\Psi, \mathfrak{S}) \wedge \frac{m}{2^i \mu(U_i)} [U_i]$, d. h. im Fall $\mathfrak{U} \sqsubset \mathfrak{X}$:

$$(2.27) \qquad {}'\bar{D}_{\mathfrak{X}} \Psi_m = {}'\bar{D}_{\mathfrak{X}} \Psi \wedge \frac{m}{2^i \mu(U_i)} [U_i].$$

Dies bedingt die Integrierbarkeit von ${}'\bar{D}_{\mathfrak{X}} \Psi_m$ und $\int_E {}'\bar{D}_{\mathfrak{X}} \Psi_m\, d\mu \leq m < +\infty$. Aus (2.27) folgt weiter

$$(2.28) \qquad {}'\bar{D} \Psi_m = {}'\bar{D} \Psi \wedge \frac{m}{2^i \mu(U_i)} [U_i],$$

insbesondere $({}'\bar{D}\Psi_m)^- = ({}'\bar{D}\Psi)^-$, so daß nach (2.15) auch alle ${}'\bar{D}\Psi_m$ integrierbar sind mit $-\infty < \int_E {}'\bar{D}\Psi_m\, d\mu$. Aus dem bisher schon Bewiesenen erhalten wir daher

$$(2.29) \qquad \int_E {}'\bar{D}\Psi_m\, d\mu \leq {}'\overline{\int_E} \Psi_m$$

für jedes m. Aus (2.28) folgt außerdem ${}'\bar{D}\Psi_m \leq {}'\bar{D}\Psi_{m+1}$ und $\lim\limits_m {}'\bar{D}\Psi_m = {}'\bar{D}\Psi$, also nach dem Satz von B. Levi: $\lim\limits_m \int_E {}'\bar{D}\Psi_m\, d\mu = \int_E {}'\bar{D}\Psi$. Hieraus und aus (2.26) und (2.29) ergibt sich wiederum (2.13).

8. Daß die schließlich noch übriggebliebene zusätzliche Annahme, $'\bar{D}\Psi$ sei integrierbar mit (2.15), unter den gegenwärtigen Voraussetzungen von selbst erfüllt ist, bildet einen Teil des folgenden Satzes, in dessen Beweis wir (2.13) nur unter dieser zusätzlichen Annahme (2.15), nämlich nur bei nichtnegativem Ψ, benutzen.

Satz 2.6. *Hat das System Θ die Vitalische Eigenschaft $'V$, so erfüllt jede Zellenfunktion Ψ die Ungleichungen*

$$(2.30)\qquad \int_E ('\bar{D}\Psi)^+ d\mu \le {}'\overline{\int_E} \Psi^+, \qquad \int_E ('\underline{D}\Psi)^- d\mu \le {}'\overline{\int_E} \Psi^-,$$

$$(2.31)\qquad \int_E |'\bar{D}\Psi|\, d\mu \le {}'\overline{\int_E} |\Psi|, \qquad \int_E |'\underline{D}\Psi|\, d\mu \le {}'\overline{\int_E} |\Psi|.$$

Daher sind $('\underline{D}\Psi)^+$ und $('\bar{D}\Psi)^+$ summierbar, wenn Ψ nach oben von beschränkter Variation ist, $('\bar{D}\Psi)^-$ und $('\underline{D}\Psi)^-$ sind summierbar, wenn Ψ nach unten von beschränkter Variation ist, und $'\underline{D}\Psi$ und $'\bar{D}\Psi$ sind summierbar, wenn Ψ von beschränkter Variation ist, falls „von beschränkter Variation nach oben" usw. hinsichtlich $\sqsubset$ verstanden wird.

Beweis. Es ist $D(\Psi, \mathfrak{S})^+ = D(\Psi^+, \mathfrak{S})$ und daher $'(\bar{D}\Psi)^+ = {}'\bar{D}(\Psi^+)$. Wenden wir nun (2.13) auf die nichtnegative Zellenfunktion Ψ^+ an, so erhalten wir die erste der Ungleichungen (2.30). Aus ihr ergibt sich die zweite, wenn Ψ durch $-\Psi$ ersetzt wird.

Ferner gilt $|D(\Psi, \mathfrak{S})| = D(|\Psi|, \mathfrak{S})$ und daher $|'\bar{D}\Psi| \le {}'\bar{D}|\Psi|$ und $|'\underline{D}\Psi| \le {}'\bar{D}|\Psi|$. Aus (2.13), angewandt auf $|\Psi|$, folgt (2.31).

Aus den Sätzen 2.3 und 2.5 erhalten wir schließlich den

Satz 2.7. *Das System Θ von Zerlegungen habe die Vitalische Eigenschaft $'V$. Die Zellenfunktion Ψ sei nach der Feinheit der Einteilung totalstetig und von beschränkter Variation. Dann gilt*

$$'\underline{\int_E} \Psi = \int_E {}'\underline{D}\Psi\, d\mu, \qquad '\overline{\int_E} \Psi = \int_E {}'\bar{D}\Psi\, d\mu,$$

und diese Integrale sind endlich.

Corollar. *Unter den angegebenen Voraussetzungen ist Ψ nach der Einteilung dann und nur dann differenzierbar, wenn Ψ summierbar ist, und in beiden Fällen wird*

$$'\int_E \Psi = \int_E {}'D\Psi \, d\mu .$$

§ 3. Unabhängigkeit von der Feinheitsrelation

Wir konnten einen Teil der Ergebnisse des vorigen Paragraphen, vor allem den Satz 2.5, nur mit der Feinheitsrelation $\sqsubset$ ableiten. Die meisten in der Praxis vorkommenden Systeme Θ von Zerlegungen und die darin betrachteten Feinheitsrelationen $\ll$ sind jedoch so beschaffen, daß die oberen und unteren Derivierten aller Zellenfunktionen und die oberen und unteren Integrale der totalstetigen Zellenfunktionen hinsichtlich $\sqsubset$ und $\ll$ übereinstimmen, so daß sich unsere Ergebnisse unmittelbar auf den Fall der allgemeineren Feinheitsrelation $\ll$ übertragen. Wir werden uns daher jetzt der Untersuchung von Bedingungen über Θ und $\ll$ zuwenden, die diese Gleichheit der Derivierten und Integrale hinsichtlich Θ und $\ll$ sicherstellen, und werden uns dabei der Einfachheit halber nur mit oberen Integralen und Derivierten beschäftigen.

Wir nehmen also jetzt an, das System Θ von Zerlegungen von E in abzählbar viele paarweise fremde Zellen sei nach rechts filtrierend sowohl in bezug auf $\sqsubset$ als auch in bezug auf eine zweite Feinheitsrelation $\ll$. Wir formulieren zunächst die folgende Bedingung über Θ und $\ll$.

R. *Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{T}$ aus Θ, jedem Element H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ und jeder positiven Zahl δ gibt es in Θ eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Δ von Zerlegungen, so daß bei beliebigem $\mathfrak{S}$ aus Δ das Supremum $R_{\mathfrak{S}}$ aller Komponenten von $\mathfrak{S}$, die keinen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ bilden, die Ungleichung $\mu(HR_{\mathfrak{S}}) < \delta$ erfüllt.*

Es genügt offenbar, ***R*** nur mit speziellen Elementen H zu formulieren, z. B. nur mit allen Elementen der Gestalt $H = \bigvee \mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{H}$ alle endlichen Teilmengen einer festen Zerlegung von E durchläuft, und im Fall $\mu(E) < +\infty$ reicht die Formulierung mit $H = E$ aus. Die Feinheitsrelation $\sqsubset$ hat natürlich die Eigenschaft $\boldsymbol{R}$, denn wir brauchen ja Δ nur gleich der terminalen Menge aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ zu setzen.

Satz 3.1. *Für jede nichtnegative, Lipschitzsche und universell totalstetige Zellenfunktion Ψ von universell beschränkter Variation gelte*

$$\overline{\int_E} \Psi \leq {}'\overline{\int_E} \Psi. \tag{3.1}$$

Dann haben Θ und $\ll$ die Eigenschaft $\boldsymbol{R}$.

Beweis. Wir nehmen an, für – hinsichtlich $\ll$ – konfinal viele $\mathfrak{S}$ sei $\mu(HR_{\mathfrak{S}}) \geq \delta$. Wir definieren $\Psi(K) = 0$, wenn die Zelle K in einer Komponente von $\mathfrak{T}$ enthalten ist, und andernfalls $\Psi(K) = \mu(HK)$. Offenbar ist Ψ nichtnegativ, Lipschitzsch, universell totalstetig und universell von beschränkter Variation. Es gilt $\Psi(\mathfrak{X}) = 0$ für jede Zerlegung $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{X}$, also ${}'\overline{\int_E} \Psi = 0$. Andererseits ist $\Psi(\mathfrak{S}) = \mu(HR_{\mathfrak{S}}) \geq \delta$ für – bezüglich $\ll$ – konfinal viele $\mathfrak{S}$, also $\overline{\int_E} \Psi \geq \delta$ im Widerspruch zu (3.1).

Die Bedingung $\boldsymbol{R}$, die nach dem eben bewiesenen Satz für die Gültigkeit der Ungleichung (3.1) innerhalb einer engen Klasse von Zellenfunktionen notwendig ist, erweist sich auch als hinreichend im Bereich einer sehr viel umfassenderen Klasse von Zellenfunktionen, wenn Θ der folgenden, in allen praktisch vorkommenden Fällen erfüllten Forderung über die Möglichkeit, gewisse disjunkte Zellensysteme zu Zerlegungen zu erweitern, genügt:

$\boldsymbol{E}$. *Ist $\mathfrak{T} \in \Theta$ und $\mathfrak{J}$ ein endliches disjunktes System von Zellen, deren jede einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ bildet, so gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$.*

Satz 3.2. *Hat Θ die Eigenschaft* $\boldsymbol{E}$, *so ist die Bedingung* $\boldsymbol{R}$ *über Θ und $\ll$ hinreichend dafür, daß* (3.1) *für jede bezüglich $\ll$ nach oben und bezüglich $\sqsubset$ nach unten totalstetige Zellenfunktion Ψ gilt, deren obere Integrale hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ existieren.*[1]

Beweis. Zu gegebenem positivem ε existieren wegen der Totalstetigkeit von Ψ bezüglich $\ll$ nach oben und bezüglich $\sqsubset$

[1] Vgl. [20], Théorème IV, wo $\ll$ die Feinheit nach der μ-Norm bedeutet.

nach unten zwei Elemente endlichen Maßes H_1 und H_2 aus $\mathfrak{B}$, zwei positive Zahlen δ_1 und δ_2 und zwei Zerlegungen $\mathfrak{T}_1$ und $\mathfrak{T}_2$, so daß aus $\mathfrak{R}_1 \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{T}_1 \ll \mathfrak{S}$ und $\mu(H_1 \vee \mathfrak{R}_1) < \delta_1$ folgt $\Psi(\mathfrak{R}_1) < \varepsilon$, und aus $\mathfrak{R}_2 \subseteq \mathfrak{Z}$, $\mathfrak{T}_2 \sqsubset \mathfrak{Z}$ und $\mu(H_2 \vee \mathfrak{R}_2) < \delta_2$ folgt $-\varepsilon < \Psi(\mathfrak{R}_2)$. Wir setzen $H = H_1 \smile H_2$ und $\delta = \delta_1 \frown \delta_2$.

Da im Fall $'\overline{\int_E} \Psi = +\infty$ nichts mehr zu beweisen bliebe, können wir eine Zahl a mit $'\overline{\int_E} \Psi < a < +\infty$ betrachten und dazu eine Zerlegung $\mathfrak{T}$ derart wählen, daß erstens $\mathfrak{T}_2 \sqsubset \mathfrak{T}$ wird und zweitens aus $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$ folgt $\Psi(\mathfrak{Z}) \leq a$. Zu $\mathfrak{T}$, H und δ bestimmen wir eine in Θ hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Δ gemäß $\boldsymbol{R}$, doch richten wir Δ gleich so ein, daß für jedes $\mathfrak{S}$ aus Δ gilt $\mathfrak{T}_1 \ll \mathfrak{S}$.

Es sei nun $\mathfrak{S} \in \Delta$ und $\mathfrak{M}$ das System aller Komponenten von $\mathfrak{S}$, die einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ bilden, also $HR_{\mathfrak{S}} = H - H \vee \mathfrak{M}$. Nach Wahl von Δ ist $\mu(HR_{\mathfrak{S}}) < \delta$, außerdem $\mu(H) < +\infty$, und daher gibt es ein endliches Teilsystem $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{M}$, so daß auch noch

$$\mu(H - H \vee \mathfrak{J}) < \delta \tag{3.2}$$

wird. Setzen wir $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{S} \sim \mathfrak{J}$, so erhalten wir wegen $\mathfrak{T}_1 \ll \mathfrak{S}$ und (3.2) die Ungleichung $\Psi(\mathfrak{R}_1) < \varepsilon$, d. h.

$$\Psi(\mathfrak{S}) \leq \Psi(\mathfrak{J}) + \varepsilon. \tag{3.3}$$

Nach $\boldsymbol{E}$ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$. Dann ist erst recht $\mathfrak{T}_2 \sqsubset \mathfrak{Z}$, also wegen (3.2), wenn wir $\mathfrak{R}_2 = \mathfrak{Z} \sim \mathfrak{J}$ definieren, $-\varepsilon < \Psi(\mathfrak{R}_2)$ und damit $\Psi(\mathfrak{J}) \leq \Psi(\mathfrak{Z}) + \varepsilon$. Aus $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$ resultiert schließlich $\Psi(\mathfrak{Z}) \leq a$, also, wenn wir noch (3.3) heranziehen, $\Psi(\mathfrak{S}) \leq a + 2\varepsilon$. Da dies bei beliebigem $\mathfrak{S}$ aus Δ gilt, ist $\overline{\int_E} \Psi \leq a + 2\varepsilon$, d. h. $\overline{\int_E} \Psi \leq a$, und da a eine beliebige Zahl mit $'\overline{\int_E} \Psi < a < +\infty$ bedeutete, folgt hieraus die Behauptung (3.1).

Das Wesentliche der Sätze 3.1 und 3.2 zusammenfassend können wir sagen, die Bedingung $\boldsymbol{R}$ über Θ und $\ll$ sei notwendig und hinreichend dafür, daß zwischen den oberen Integralen hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ einer jeden totalstetigen Zellenfunktion Ψ die Ungleichung (3.1) bestehe. Die folgende Bedingung $\boldsymbol{U}$ über Θ und

$\ll$ wird sich als notwendig und hinreichend dafür erweisen, daß die oberen Derivierten jeder Zellenfunktion Ψ hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ der Ungleichung

$$\bar{D}\Psi \leq {}'\bar{D}\Psi \tag{3.4}$$

genügen.

***U**. Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{T}$ aus Θ, jedem Element H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ und jeder positiven Zahl δ gibt es in Θ eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Δ von Zerlegungen, so daß, wenn $R_{\mathfrak{S}}$ das Supremum aller Komponenten der Zerlegung $\mathfrak{S}$ bezeichnet, die keinen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ bilden, die Ungleichung $\mu(H \bigvee_{\mathfrak{S}\in\Delta} R_{\mathfrak{S}}) < \delta$ gilt.*

Auch hier wieder genügt es, **U** nur mit speziellen Elementen H zu formulieren, z. B. nur mit allen Elementen der Gestalt $H = \bigvee \mathfrak{H}$, wobei $\mathfrak{H}$ alle endlichen Teilmengen einer festen Zerlegung von E durchläuft, und im Fall $\mu(E) < +\infty$ reicht die Formulierung mit $H = E$ aus. Die Feinheitsrelation $\sqsubset$ hat offenbar die Eigenschaft **U**.

Die oben gebrachte Formulierung von **U** läßt die Analogie zu **R** besonders hervortreten. Es ist aber in vielen Fällen bequemer, mit einer etwas anderen Formulierung zu operieren. Bei gegebenen Zerlegungen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ definieren wir $R_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{T}}$ als das Supremum aller Komponenten von $\mathfrak{S}$, die keinen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ bilden. Ist $\mathfrak{Z} \in \Theta$, so sei $P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}} = \bigvee_{\mathfrak{Z}\ll\mathfrak{S}} R_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{T}}$, und sodann $P^{\mathfrak{T}} = \bigwedge_{\mathfrak{Z}\in\Theta} P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}}$. Offenbar ist nun **U** äquivalent damit, daß bei beliebigem $\mathfrak{T}$ aus Θ und beliebigem H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ gelte $\lim_{\mathfrak{Z}} \mu(HP_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}}) = 0$, wobei lim hinsichtlich $\ll$ zu verstehen sei. Diese Formulierung wiederum ist nach Satz 1.2, da die Folge $(P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}})_{\mathfrak{Z}\in\Theta}$ hinsichtlich $\ll$ monoton fällt, gleichwertig mit $P^{\mathfrak{T}} = O$ für jedes $\mathfrak{T}$.[1] Hiernach hängt die Erfüllung von **U** gar nicht vom Maß μ ab.

Satz 3. 3. *Für jede nichtnegative, Lipschitzsche und universell totalstetige Zellenfunktion Ψ von universell beschränkter Variation gelte* (3.4) *Dann haben Θ und $\ll$ die Eigenschaft **U**.*

Beweis. $\mathfrak{T}$ und H seien wie in **U** gegeben. Wir setzen $\Psi(K) = 0$, wenn die Zelle K keinen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ bildet,

[1] Zu diesen Umformungen vgl. den Beweis eines Lemmas von D. Rutowitz in [11] S. 232. Vgl. ferner S. 272.

und andernfalls $\Psi(K) = \mu(HK)$. Offenbar ist Ψ nichtnegativ, universell totalstetig und universell von beschränkter Variation. Es gilt $D(\Psi, \mathfrak{X}) = 0$ für jede Zerlegung $\mathfrak{X}$ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{X}$, also $'\bar{D}\Psi = 0$. Aus (3.4) folgt daher, weil Ψ nichtnegativ ist,

$$\bar{D}\Psi = 0. \tag{3.5}$$

Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{Z}$ definieren wir $Q_{\mathfrak{Z}} = \{0 < \bar{D}_{\mathfrak{Z}}\Psi\}$. Die Folge $(Q_{\mathfrak{Z}})_{\mathfrak{Z} \in \Theta}$ fällt monoton hinsichtlich $\ll$ und wegen (3.5) gilt

$$\bigwedge_{\mathfrak{Z}} Q_{\mathfrak{Z}} = O. \tag{3.6}$$

Ist nun $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$, $K \in \mathfrak{S}$ und K nicht Teil einer Komponente von T, so wird $D(\Psi, \mathfrak{S}) = \frac{\mu(HK)}{\mu(K)}[K]$ und somit $\bar{D}_{\mathfrak{Z}}\Psi \geq \frac{\mu(HK)}{\mu(K)}[K]$. Hieraus folgt $HK \leq Q_{\mathfrak{Z}}$ im Fall $O < HK$ nach Definition von $Q_{\mathfrak{Z}}$ und im Fall $HK = O$ trivialerweise, also $HR_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{T}} \leq Q_{\mathfrak{Z}}$ und daher $HP_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}} \leq Q_{\mathfrak{Z}}$. Aus (3.6) erhalten wir jetzt $\boldsymbol{U}$.

Satz 3.4. *Hat Θ die Eigenschaft* **E**, *so ist die Bedingung* $\boldsymbol{U}$ *über Θ und $\ll$ hinreichend dafür, daß* (3.4) *für jede Zellenfunktion Ψ gilt.*[1]

Beweis. Es sei $\mathfrak{T} \in \Theta$ und $\mathfrak{M}$ das System aller Komponenten einer Zerlegung $\mathfrak{S}$, die einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ darstellen, also $E - R_{\mathfrak{S}}^{\mathfrak{T}} = \bigvee \mathfrak{M}$. Auf Grund von $\boldsymbol{E}$ gibt es zu einem beliebigen endlichen Teilsystem $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{M}$ eine Zerlegung $\mathfrak{Y}$ mit $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{Y}$ und $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Y}$, d. h. $D(\Psi, \mathfrak{S}) = D(\Psi, \mathfrak{Y}) \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi[\bigvee \mathfrak{J}]$. Hiernach gilt $D(\Psi, \mathfrak{S}) \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi[\bigvee \mathfrak{J}]$ für jedes endliche Teilsystem $\mathfrak{J}$ von $\mathfrak{M}$ und daher auch $D(\Psi, \mathfrak{S}) \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi[\bigvee \mathfrak{M}]$. Ist nun $\mathfrak{Z} \in \Theta$ und $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$, so folgt hieraus wegen $E - P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}} \leq \bigvee \mathfrak{M}$ erst recht $D(\Psi, \mathfrak{S}) \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi[E - P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}}]$, und diese Ungleichung, für jedes $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$ richtig, zieht $\bar{D}\Psi \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi[E - P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}}]$ nach sich. Dies gilt für jedes $\mathfrak{Z}$ und es ist $E - P^{\mathfrak{T}} = \bigvee_{\mathfrak{Z} \in \Theta}(E - P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}})$, also $\bar{D}\Psi \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi[E - P^{\mathfrak{T}}]$. Aus $P^{\mathfrak{T}} = O$ ergibt sich nun $\bar{D}\Psi \leq {'\bar{D}_{\mathfrak{T}}}\Psi$ für jedes $\mathfrak{T}$, d. h. (3.4).

Angesichts der Sätze 3.1–3.4 wird man sich fragen, wann denn nun in den Ungleichungen (3.1) und (3.4) das Gleichheitszeichen

[1] Zum Fall der Derivierten „im Mittel" vgl. [20], Théorème IV, wo $\ll$ die Feinheit der Norm nach bedeutet.

stehe. Dazu reicht dann offenbar die folgende Eigenschaft von Θ und $\ll$ hin, die sämtlichen in Anwendungen auftretenden Feinheitsrelationen und insbesondere stets der Feinheit der μ-Norm nach zukommt:

$\boldsymbol{Z^0}$. *Ist* $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{S} \in \Theta$ *und* $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, *so auch* $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$.[1]

Wenn $\boldsymbol{Z^0}$ erfüllt ist, wird $'\bar{D}\Psi \leq \bar{D}\Psi$ für jede Zellenfunktion Ψ, und $'\bar{\int\limits_E} \Psi \leq \bar{\int\limits_E} \Psi$, soweit die betreffenden Integrale vorhanden sind. Hierzu würde bereits die folgende, etwas schwächere Forderung ausreichen:

Z. *Jede hinsichtlich* $\ll$ *terminale Menge von Zerlegungen ist auch hinsichtlich* $\sqsubset$ *terminal.*

Die umgekehrte Forderung:

B. *Jede hinsichtlich* $\sqsubset$ *terminale Menge von Zerlegungen ist auch hinsichtlich* $\ll$ *terminal,*

die zusammen mit **Z** oder $\boldsymbol{Z^0}$ die Äquivalenz von $\ll$ und $\sqsubset$ im Sinne der Grenzwerttheorie nach sich zieht, bedingt die Gültigkeit der Ungleichung (3.4) für jede Zellenfunktion Ψ, und die von (3.1) auch bei *nicht* totalstetigem Ψ, soweit $'\bar{\int\limits_E} \Psi$ und $\bar{\int\limits_E} \Psi$ existieren. Formuliert man **B** in der folgenden Gestalt:

B. *Zu jeder Zerlegung* $\mathfrak{T}$ *aus* Θ *gibt es eine hinsichtlich* $\ll$ *terminale Menge* Δ, *so daß bei beliebigem* $\mathfrak{S}$ *aus* Δ *jede Komponente von* $\mathfrak{S}$ *einen Teil einer Komponente von* $\mathfrak{T}$ *bildet,*

so sieht man unmittelbar, daß es sich um eine Verschärfung von **U** und **R** handelt.

Über den Zusammenhang der Forderungen **R** und **U** klärt uns der folgende Satz auf, in dem man sich **R**, **U** und **V** immer mit der gleichen Feinheitsrelation $\ll$ formuliert denken muß.

Satz 3.5. *Aus* **U** *folgt* **R**. *Aus* **R** *und* **V** *folgt* **U**.

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial. Es seien nun **R** und **V** erfüllt, $\mathfrak{T}$ eine Zerlegung aus Θ, H ein Element endlichen Maßes aus $\mathfrak{B}$ und δ eine positive Zahl. Auf Grund von **R** läßt sich eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Γ derart bestimmen, daß

$$\mu(H R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}) \leq \delta \tag{3.7}$$

auf jede Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Γ zutrifft.

---

[1] In der Darstellung der Theorie der Integration von Zellenfunktionen in [1] S. 298–311 z. B. wird $\boldsymbol{Z^0}$ von vornherein vorausgesetzt.

Bei festgehaltenem $\mathfrak{T}$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$ das System aller Komponenten einer Zerlegung $\mathfrak{S}$, die keinen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ darstellen, so daß also $R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}} = \bigvee \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$ wird, und setzen $\mathfrak{L} = \bigcup_{\mathfrak{S} \in \Theta} \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$. Offenbar liegt $\boldsymbol{C}(P^{\mathfrak{T}}, \mathfrak{L})$ vor, denn ist $\mathfrak{Z} \in \Theta$ und Δ die terminale Menge aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$, so gelten mit der Abkürzung $\mathfrak{M} = \bigcup_{\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}} \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$ die Ungleichungen $\mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$ und $P^{\mathfrak{T}} \leq P^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{Z}} = \bigvee \mathfrak{M}$. Nach $\boldsymbol{V}$ existiert daher eine Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Γ und ein Teilsystem $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{L} \cap \mathfrak{S}$ mit $\mu(HP^{\mathfrak{T}} - HP^{\mathfrak{T}} \bigvee \mathfrak{P}) \leq \delta$. Nach Definition von $\mathfrak{L}$ bildet keine Zelle aus $\mathfrak{P}$ einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$, so daß $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$, d. h. $\bigvee \mathfrak{P} \leq R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}$, also wegen (3.7) und $\mathfrak{S} \in \Gamma$ auch $\mu(HP^{\mathfrak{T}} \bigvee \mathfrak{P}) \leq \delta$ und somit $\mu(HP^{\mathfrak{T}}) \leq 2\delta$ gilt. Demnach ist $HP^{\mathfrak{T}} = O$ für jedes H und $\mathfrak{T}$, d.h. $\boldsymbol{U}$ bewiesen.

Auf weitere Zusammenhänge zwischen $\boldsymbol{U}$ einerseits und Vitalischen Bedingungen andererseits führen die folgenden Sätze, die insbesondere zeigen, daß $\boldsymbol{U}$ unter den Annahmen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{Z}$ notwendig und hinreichend für die Äquivalenz von Überdeckungs- oder Vitalischen Bedingungen hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ ist, in ähnlicher Weise, wie sich $\boldsymbol{U}$ als notwendig und hinreichend für die Äquivalenz der oberen oder unteren Derivierten beliebiger Zellenfunktionen hinsichtlich $\ll$ und $\sqsubset$ erwies.

Satz 3.6. *Bei beliebigem A aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(A) < +\infty$ und beliebigem, in $\mathfrak{K}$ enthaltenem $\mathfrak{L}$ folge $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ aus $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$. Dann haben Θ und $\ll$ die Eigenschaft $\boldsymbol{U}$.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{T} \in \Theta$, $H \in \mathfrak{B}$ und $\mu(H) < +\infty$. Wie im Beweis des vorangegangenen Satzes bezeichnen wir das System aller Komponenten einer Zerlegung $\mathfrak{S}$, die keinen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ darstellen, mit $\mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$, setzen $\mathfrak{L} = \bigcup_{\mathfrak{S} \in \Theta} \mathfrak{R}_{\mathfrak{S}}$ und erhalten $\boldsymbol{C}(HP^{\mathfrak{T}}, \mathfrak{L})$, also nach Voraussetzung auch $'\boldsymbol{C}(HP_{\mathfrak{T}}, \mathfrak{L})$. Bedeutet Δ das hinsichtlich $\sqsubset$ terminale System aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, so gilt demnach $HP^{\mathfrak{T}} \leq \bigvee (\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta)$. Nun ist $\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$ aber leer, denn jede Zelle aus $\bigcup \Delta$ und keine Zelle aus $\mathfrak{L}$ bildet einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$. Daher wird $HP^{\mathfrak{T}} = O$, so daß $\boldsymbol{U}$ erfüllt ist.

Satz 3.7. *Aus $\boldsymbol{Z}$ und $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ folgt $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$. Aus $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ folgt $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$.*

Beweis. Die erste Behauptung ist trivial. Es seien nun $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{U}$ und $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ erfüllt, und Δ bedeute eine hinsichtlich $\sqsubset$ terminale

Menge, enthalte also etwa die Menge aller $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, wobei $\mathfrak{T}$ eine feste Zerlegung darstellt. $\mathfrak{Z}$ sei eine beliebige weitere Zerlegung aus Θ und Γ die Menge aller $\mathfrak{X}$ aus Θ mit $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{X}$. Wegen $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ ist $A \leq \bigvee(\mathfrak{L} \cap \bigcup \Gamma)$. Bildet nun die Zelle K aus $\mathfrak{L} \cap \bigcup \Gamma$ einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$, so gibt es nach $\boldsymbol{E}$ eine Zerlegung $\mathfrak{S}$ mit $K \in \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, d. h. $K \in \mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$. Andernfalls ist $K \leq P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}}$ nach Definition von Γ. Somit gilt $A - A P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}} \leq \bigvee(\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta)$, und zwar für jedes $\mathfrak{Z}$ aus Θ. Aus $\bigwedge_{\mathfrak{Z}} P_{\mathfrak{Z}}^{\mathfrak{T}} = O$ folgt daher $A \leq \bigvee(\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta)$, d. h. $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$.

Übrigens wird die Voraussetzung $\boldsymbol{E}$ zum Beweis des Satzes 3.7 offenbar nur im Fall eines einelementigen Systems $\mathfrak{J}$ benötigt.

Satz 3.8. *Das System Θ von Zerlegungen und die Feinheitsrelation $\ll$ mögen die Eigenschaften* $\boldsymbol{E}$ *und* $\boldsymbol{Z}$ *haben. Dann folgt* $'\boldsymbol{V}$ *aus* $\boldsymbol{V}$ *und* $\boldsymbol{V}$ *folgt aus* $'\boldsymbol{V}$ *und* $\boldsymbol{U}$.

Beweis. 1. Es sei $\boldsymbol{V}$ erfüllt, Γ hinsichtlich $\sqsubset$ terminal in Θ, $\varepsilon > 0$, $\mu(A) < +\infty$ und $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$. Wir bestimmen $\mathfrak{T}$ so, daß alle Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ zu Γ gehören. Definieren wir $\mathfrak{M}$ als das System aller Zellen aus $\mathfrak{L}$, die einen Teil einer Komponente von $\mathfrak{T}$ darstellen, so gilt natürlich auch $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{M})$. Nach Satz 3.7 und wegen $\boldsymbol{Z}$ haben wir dann $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{M})$, so daß es auf Grund von $\boldsymbol{V}$ ein endliches Teilsystem $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{M}$ mit $\mu(A - A \bigvee \mathfrak{P}) < \varepsilon$ gibt. Aus $\boldsymbol{E}$ folgt die Existenz einer Zerlegung $\mathfrak{Z}$ mit $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{Z}$ und $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$, d. h. $\mathfrak{Z} \in \Gamma$, und damit $'\boldsymbol{V}$.

2. Es seien $'\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{U}$ erfüllt, Γ hinsichtlich $\ll$ terminal in Θ, $\varepsilon > 0$, $\mu(A) < +\infty$ und $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$. Nach $\boldsymbol{Z}$ ist Γ auch terminal hinsichtlich $\sqsubset$, und nach Satz 3.7 und wegen $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{U}$ haben wir $'\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$, so daß es auf Grund von $'\boldsymbol{V}$ ein Teilsystem $\mathfrak{P}$ von $\mathfrak{L}$ und eine Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Γ mit $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{S}$ und $\mu(A - A \bigvee \mathfrak{P}) < \varepsilon$ gibt, womit $\boldsymbol{V}$ bewiesen ist.

Es ist schließlich zur Übertragung der nur mit der Feinheitsrelation $\sqsubset$ formulierten Sätze des vorigen Paragraphen auf den Fall einer allgemeineren Feinheitsrelation $\ll$ zweckmäßig, das Verhältnis der Begriffe „beschränkte Variation" und „totalstetig" hinsichtlich $\sqsubset$ und $\ll$ zu untersuchen. So haben wir offensichtlich den

Satz 3.9. *Unter der Annahme* $\boldsymbol{Z}$ *ist jede Zellenfunktion von beschränkter Variation hinsichtlich $\ll$ auch von beschränkter Variation hinsichtlich $\sqsubset$. Unter der Annahme* $\boldsymbol{B}$ *ist jede Zellen-*

funktion von beschränkter Variation hinsichtlich $\sqsubset$ *auch von beschränkter Variation hinsichtlich* $\ll$. *Das Entsprechende gilt mit den Begriffen „von beschränkter Variation nach oben" und „nach unten".*

Satz 3.10. *Unter der Annahme* $\boldsymbol{Z}$ *ist jede hinsichtlich* $\ll$ *totalstetige Zellenfunktion auch totalstetig hinsichtlich* $\sqsubset$. *Unter der Annahme* $\boldsymbol{B}$ *ist jede hinsichtlich* $\sqsubset$ *totalstetige Zellenfunktion auch totalstetig hinsichtlich* $\ll$. *Das Entsprechende gilt mit den Begriffen „totalstetig nach oben" und „nach unten".*

Einfache Beispiele zeigen, daß sich die Bedingung $\boldsymbol{B}$ in keinem der beiden Sätze 3.9 und 3.10 durch $\boldsymbol{U}$ ersetzen läßt, auch nicht unter der Voraussetzung $\boldsymbol{E}$.

Wir wollen nun die Konsequenzen, die sich aus den hier bewiesenen Kriterien für die Sätze des § 2 ergeben, kurz andeuten. Aus den Sätzen 3.2, 3.9 und 3.10 folgt, daß die Ungleichungen (2.6) und (2.7) des Satzes 2.3 unter den Voraussetzungen $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{R}$ auch im Fall $\mu(E) = +\infty$ für jede Zellenfunktion Ψ gelten, die hinsichtlich $\ll$ totalstetig und von beschränkter Variation mit integrierbaren Derivierten $\bar{D}\Psi$ und $\underline{D}\Psi$ ist. Beim Beweis hat man nur zu beachten, daß aus $\boldsymbol{Z}$ resultiert $'\bar{D}\Psi \leq \bar{D}\Psi$, so daß $\int\limits_E \bar{D}\Psi d\mu = +\infty$ und damit (2.6) trivial wird, wenn $'\bar{D}\Psi$ nicht integrierbar ist.

Auf Grund der Sätze 3.2 und 3.8 ist im Satz 2.4 die Voraussetzung $\mu(E) < +\infty$ unter den Annahmen $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{U}$ entbehrlich, und es genügt dann wieder, (2.9) nur für jede nichtnegative Lipschitzsche Zellenfunktion Ψ vorauszusetzen, die universell totalstetig und universell von beschränkter Variation ist.

Unter den Voraussetzungen $\boldsymbol{Z}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{U}$ gelten schließlich die Sätze 2.5, 2.6 und 2.7 auch dann, wenn man in ihnen überall $\sqsubset$ durch $\ll$ ersetzt, und es sind jeweils die entsprechenden Derivierten und Integrale hinsichtlich $\sqsubset$ und $\ll$ identisch.

Die Überdeckungs- und Vitalischen Bedingungen aus § 2 lassen eine etwas einfachere und der sonst üblichen Gestalt ähnlichere Formulierung[1] zu, wenn Θ und die Feinheitsrelation $\ll$ gewisse zusätzliche Eigenschaften haben, deren Charakter sich

[1] Zum Folgenden vgl. die in der vorangegangenen Note [17] gebrachten Formulierungen sowie [11] Nr. 10.1.1.4.

dem von $\boldsymbol{E}$ vergleichen läßt und die in vielen praktisch interessanten Fällen erfüllt sind.[1] Da in allen Überlegungen nur Zellen auftreten, die Komponenten von Zerlegungen darstellen, läuft zunächst das folgende Axiom lediglich auf eine Art Normierung des Systems aller Zellen hinaus:

$\boldsymbol{K}$. *Es ist* $\mathfrak{K} = \bigcup \Theta$.

Sodann betrachten wir die Bedingung

$\boldsymbol{D}$. *Ist* $\mathfrak{T} \in \Theta$ *und* $\mathfrak{J}$ *ein endliches disjunktes System von Zellen, und gibt es zu jeder Zelle* J *aus* $\mathfrak{J}$ *eine Zerlegung* $\mathfrak{S}$ *mit* $J \in \mathfrak{S}$ *und* $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$, *so gibt es auch eine Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ *mit* $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{Z}$.

Unter der Voraussetzung $\boldsymbol{D}$ läßt sich die Vitalische Bedingung $\boldsymbol{V}$ folgendermaßen vereinfachen:

$\boldsymbol{V}_0$. *Ist* $\varepsilon > 0$, *so enthält jede hinsichtlich* $\ll$ *feine Überdeckung eines beliebigen Elementes* A *aus* $\mathfrak{B}$ *endlichen Maßes ein disjunktes Zellensystem* $\mathfrak{P}$ *mit* $\mu(A - A \bigvee \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$.

Die folgende, schon im Beweis des Satzes 3.7 aufgetretene Bedingung bildet eine Abschwächung von $\boldsymbol{E}$:

$\boldsymbol{E}_1$. *Ist* $\mathfrak{T} \in \Theta$ *und* J *eine Zelle, die einen Teil einer Komponente von* $\mathfrak{T}$ *bildet, so gibt es eine Zerlegung* $\mathfrak{Z}$ *mit* $J \in \mathfrak{Z}$ *und* $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{Z}$.

Bezeichnen wir die mit $\sqsubset$ statt $\ll$ formulierte Bedingung $\boldsymbol{D}$ sinngemäß durch $'\boldsymbol{D}$, so folgt offenbar $'\boldsymbol{D}$ aus $\boldsymbol{E}$, so daß $\boldsymbol{E}$ die entsprechende Vereinfachung $'\boldsymbol{V}_0$ von $'\boldsymbol{V}$ gestattet. Andererseits folgt $\boldsymbol{E}$ aus $\boldsymbol{E}_1$ und $'\boldsymbol{D}$.

Dafür, daß $\mathfrak{L}$ eine feine Überdeckung von A hinsichtlich $\sqsubset$ bilde, ist unter der Annahme $\boldsymbol{K}$ notwendig und unter der Annahme $\boldsymbol{E}_1$ hinreichend, daß folgendes eintritt:

Es ist $A \in \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, *und bedeutet* K *eine beliebige Zelle und* $\mathfrak{M}$ *das System aller Zellen aus* $\mathfrak{L}$, *die einen Teil von* K *darstellen, so ist* $AK \leq \bigvee \mathfrak{M}$.

Ähnliche Vereinfachungen im Fall der Feinheit nach der μ-Norm gestatten die folgenden Forderungen.

$\boldsymbol{N}$. *Es gibt Zerlegungen beliebig kleiner* μ-*Norm*.

$\boldsymbol{W}$. *Zu jedem endlichen disjunkten System* $\mathfrak{J}$ *von Zellen existiert eine Zerlegung* $\mathfrak{S}$ *aus* Θ *mit* $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S}$ *und* $\nu(\mathfrak{S}) = \bigvee_{J \in \mathfrak{J}} \mu(J)$.

$\boldsymbol{W}_1$. *Zu jeder Zelle* J *existiert eine Zerlegung* $\mathfrak{S}$ *aus* Θ *mit* $J \in \mathfrak{S}$ *und* $\nu(\mathfrak{S}) = \mu(J)$.

[1] Vgl. z. B. [11] Nr. 10.1.1.1 und 10.1.1.2.

Es bedeute $\ll$ jetzt die Feinheit nach der μ-Norm. Dann folgt $\boldsymbol{D}$ aus $\boldsymbol{W}$, so daß $\boldsymbol{W}$ die oben angegebene Vereinfachung V_0 der Vitalischen Bedingung V gestattet. Andererseits folgt $\boldsymbol{W}$ aus $\boldsymbol{W}_1$ und $\boldsymbol{D}$. Dafür, daß $\mathfrak{L}$ eine feine Überdeckung von A bilde, ist unter der Annahme $\boldsymbol{N}$ notwendig und unter der Annahme $\boldsymbol{W}_1$ hinreichend, daß folgendes eintritt:

Es ist $A \in \mathfrak{B}$ und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, und bedeutet δ eine positive Zahl und $\mathfrak{M}$ das System aller Zellen L aus $\mathfrak{L}$ mit $\mu(L) \leq \delta$, so ist $A \leq \bigvee \mathfrak{M}$.

Auf Umformungen der Definitionen der Zellenfunktion von beschränkter Variation und der totalstetigen Zellenfunktion unter den eben angeführten Bedingungen, insbesondere $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{E}$ oder $\boldsymbol{W}$, wollen wir nicht eingehen, da sie evident und unwesentlich sind. Es sei nur bemerkt, daß die universelle Totalstetigkeit einer Zellenfunktion unter den Annahmen $\boldsymbol{W}$ und $\mu(E) < +\infty$ äquivalent ist mit ihrer Totalstetigkeit nach der Feinheit der μ-Norm. Dagegen wollen wir eine hinreichende Bedingung dafür angeben, daß jede hinsichtlich $\ll$ totalstetige Zellenfunktion auch von beschränkter Variation hinsichtlich $\ll$ ist, weil in diesem Fall die Sätze 2.2, 2.3, 2.5 und 2.7 eine einfachere Formulierung zulassen.

Y. *Zu jeder positiven Zahl δ gibt es eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Δ, so daß $v(\mathfrak{S}) < \delta$ für jede Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Δ gilt.*

Aus $\boldsymbol{Y}$ folgt natürlich $\boldsymbol{N}$. Unter der Annahme $\boldsymbol{N}$ können wir $\boldsymbol{Y}$ die folgende Form geben: *Jede hinsichtlich der Feinheit der μ-Norm terminale Menge ist auch hinsichtlich $\ll$ terminal.* Demnach sind $\boldsymbol{Y}$ und $\boldsymbol{Z}$ unter der Voraussetzung $\boldsymbol{N}$ gleichwertig in dem Spezialfall, daß $\ll$ in $\boldsymbol{Z}$ die Feinheit der μ-Norm nach und in $\boldsymbol{Y}$ die Feinheit der Einteilung nach, $\sqsubset$, bedeutet.

Satz 3.11. *Erfüllen Θ und $\ll$ die Bedingung $\boldsymbol{Y}$, so ist jede hinsichtlich $\ll$ nach oben totalstetige Zellenfunktion auch nach oben von beschränkter Variation hinsichtlich $\ll$.*

Beweis.[1] Ψ sei nach oben hinsichtlich $\ll$ totalstetig. Wir bestimmen dementsprechend eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Γ von Zerlegungen, ein Element H aus $\mathfrak{B}$ endlichen Maßes und

[1] In Anlehnung an [11] Nr. 10.2.3, 4. Satz.

eine positive Zahl δ, so daß aus $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S} \in \Gamma$ und $\mu(H \vee \mathfrak{J}) < 2\delta$ folgt $\Psi^+(\mathfrak{J}) \leq 1$. Gemäß $\boldsymbol{Y}$ gibt es dann eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Δ, so daß $\nu(\mathfrak{S}) < \delta$ für jedes $\mathfrak{S}$ aus Δ. Der Durchschnitt $\Gamma\Delta$ ist wiederum terminal hinsichtlich $\ll$.

Jede Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus $\Gamma\Delta$ besitzt nun wegen $\mu(H) < +\infty$ und $\nu(\mathfrak{S}) < \delta$ eine Zerlegung $\mathfrak{S} = \bigcup_{i=1}^{r} \mathfrak{J}_i$ in endlich viele paarweise fremde Teilsysteme $\mathfrak{J}_1, \ldots, \mathfrak{J}_r$, so daß

$$\delta \leq \mu(H \vee \mathfrak{J}_i) \qquad (i = 1, \ldots, r-1), \tag{3.8}$$

$$\mu(H \vee \mathfrak{J}_i) < 2\delta \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{3.9}$$

Aus (3.8) folgt $\mu(H) \geq (r-1)\delta$, d. h. $r - 1 \leq \frac{\mu(H)}{\delta}$. Wegen (3.9), $\mathfrak{J}_i \subseteq \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \in \Gamma$ gilt ferner $\Psi^+(\mathfrak{S}_i) \leq 1$, $(i = 1, \ldots, r)$ und daher $\Psi^+(\mathfrak{S}) \leq r \leq 1 + \frac{\mu(H)}{\delta}$. Es ist also $\Psi^+(\mathfrak{S}) \leq 1 + \frac{\mu(H)}{\delta} < +\infty$ für jedes $\mathfrak{S}$ aus $\Gamma\Delta$, d. h. Ψ von beschränkter Variation nach oben hinsichtlich $\ll$.

§ 4. Mengenalgebren und Punkte

Die Boolesche σ-Algebra $\mathfrak{B}$, mit der wir in den ersten drei Paragraphen operiert haben, erscheint in fast allen praktisch auftretenden Fällen von vornherein als Quotienten-σ-Algebra einer Booleschen σ-Mengenalgebra nach einem σ-Mengenideal, dem „Nullideal" eines σ-endlichen Maßes, und sie läßt sich grundsätzlich sogar immer in dieser Gestalt darstellen. Es ist daher von Interesse zu untersuchen, wie sich die bisher aufgetretenen Begriffe und Ergebnisse beim Übergang zu einer solchen Darstellung transformieren und wie wir, etwas allgemeiner, durch Methoden, die den bisher entwickelten analog sind, im „mengenalgebraischen" Fall zu analogen Ergebnissen gelangen.

Zur Vereinfachung der Bezeichnungen wollen wir jetzt, vom bisherigen Gebrauch abweichend, unter $\mathfrak{B}$ eine *Boolesche σ-Mengenalgebra* verstehen, die eine größte Menge E enthält, und unter O die leere Teilmenge von E. Wir nennen die Elemente von E *Punkte*. Die Schreibweise AB verwenden wir für den mengentheoretischen Durchschnitt $A \cap B$. Auf $\mathfrak{B}$ sei ein σ-endliches *Maß* μ definiert und $\mathfrak{N}$ bilde das σ-Ideal aller Mengen N aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(N) = 0$. Ein Teilsystem $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{B}$ heißt *disjunkt*, wenn $AB = O$, und mod $\mathfrak{N}$ *disjunkt*, wenn $AB = O$ mod $\mathfrak{N}$, d. h. $AB \in \mathfrak{N}$, für je zwei voneinander verschiedene A und B aus $\mathfrak{A}$. Jedes mod $\mathfrak{N}$ disjunkte System von Mengen positiven Maßes ist abzählbar.

$\mathfrak{K}$ bedeute ein nicht leeres Teilsystem von $\mathfrak{B}$, dessen Elemente, die *Zellen*, alle ein positives endliches Maß haben. Eine *Zerlegung* $\mathfrak{S}$ ist ein mod $\mathfrak{N}$ disjunktes System von Zellen mit $\bigcup \mathfrak{S} = E$ mod $\mathfrak{N}$. Jede Zelle aus $\mathfrak{S}$ heißt eine *Komponente* von $\mathfrak{S}$. Sind $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ Zerlegungen, so schreiben wir $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, wenn zu jeder Komponente S von $\mathfrak{S}$ eine Komponente T von $\mathfrak{T}$ mit $S \subseteq T$ existiert, und $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ mod $\mathfrak{N}$, wenn es zu jeder Komponente S von $\mathfrak{S}$ eine Komponente T von $\mathfrak{T}$ mit $S \subseteq T$ mod $\mathfrak{N}$ gibt. Die μ-Norm von $\mathfrak{S}$ ist durch $\nu(\mathfrak{S}) = \bigvee_{S \in \mathfrak{S}} \mu(S)$ erklärt.

Wir betrachten ein nicht leeres und hinsichtlich einer transitiven Relation $\ll$, der *Feinheitsrelation*, nach rechts filtrierendes System Θ von Zerlegungen. Stellt Ψ eine Zellenfunktion, d. h. eine in $\mathfrak{K}$ definierte reelle Funktion, und $\mathfrak{J}$ ein mod $\mathfrak{N}$ disjunktes Zellensystem dar, so setzen wir $\Psi(\mathfrak{J}) = \sum_{\mathfrak{J} \in \mathfrak{S}} \Psi(J)$, vorausgesetzt, daß diese Reihe unbedingt konvergiert. Unter der Annahme, $\Psi(\mathfrak{S})$ existiere für alle Zerlegungen $\mathfrak{S}$ einer hinsichtlich $\ll$ terminalen Teilmenge Δ von Θ, erklären wir das untere *Burkill-Kolmogoroffsche Integral* von Ψ über E durch $\underline{\int_E} \Psi = \underline{\lim}_{\mathfrak{S}} \Psi(\mathfrak{S})$, wobei $\underline{\lim}$ hinsichtlich Θ und $\ll$ zu verstehen ist; analog das obere Integral.

Die $\mathfrak{S}$-*Derivierte* $D(\Psi, \mathfrak{S})$ mit $\mathfrak{S} \in \Theta$ ist definiert als die Klasse aller $\mathfrak{B}$-meßbaren reellen Funktionen, die in jeder Komponente S von $\mathfrak{S}$ fast überall den Wert $\dfrac{\Psi(S)}{\mu(S)}$ annehmen. Die unteren und oberen Derivierten $\underline{D}\Psi = \underline{\lim}_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$ und $\bar{D}\Psi = \overline{\lim}_{\mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$ sind hinsichtlich Θ und $\ll$ im Raum aller Ortsfunktionen über $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ zu bilden, doch werden wir oft die gleichen Bezeichnungen $D(\Psi, \mathfrak{S})$, $\underline{D}\Psi$ und $\bar{D}\Psi$ für irgendwelche Repräsentanten dieser Funktionenklassen verwenden.

Die Definitionen der Begriffe „*von beschränkter Variation*“ und „*totalstetig*“, nach oben, unten oder schlechthin, sehen genau so aus wie die in § 2 gegebenen.

Beim Übergang zur Quotienten-σ-algebra $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ werden zwei Zerlegungen $\mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T}$ dann und nur dann auf die gleiche Zerlegung abgebildet, wenn sie mod $\mathfrak{N}$ gleich sind, d. h. wenn $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ mod $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{S} \sqsubset \mathfrak{T}$ mod $\mathfrak{N}$. Nun braucht aber die Feinheitsrelation $\ll$ in Θ nicht invariant gegenüber Ersetzungen von Zerlegungen durch mod $\mathfrak{N}$ gleiche zu sein, so daß sich aus $\ll$ durch repräsentantenweise Definition keine Feinheitsrelation im Bereich der Klassen mod $\mathfrak{N}$ gleicher Zerlegungen ableiten läßt. In ähnlicher Weise braucht Ψ auf mod $\mathfrak{N}$ gleichen Zellen nicht den gleichen Wert anzunehmen, so daß wir aus Ψ im allgemeinen keine eindeutige Funktion der Klassen mod $\mathfrak{N}$ gleicher Zellen erhalten. Daher lassen sich die Ergebnisse der vorangegangenen Paragraphen nicht unmittelbar auf den vorliegenden Fall anwenden, doch zeigt ein Studium der Beweise, daß die Methoden fast unverändert übernommen werden können. Übrigens folgt in den meisten Anwendungen aus der Gleichheit von Zellen mod $\mathfrak{N}$ ihre Gleichheit und damit auch aus der Gleichheit von Zerlegungen mod $\mathfrak{N}$ deren Gleichheit, so daß wir doch zu repräsentantenweisen Definitionen von Zellenfunktionen und Feinheitsrelationen gelangen. Sehr oft sind auch die Feinheitsrelationen $\sqsubset$ und $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$ identisch. Ferner kommt es vielfach vor, daß alle Zerlegungen aus Θ sogar disjunkt und nicht nur mod $\mathfrak{N}$ disjunkt sind.

Es ist nun sehr leicht zu erkennen, daß die Sätze 2.1–2.3 mit der neuen Interpretation der Bezeichnungen unverändert gültig bleiben. In den Sätzen 2.2 und 2.3 kann man $\sqsubset$ nach Belieben auch durch $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$ ersetzen, alles natürlich immer nur unter der Annahme, Θ filtriere hinsichtlich der betreffenden Feinheitsrelation nach rechts.

Wir sagen, $\mathfrak{L}$ sei eine *feine Überdeckung* von A, wenn folgendes eintritt:

$C(A, \mathfrak{L})$. *Es ist* $A \in \mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, *und bedeutet* Δ *eine beliebige hinsichtlich* $\ll$ *terminale Teilmenge von* Θ, *so enthält* $\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$ *ein abzählbares Teilsystem* $\mathfrak{M}$ *mit* $A \subseteq \bigcup \mathfrak{M}$ mod $\mathfrak{N}$.

Man beachte, daß hier das Wort „abzählbares", anders als in § 2, im allgemeinen nicht fortgelassen werden kann, da $\bigcup \mathfrak{M}$ die mengentheoretische Vereinigung bedeutet.

Die *starke Vitalische* Eigenschaft von Θ und $\ll$ ist folgendermaßen erklärt:

V. *Ist $\varepsilon > 0$ und Γ eine hinsichtlich $\ll$ terminale Teilmenge von Θ, so enthält jede hinsichtlich $\ll$ feine Überdeckung $\mathfrak{L}$ einer Menge A aus $\mathfrak{B}$ endlichen Maßes ein in einer Zerlegung aus Γ enthaltenes Zellensystem $\mathfrak{P}$ mit $\mu(A - A \bigcup \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$.*

Sind alle Zerlegungen aus Θ disjunkt, so ist natürlich auch das in **V** vorkommende Zellensystem $\mathfrak{P}$ disjunkt.

Mit diesen Interpretationen der Bezeichnungen bleiben auch die Formulierungen und Beweise der Sätze 2.4–2.7 unverändert. An die Stelle der Relation $\sqsubset$ kann überall $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$ treten. Will man innerhalb von $\mathfrak{B}$ möglichst nur die mengentheoretischen Operationen verwenden, so hat man Beziehungen der Form $A \leq \bigvee \mathfrak{M}$ zu ersetzen durch: „Es gibt ein abzählbares Teilsystem $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{M}$ mit $A \subseteq \bigcup \mathfrak{H}$ mod $\mathfrak{N}$", ähnlich wie in der neuen Formulierung von $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$.

In den sonst üblichen Differentiationssätzen über Zellenfunktionen treten nicht die hier verwendeten *globalen Derivierten* auf, sondern *punktuelle*, d. h. in jedem Punkt von E einzeln gebildete. Sie entstehen aus den $\mathfrak{S}$-Derivierten $D(\Psi, \mathfrak{S})$ im wesentlichen dadurch, daß man $\underline{\lim}$ und $\overline{\lim}$ punktweise im üblichen Sinne als extreme Limites von Zahlenfolgen bildet. Wir setzen bei diesen Betrachtungen jedoch folgendes voraus.

A. *Der Filter der in Θ hinsichtlich $\ll$ terminalen Mengen hat eine abzählbare Basis.*

Dies bedeutet, daß es eine abzählbare, hinsichtlich $\ll$ konfinale Teilmenge von Θ gibt. Die Feinheit nach der μ-Norm hat offenbar die Eigenschaft **A**, ebenso die gröbste Feinheitsrelation, hingegen im allgemeinen nicht die Relationen $\sqsubset$ und $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$.

Im folgenden sei μ^* das von μ erzeugte äußere Maß und $\mathfrak{N}^*$ das System aller Teilmengen N von E mit $\mu^*(N) = 0$. Unter dem *Kern* $Q_{\mathfrak{S}}$ einer Zerlegung $\mathfrak{S}$ wollen wir die Menge aller Punkte x verstehen, die in genau einer Komponente von $\mathfrak{S}$ liegen, also die Menge $(\bigcup \mathfrak{S}) - \bigcup\limits_{K, L \in \mathfrak{S}} KL$. Offenbar gilt $Q_{\mathfrak{S}} = E$ mod $\mathfrak{N}$. Wir erklären jetzt $D(\Psi, \mathfrak{S})$ in $Q_{\mathfrak{S}}$ eindeutig durch

$D(\Psi, \mathfrak{S})(x) = \frac{\Psi(S)}{\mu(S)}$, wenn $x \in Q_{\mathfrak{S}}$ und wenn S diejenige Komponente von $\mathfrak{S}$ bedeutet, in der x liegt; gehört x mehreren Komponenten von $\mathfrak{S}$ an, so setzen wir $D(\Psi, \mathfrak{S})(x)$ zur Definition der oberen punktuellen Derivierten gleich dem Supremum und zur Definition der unteren punktuellen Derivierten gleich dem Infimum aller $\frac{\Psi(S)}{\mu(S)}$ mit $x \in S$ und $S \in \mathfrak{S}$. Im Fall $x \in E - \bigcup \mathfrak{S}$ wird $D(\Psi, \mathfrak{S})(x)$ nicht definiert. Es sei Q die Menge aller Punkte x der Eigenschaft, daß das System aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $x \in \bigcup \mathfrak{S}$ konfinal ist in Θ hinsichtlich $\ll$. Aus $\boldsymbol{A}$ folgt $Q = E \mod \mathfrak{N}^*$. In jedem Punkt x aus Q definieren wir nun die *punktuelle obere Derivierte* von Ψ nach μ hinsichtlich Θ und $\ll$ durch

$$(4.1) \qquad (\bar{D}^* \Psi)(x) = \overline{\lim_{\mathfrak{S}}} \, (D(\Psi, \mathfrak{S})(x)),$$

wobei $\overline{\lim}$ die Bildung des gewöhnlichen oberen Limes von Zahlenfolgen bedeutet, angewandt auf die Moore-Smithsche Zahlenfolge $(D(\Psi, \mathfrak{S})(x))_{\mathfrak{S}}$, in der $\mathfrak{S}$ den Indexbereich aller Zerlegungen mit $x \in \bigcup \mathfrak{S}$ durchläuft, und hinsichtlich der auf diesen Indexbereich eingeschränkten Relation $\ll$. Entsprechend erhalten wir $\underline{D}^* \Psi$.

Wir betrachten, zunächst ohne $\boldsymbol{A}$ vorauszusetzen, die folgende, abgeänderte Überdeckungsbedingung, deren Erfüllung wir durch „$\mathfrak{L}$ *ist eine feine Quasiüberdeckung von* M" umschreiben wollen:

$\boldsymbol{C}^*(M, \mathfrak{L})$. *Es ist* $M \subseteq E$ *und* $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, *und für jede hinsichtlich* $\ll$ *terminale Teilmenge* Δ *von* Θ *gilt* $M \subseteq \bigcup (\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta) \mod \mathfrak{N}^*$.

Mit ihrer Hilfe formulieren wir das Axiom

$\boldsymbol{L}$. *Jede hinsichtlich* $\ll$ *feine Quasiüberdeckung* $\mathfrak{L}$ *einer beliebigen Teilmenge* M *von* E *enthält ein abzählbares Teilsystem* $\mathfrak{M}$ *mit* $M \subseteq \bigcup \mathfrak{M} \mod \mathfrak{N}^*$.

Trivial ist der

Satz 4.1. *Dann und nur dann erfüllen* Θ *und* $\ll$ *die Forderung* $\boldsymbol{L}$, *wenn jede feine Quasiüberdeckung einer beliebigen Menge* M *eine feine Überdeckung jeder meßbaren Hülle von* M *darstellt.*

Infolgedessen ist die Konjunktion „$\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{L}$" äquivalent mit der Bedingung

$\boldsymbol{V}^*$. *Ist* $\varepsilon > 0$ *und* Γ *eine hinsichtlich* $\ll$ *terminale Teilmenge von* Θ, *so enthält jede hinsichtlich* $\ll$ *feine Quasiüberdeckung* $\mathfrak{L}$

einer beliebigen Teilmenge M von E endlichen äußeren Maßes ein in einer Zerlegung aus Γ enthaltenes Zellensystem $\mathfrak{P}$ mit $\mu^*(M - M \bigcup \mathfrak{P}) \leq \varepsilon$.

In dieser Formulierung sind also auch nichtmeßbare Mengen M zugelassen, so wie es in den sonst üblichen Vitalischen Bedingungen zu sein pflegt,[1] im Gegensatz zu unserer Formulierung $\boldsymbol{V}$. Die Bedeutung der Bedingung $\mathbf{L}$ für sich allein zeigt nun neben Satz 4.1 auch der folgende

Satz 4.2. *Die Voraussetzung $\boldsymbol{A}$ über Θ und $\ll$ sei erfüllt. Dann gilt*

$$\bar{D}\Psi \leq \bar{D}^*\Psi \bmod \mathfrak{N}^* \tag{4.2}$$

für jede Zellenfunktion Ψ. Die Bedingung $\mathbf{L}$ ist notwendig dafür, daß

$$\bar{D}\Psi = \bar{D}^*\Psi \bmod \mathfrak{N}^* \tag{4.3}$$

auf jede nichtnegative Lipschitzsche Zellenfunktion Ψ zutrifft, und sie ist hinreichend dafür, daß (4.3) *sogar für jede Zellenfunktion Ψ gilt.*[2]

Beweis. 1. Es sei $\mathfrak{T} \in \Theta$. Analog zur durch (4.1) gegebenen Derivierten werde die Funktion $\bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi$ in E punktweise durch

$$(\bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi)(x) = \bigvee_{\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}} (D(\Psi, \mathfrak{S})(x))$$

erklärt, wobei $\bigvee$ die Bildung des gewöhnlichen Supremums von Zahlenmengen bedeute, angewandt auf die Menge $(D(\Psi, \mathfrak{S})(x))_{\mathfrak{S}}$, in der $\mathfrak{S}$ den Bereich aller Zerlegungen mit $x \in \bigcup \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$ durchläuft. Da der Raum $\mathfrak{F}$ aller Ortsfunktionen über $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ im verbandstheoretischen Sinne vollständig ist, gibt es unter den fast überall in E definierten $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen f mit $f \leq \bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi \bmod \mathfrak{N}^*$ eine hinsichtlich der Relation „$\leq \bmod \mathfrak{N}$" größte, die g heißen möge. Im Fall $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$ trifft nun auf jedes x

---

[1] Auch noch in der Note [17].

[2] Insbesondere folgt aus $\boldsymbol{L}$ die Meßbarkeit von $\bar{D}^*\Psi$ hinsichtlich μ^*. Dies ergibt sich auch aus den allgemeineren Meßbarkeitskriterien in [13]: die Ableitungsbasis ordne fast allen x aus E alle Folgen $g = (J_{\mathfrak{S}})_{\mathfrak{S} \in \Gamma}$ mit $x \in J_{\mathfrak{S}}$, $J_{\mathfrak{S}} \in \mathfrak{S}$ und in Θ konfinalem Γ zu; um A_a und A_w zu erfüllen, nehme man eine feste abzählbare konfinale Menge $(\mathfrak{Z}_n)$ und setze $a(J_{\mathfrak{S}}, g) = (\bigvee_{\mathfrak{Z}_n \ll \mathfrak{S}} n)^{-1}$ und $W(J_{\mathfrak{S}}, g) = J_{\mathfrak{S}}$.

aus $Q_{\mathfrak{S}}$ die Ungleichung $D(\Psi, \mathfrak{S})(x) \leq (\bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi)(x)$ zu, so daß $D(\Psi, \mathfrak{S}) \leq \bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi$ mod $\mathfrak{N}^*$ und damit $D(\Psi, \mathfrak{S}) \leq g$ mod $\mathfrak{N}$ wird. Hieraus folgt $\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi \leq g$ mod $\mathfrak{N}$, wenn $\bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi$ sinngemäß einen Repräsentanten des in $\mathfrak{F}$ gebildeten Supremums $\bigvee\limits_{\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}} D(\Psi, \mathfrak{S})$ darstellt. Außerdem ist $\bar{D}\Psi \leq \bar{D}_{\mathfrak{T}}\Psi$ mod $\mathfrak{N}$ und $g \leq \bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi$ mod $\mathfrak{N}^*$, also $\bar{D}\Psi \leq \bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi$ mod $\mathfrak{N}^*$. Lassen wir nun $\mathfrak{T}$ eine abzählbare, in Θ konfinale Menge durchlaufen, so erhalten wir die Behauptung (4.2).

2. $\mathfrak{L}$ bilde eine hinsichtlich $\ll$ feine Quasiüberdeckung von M, und es gelte (4.3). Wir betrachten eine meßbare Hülle M^* von M. Auf Grund der Feststellungen in Teil 1 des Beweises zu Satz 2.5 genügt es zur Verifikation von $\boldsymbol{L}$ zu zeigen, daß es zu jeder meßbaren Teilmenge B von M^* positiven Maßes eine Zelle L aus $\mathfrak{L}$ mit $\mu(BL) > 0$ gibt. Wir nehmen an, eine derartige Zelle L existiere nicht, und setzen

$$\Psi(L) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } L \in \mathfrak{L}, \\ 0, \text{ wenn } L \in \mathfrak{K} \sim \mathfrak{L}. \end{cases}$$

Bei beliebigem $\mathfrak{T}$ aus Θ folgt aus $\boldsymbol{C}^*(M, \mathfrak{L})$, daß $\bar{D}^*_{\mathfrak{T}}\Psi = 1\ [M]$; Gleichungen der Form $f = g\ [M]$ mit zwei reellen Funktionen f und g sollen hier bedeuten, daß $f(x) = g(x)$ für fast alle x aus M, d. h. mod $\mathfrak{N}^*$ gilt, und analog mit Ungleichungen. Lassen wir nun $\mathfrak{T}$ eine abzählbare konfinale Menge durchlaufen, so erhalten wir $\bar{D}^*\Psi = 1\ [M]$. Wegen (4.3) gilt also auch $\bar{D}\Psi = 1\ [M]$ und wegen der Meßbarkeit von $\bar{D}\Psi$ sogar $\bar{D}\Psi = 1\ [M^*]$, d. h. erst recht

$$\bar{D}\Psi = 1\ [B]. \tag{4.4}$$

Es sei nun $\mathfrak{S} \in \Theta$. Nach Definition von Ψ wird

$$D(\Psi, \mathfrak{S}) = 0\ [\bigcup(\mathfrak{S}(\mathfrak{K} \sim \mathfrak{L}))]. \tag{4.5}$$

Ferner ist $\mu(BL) = 0$ für jedes L aus $\mathfrak{L}$, also $\mu(B \bigcup(\mathfrak{S}\mathfrak{L})) = 0$, d. h. nach (4.5) sogar $D(\Psi, \mathfrak{S}) = 0\ [B]$. Daher gilt $\bar{D}\Psi = 0\ [B]$ im Widerspruch zu (4.4).

3. Wir setzen jetzt $\boldsymbol{L}$ voraus. Wir betrachten eine positive endliche Zahl ε und bilden die Mengen $M_i = \{x\colon i\varepsilon \leq (\bar{D}^*\Psi)(x) < (i+1)\varepsilon\}$, $i = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, und $M_{-\infty} = \{x\colon (\bar{D}^*\Psi)(x) =$

$-\infty\}$, $M_{+\infty} = \{x: (\bar{D}^* \Psi)(x) = +\infty\}$. Zunächst sei i endlich, $\mathfrak{T} \in \Theta$ und Γ die terminale Menge aller $\mathfrak{S}$ mit $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$. Zu jedem Punkt x aus M_i und jeder in Θ terminalen Teilmenge Δ von Γ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Δ und eine Komponente S von $\mathfrak{S}$ mit $x \in S$ und

$$\frac{\Psi(S)}{\mu(S)} \geq (\bar{D}^* \Psi)(x) - \varepsilon. \tag{4.6}$$

Das System aller so bestimmten Zellen S stellt also eine feine Quasiüberdeckung von M_i dar und enthält daher ein abzählbares Teilsystem $\mathfrak{M}$ mit

$$M_i \subseteq \bigcup \mathfrak{M} \bmod \mathfrak{N}^*. \tag{4.7}$$

Ist nun $S \in \mathfrak{M}$, $x \in S M_i$ und (4.6) erfüllt, und bedeutet dann y einen weiteren Punkt aus $S M_i$, so gilt $\frac{\Psi(S)}{\mu(S)} \geq (\bar{D}^* \Psi)(y) - 2\varepsilon$ nach Definition von M_i, d. h.

$$\frac{\Psi(S)}{\mu(S)} \geq \bar{D}^* \Psi - 2\varepsilon \; [S M_i]. \tag{4.8}$$

Nach Definition von S, $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{L}$ existiert eine Zerlegung $\mathfrak{S}$ mit $S \in \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \in \Gamma$, d. h. $\mathfrak{T} \ll \mathfrak{S}$, und somit erhalten wir aus (4.8) und aus $\bar{D}_{\mathfrak{T}} \Psi \geq D(\Psi, \mathfrak{S}) \bmod \mathfrak{N}$ die Ungleichung $\bar{D}_{\mathfrak{T}} \Psi \geq \bar{D}^* \Psi - 2\varepsilon \; [S M_i]$. Dies trifft auf jedes S aus $\mathfrak{M}$ zu und $\mathfrak{M}$ ist abzählbar und erfüllt (4.7), so daß $\bar{D}_{\mathfrak{T}} \Psi \geq \bar{D}^* \Psi - 2\varepsilon \; [M_i]$ für jedes i gilt, aber trivialerweise auch für $i = -\infty$, also $\bar{D}_{\mathfrak{T}} \Psi \geq \bar{D}^* \Psi - 2\varepsilon \; [E - M_{+\infty}]$. Lassen wir $\mathfrak{T}$ eine abzählbare konfinale Menge durchlaufen, so bekommen wir $\bar{D} \Psi \geq \bar{D}^* \Psi - 2\varepsilon \; [E - M_{+\infty}]$. Nun hängt $M_{+\infty}$ nicht von ε ab, und daher führt diese Ungleichung, für alle ε einer abzählbaren Nullfolge betrachtet, auf $\bar{D} \Psi \geq \bar{D}^* \Psi \; [E - M_{+\infty}]$. Ebenso würden wir erhalten $\bar{D} \Psi = +\infty = \bar{D}^* \Psi \; [M_{+\infty}]$, wenn wir statt von (4.6) ausgingen von $\frac{\Psi(S)}{\mu(S)} \geq \alpha$, wobei α eine beliebige endliche Zahl darstellte, und damit haben wir wegen (4.2) die Behauptung (4.3).

Es sei bemerkt, daß man in Teil 1 und 3 (jedoch nicht in Teil 2) des eben geführten Beweises statt mit $\bar{D}^* \Psi$ ebensogut mit derjenigen oberen Derivierten operieren kann, die man erhält, wenn man $D(\Psi, \mathfrak{S})$ nur in $Q_{\mathfrak{S}}$ und nicht in $\bigcup \mathfrak{S}$ definiert. Diese

Derivierte wird durch die rechte Seite der Formel (4.1) gegeben in allen Punkten x, bei denen das System der Zerlegungen $\mathfrak{S}$ mit $x \in Q_{\mathfrak{S}}$ konfinal ist, in einer Menge also, die wegen $\boldsymbol{A}$ ebenfalls gleich E mod $\mathfrak{N}^*$ ist. Unter der Voraussetzung $\boldsymbol{L}$ fallen diese beiden punktuellen oberen Derivierten fast überall mit $\bar{D}\Psi$, also fast überall miteinander zusammen. Sie sind natürlich identisch, wenn jede Zerlegung disjunkt ist.

Die Übertragung der Ergebnisse des § 3 auf den mengenalgebraischen Fall bereitet kaum Schwierigkeiten. Man erhält für die Sätze 3.1–3.10 zwei Fassungen, je nachdem man sich für $\sqsubset$ der neuen Interpretation bedient oder statt dessen $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$ verwendet, und entsprechend muß man bei den neuen Formulierungen von $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{Z}^0$, $\boldsymbol{Z}$ und $\boldsymbol{B}$ zwei Fälle unterscheiden. In den Axiomen $\boldsymbol{R}$, $\boldsymbol{E}$ und $\boldsymbol{U}$ und der zweiten Formulierung von $\boldsymbol{B}$ hat man die Worte „Teil einer Komponente" das eine Mal zu lesen als „enthalten in einer Komponente" und das andere Mal als „enthalten mod $\mathfrak{N}$ in einer Komponente". Außerdem muß man in beiden Fällen im Axiom $\boldsymbol{E}$ nicht nur disjunkte, sondern auch mod $\mathfrak{N}$ disjunkte endliche Zellensysteme $\mathfrak{Z}$ zulassen, es sei denn, daß alle Zerlegungen aus Θ sogar disjunkt sind.

Da jede Zerlegung abzählbar ist, kann es im Axiom $\boldsymbol{R}$ statt „Supremum" ebensogut heißen „Vereinigung". Auch das Axiom $\boldsymbol{U}$ läßt sich formulieren, ohne auf die verbandstheoretischen Suprema in $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ direkt Bezug zu nehmen; die Formulierung mit $\sqsubset$ etwa lautet:

U. *Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{T}$ aus Θ, jeder Menge H aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(H) < +\infty$ und jeder positiven Zahl δ gibt es in Θ eine hinsichtlich $\ll$ terminale Menge Δ von Zerlegungen und eine Menge R aus $\mathfrak{B}$ mit $\mu(HR) < \delta$, so daß jede Komponente einer Zerlegung $\mathfrak{S}$ aus Δ, die nicht in einer Komponente von $\mathfrak{T}$ enthalten ist, eine Teilmenge* mod $\mathfrak{N}$ *von R darstellt.*

Ersetzen wir „enthalten" durch „enthalten mod $\mathfrak{N}$", so haben wir die Formulierung mit $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$.

In rein mengenalgebraischen Untersuchungen von Zellenfunktionen wird gelegentlich das folgende Axiom betrachtet:[1]

---

[1] Jedenfalls im Spezialfall, daß $\ll$ die Feinheit der μ-Norm nach bedeutet, vgl. [20], 4; in allgemeinerer Form schon vorher in der Theorie der Differentia-

U*. Zu jeder Zerlegung $\mathfrak{T}$ aus Θ gibt es eine Menge N aus $\mathfrak{N}$, so daß zu jedem Punkt x aus $E - N$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: ist $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$, $x \in S$ und $S \in \mathfrak{S}$, so ist S in einer Komponente von $\mathfrak{T}$ enthalten.*

Operieren wir mit $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$ statt mit $\sqsubset$, so muß es natürlich „... in einer Komponente von $\mathfrak{T}$ enthalten mod $\mathfrak{N}$“ heißen.

Das Axiom ***U**** läßt sich nun leicht in eine Form bringen, die Analogien zur zweiten Formulierung von ***U*** in § 3 aufweist. Bei beliebigen $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{S}$ aus Θ bezeichnen wir die Vereinigung aller Komponenten von $\mathfrak{S}$, die nicht in einer Komponente von $\mathfrak{T}$ enthalten (bzw. enthalten mod $\mathfrak{N}$) sind, mit $R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}$, und setzen dann $^*P^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{Z}} = \bigcup_{\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}} R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}$, wenn $\mathfrak{Z} \in \Theta$, und $^*P^{\mathfrak{T}} = \bigcap_{\mathfrak{Z} \in \Theta} {^*P^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{Z}}}$. Offenbar ist ***U**** äquivalent damit, daß $^*P^{\mathfrak{T}} = O$ mod $\mathfrak{N}^*$ für jedes $\mathfrak{T}$ aus Θ gilt.

Satz 4.3. *Unter der Annahme **A** folgt **U** aus **U***. Unter den Voraussetzungen **A** und **L** folgt **U*** aus **U**.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{T} \in \Theta$. Wir definieren die folgende Zellenfunktion Ψ: im Fall $K \in \mathfrak{K} - \bigcup \Theta$ sei $\Psi(K) = 0$; im Fall $K \in \mathfrak{S}$ und $\mathfrak{S} \in \Theta$ dagegen sei $\Psi(K) = 0$, wenn K in einer Komponente von $\mathfrak{T}$ enthalten (bzw. enthalten mod $\mathfrak{N}$) ist, und sonst $\Psi(K) = \mu(K)$. Dann bildet $D(\Psi, \mathfrak{S})$ die charakteristische Funktion von $R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}$. Wegen $P^{\mathfrak{T}} = \overline{\lim_{\mathfrak{S}}}\, R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}$ und $^*P^{\mathfrak{T}} = \overline{\lim_{\mathfrak{S}}}^*\, R^{\mathfrak{T}}_{\mathfrak{S}}$, wobei $\overline{\lim}$ den oberen Limes in $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ und $\overline{\lim}^*$ den mengenalgebraischen oberen Limes bedeutet, folgt nun die Behauptung unmittelbar aus dem Satz 4.2.

Wir bemerken, daß die Interpretation der Axiome ***K***, ***N***, ***W***$_1$ und ***Y*** aus § 3 im mengenalgebraischen Fall auf den gleichen Wortlaut führt, während man in ***D*** und ***W*** im allgemeinen auch mod $\mathfrak{N}$ disjunkte Zellensysteme $\mathfrak{J}$ zulassen und in ***E***$_1$ das Wort „Teil“ wie bisher als „enthalten“ oder „enthalten mod $\mathfrak{N}$“ lesen muß.

Die folgende Bedingung ist nun hinreichend und unter der Voraussetzung ***K*** auch notwendig für die Gültigkeit von ***U****:

Zu jeder Zelle K gibt es eine in K enthaltene Menge N aus $\mathfrak{N}$, so daß zu jedem Punkt x aus $K - N$ eine Zerlegung $\mathfrak{Z}$ existiert mit der folgenden Eigenschaft: ist $\mathfrak{Z} \ll \mathfrak{S}$, $x \in S$ und $S \in \mathfrak{S}$, so wird $S \subseteq K$ (bzw. $S \subseteq K$ mod $\mathfrak{N}$).

---

tion abzählbar additiver Mengenfunktionen mit Hilfe punktueller Ableitungsbasen, vgl. [12] S. 25.

Somit ist die folgende Bedingung unter den Voraussetzungen $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{W}_1$ notwendig und unter der Voraussetzung $\boldsymbol{N}$ hinreichend für die Gültigkeit von $\boldsymbol{U}^*$, wenn $\ll$ die Feinheit der μ-Norm nach bedeutet:

Zu jeder Zelle K gibt es eine in K enthaltene Menge N aus $\mathfrak{N}$, so daß zu jedem Punkt $x \in K - N$ eine positive Zahl δ existiert mit der folgenden Eigenschaft: ist $x \in S$, $S \in \mathfrak{K}$ und $\mu(S) < \delta$, so $S \subseteq K$ (bzw. $S \subseteq K$ mod $\mathfrak{N}$).

Auf Interpretationen des Axioms $\boldsymbol{U}^*$ nach dem Muster der Sätze 3.6–3.8, wobei dann die Bedingungen $\boldsymbol{C}^*(M, \mathfrak{L})$ und $\boldsymbol{V}^*$, für $\sqsubset$ bzw. $\ll$, an die Stelle von $\boldsymbol{C}(A, \mathfrak{L})$ und $\boldsymbol{V}$ zu treten hätten,[1] wollen wir nicht eingehen, da sie sich nur auf die rein mengenalgebraische, punktuelle Theorie beziehen und daher aus dem Rahmen dieser Arbeit fallen, doch wollen wir zum Schluß die Überdeckungsbedingung $\boldsymbol{C}^*(M, \mathfrak{L})$ in den Spezialfällen der Feinheitsrelationen $\sqsubset$ (bzw. $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$) und der μ-Norm nach in einer der üblichen Gestalt angepaßten Form hinschreiben und ähnlich mit den punktuellen Derivierten der μ-Norm nach verfahren.

Dafür, daß $\mathfrak{L}$ hinsichtlich $\sqsubset$ (bzw. $\sqsubset$ mod $\mathfrak{N}$) eine feine Quasiüberdeckung von M bilde, ist unter der Annahme $\boldsymbol{K}$ notwendig und unter der Annahme $\boldsymbol{E}_1$ hinreichend, daß folgendes eintritt:

Es ist $M \subseteq E$ und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, und zu jeder Zelle K gibt es eine in K enthaltene Menge N aus $\mathfrak{N}$, so daß zu jedem Punkt x aus $M(K - N)$ eine Zelle J aus $\mathfrak{L}$ mit $x \in J$ und $J \subseteq K$ (bzw. $J \subseteq K$ mod $\mathfrak{N}$) *existiert.*

Dafür, daß $\mathfrak{L}$ hinsichtlich der Feinheit der μ-Norm eine feine Quasiüberdeckung von M bilde, ist unter der Annahme $\boldsymbol{N}$ notwendig und unter der Annahme $\boldsymbol{W}_1$ hinreichend, daß folgendes eintritt:

Es ist $M \subseteq E$ und $\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{K}$, und es gibt eine in M enthaltene Menge N aus $\mathfrak{N}^*$, so daß zu jeder positiven Zahl δ und jedem x aus $M - N$ eine Zelle J aus $\mathfrak{L}$ mit $x \in J$ und $\mu(J) < \delta$ existiert.

Unter den Voraussetzungen $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{W}_1$ wird die obere punktuelle Derivierte einer beliebigen Zellenfunktion Ψ nach der Feinheit der μ-Norm fast überall gegeben durch

---

[1] Siehe z. B. [17], 5.

$$(\bar{D}^* \Psi)(x) = \bigwedge_{\delta > 0} \bigvee_{\substack{x \in J \in \mathfrak{K} \\ \mu(J) < \delta}} \frac{\Psi(J)}{\mu(J)},$$

und zwar gilt diese Gleichung für jeden Punkt x, der in Zellen beliebig kleinen Maßes liegt. $\bigwedge$ und $\bigvee$ bedeuten wieder die Bildung von Infimum und Supremum von Zahlenmengen.

§ 5. Beispiele

Als wichtigste Beispiele und als geläufigste Illustrationen zu den verschiedenen hier behandelten Axiomen treten natürlich die Zerlegungen einer offenen Menge oder eines achsenparallelen Intervalls des gewöhnlichen euklidischen Raumes in achsenparallele Intervalle auf, die bald als offen oder halboffen, bald als abgeschlossen vorausgesetzt werden. Ist E ein achsenparalleles Intervall, so läßt man meist nur endliche Zerlegungen zu. Die Feinheit einer Zerlegung wird im allgemeinen durch den größten der Durchmesser ihrer Komponenten gemessen, woraus $\boldsymbol{U}$ folgt, wenn μ das Lebesguesche Maß bedeutet. Bleibt das Verhältnis von größter und kleinster Kantenlänge der Komponenten aller betrachteten Zerlegungen beschränkt, so fällt dieser Feinheitsbegriff mit dem nach der μ-Norm zusammen, und bekanntlich gilt dann der übliche Vitalische Überdeckungssatz, insbesondere $\boldsymbol{V}_0$, also wegen $\boldsymbol{D}$ auch die Vitalische Bedingung $\boldsymbol{V}$.[1] Im übrigen ist die Theorie solcher Zerlegungen in Intervalle wohlbekannt, und wir wollen statt dessen ein Beispiel betrachten, das nicht in der bisherigen Theorie der Differentiation von Zellenfunktionen vorkommt.

$\mathfrak{B}$ sei eine Boolesche σ-Mengenalgebra mit einer größten Menge E und μ ein σ-endliches Maß auf $\mathfrak{B}$. Wir nehmen für $\mathfrak{K}$ das System *aller* Mengen aus $\mathfrak{B}$ von endlichem und positivem Maß und für Θ das System *aller* disjunkten Zerlegungen von E in Zellen aus $\mathfrak{K}$, d. h. aller disjunkten Teilmengen $\mathfrak{S}$ von $\mathfrak{K}$ mit $\bigcup \mathfrak{S} = E \bmod \mathfrak{N}$. Offenbar filtriert Θ hinsichtlich $\sqsubset$ nach rechts und hat die Eigenschaften $\boldsymbol{K}$ und $\boldsymbol{E}$, und $\boldsymbol{E}$ bleibt richtig, wenn $\mathfrak{S}$ auch ein abzählbares Zellensystem bedeuten darf.

---

[1] Vgl. S. 261.

Satz 5.1. *Jede hinsichtlich* $\sqsubset$ *feine Quasiüberdeckung* $\mathfrak{L}$ *einer beliebigen Teilmenge* M *von* E *enthält ein disjunktes Zellensystem* $\mathfrak{P}$ *mit* $\bigcup \mathfrak{P} = M^*$ mod $\mathfrak{N}$, *wenn* M^* *eine meßbare Hülle von* M *bildet. Insbesondere haben* Θ *und* $\sqsubset$ *die Eigenschaft* $'\boldsymbol{V}^*$, *d. h. die Eigenschaften* $'\boldsymbol{V}$ *und* $'\boldsymbol{L}$.[2]

Beweis. Daß aus der ersten Behauptung wirklich $'\boldsymbol{V}^*$ folgt, ergibt sich unmittelbar aus der zuvor angeführten Verschärfung von $\boldsymbol{E}$. Es sei nun $\mathfrak{L}$ eine hinsichtlich $\sqsubset$ feine Quasiüberdeckung von M. Wir setzen $M^* \neq O$ mod $\mathfrak{N}$ voraus, da sonst nichts zu beweisen bliebe, und betrachten das System Λ aller nicht leeren disjunkten Teilsysteme von $\mathfrak{L}$, deren Elemente in M^* enthalten sind.

Wir beweisen zunächst, daß Λ nicht leer ist. Infolge von $M^* \neq O$ mod $\mathfrak{N}$ und der σ-Endlichkeit von μ gibt es eine Zerlegung $\mathfrak{T}$ aus Θ, so daß M^* die Vereinigung eines Teilsystems von $\mathfrak{T}$ darstellt. Bedeutet Δ die Menge aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ aus Θ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, so gilt voraussetzungsgemäß $M \subseteq \bigcup (\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta)$ mod $\mathfrak{N}^*$. Hiernach und wegen $M \neq O$ mod $\mathfrak{N}^*$ muß nun, da jede Zelle aus $\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$ entweder in M^* enthalten oder zu M^*, d. h. erst recht zu M fremd ist, eine Zelle L aus $\mathfrak{L}$ mit $L \subseteq M^*$ existieren, und wir haben dann $\{L\} \in \Lambda$.

Λ ist offenbar induktiv, denn bildet Π eine hinsichtlich $\subseteq$ total geordnete nicht leere Teilmenge von Λ, d. h. trifft auf je zwei Systeme $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{R}$ aus Π eine der Relationen $\mathfrak{Q} \subseteq \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{Q}$ zu, so stellt $\bigcup \Pi$ wieder ein Zellensystem aus Λ dar. Nach dem Zornschen Lemma gibt es also in Λ ein hinsichtlich $\subseteq$ maximales Zellensystem $\mathfrak{P}$. Nach Definition von Λ ist $\mathfrak{P}$ disjunkt, $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{L}$ und $\bigcup \mathfrak{P} \subseteq M^*$. Wir haben daher nur noch zu zeigen, daß die Menge $R = M^* \sim \bigcup \mathfrak{P}$ zu $\mathfrak{N}$ gehört.

Wäre $R \neq O$ mod $\mathfrak{N}$, so gäbe es eine Zerlegung $\mathfrak{T}$ aus Θ derart, daß R die Vereinigung eines Teilsystems von $\mathfrak{T}$ darstellte. Bedeutete Δ die Menge aller Zerlegungen $\mathfrak{S}$ aus Θ mit $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$, so folgte aus $'\boldsymbol{C}^*(M, \mathfrak{L})$ wiederum $M \subseteq \bigcup(\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta)$ mod $\mathfrak{N}^*$. Hiernach und wegen $MR \neq O$ mod $\mathfrak{N}^*$ müßte nun, da jede Zelle aus $\mathfrak{L} \cap \bigcup \Delta$ entweder in R enthalten oder zu R, d. h. erst recht zu MR fremd ist, eine Zelle L aus $\mathfrak{L}$ mit $L \subseteq R$ existieren. Nach

[2] $'\boldsymbol{V}^*$, $'\boldsymbol{V}$ und $'\boldsymbol{L}$ bedeuten sinngemäß die mit $\sqsubset$ formulierten Bedingungen $\boldsymbol{V}^*$, $\boldsymbol{V}$ und $\boldsymbol{L}$.

Wahl von R wäre aber dann $\mathfrak{P} \cup \{L\} \in A$ im Widerspruch dazu, daß $\mathfrak{P}$ maximal in A sein sollte.

Spezielle Burkill-Kolmogoroffsche Integrale hinsichtlich Θ und $\sqsubset$ stellen die oberen und unteren über E erstreckten Integrale einer reellen in E erklärten Funktion f hinsichtlich des Maßes μ dar.[1] In der Tat ist die Zellenfunktion $\Psi(K) = \mu(K) \sup\limits_K f$ dann und nur dann integrierbar hinsichtlich Θ und $\sqsubset$, wenn das obere Integral $^*\!\int\limits_E f\,d\mu$ existiert, und es gilt dann $'\!\int\limits_E \Psi = {}^*\!\int\limits_E f\,d\mu$; analog mit dem unteren Integral. Die $\mathfrak{S}$-Derivierte von Ψ wird gegeben durch $D(\Psi, \mathfrak{S})(x) = \sup\limits_K f$, wenn $x \in K$ und $K \in \mathfrak{S}$. Aus $\mathfrak{T} \sqsubset \mathfrak{S}$ folgt also $D(\Psi, \mathfrak{T}) \geq D(\Psi, \mathfrak{S})$. Mithin ist Ψ differenzierbar und $'D\Psi = \bigwedge\limits_{\mathfrak{S} \in \Theta} D(\Psi, \mathfrak{S})$, wobei $\bigwedge$ wieder die Bildung des Infimums im Raum der Ortsfunktionen über $\mathfrak{B}/\mathfrak{N}$ bedeutet. $'D\Psi$ ist daher hinsichtlich der Relation $\leq$ mod $\mathfrak{N}$ eine größte unter den $\mathfrak{B}$-meßbaren Funktionen h derart, daß $h \leq \sup\limits_A f\,[A]$[2] für jede Menge A aus $\mathfrak{B}$.

Es sei nun f^* eine hinsichtlich der Relation $\leq$ mod $\mathfrak{N}$ kleinste unter den $\mathfrak{B}$-meßbaren reellen Funktionen g mit $f \leq g$ mod $\mathfrak{N}^*$. Dann gilt

$$f^* = {}'D\Psi \bmod \mathfrak{N}. \tag{5.1}$$

In der Tat läßt sich f^* so wählen, daß sogar $f \leq f^*$ wird, also $\sup\limits_A f \leq \sup\limits_A f^*$ für jede Menge A aus $\mathfrak{B}$. Aus der Definition von $'D\Psi$ folgt hiermit $'D\Psi \leq \sup\limits_A f^*\,[A]$ und daher, weil $'D\Psi$ und f^* beide $\mathfrak{B}$-meßbar sind,

$$'D\Psi \leq f^* \bmod \mathfrak{N}. \tag{5.2}$$

Andererseits ist

$$f^* \leq \sup_A f\,[A] \tag{5.3}$$

für jede Menge A aus $\mathfrak{B}$. Andernfalls gäbe es nämlich eine Menge B aus $\mathfrak{B} \sim \mathfrak{N}$, so daß $\sup\limits_B f < f^*\,[B]$ wäre, und in

---

[1] Vgl. [15].

[2] Wir erinnern daran, daß $h \leq g\,[A]$ bedeuten sollte: $h(x) \leq g(x)$ für fast alle x aus A.

$g(x) = \sup_B f$, wenn $x \in B$, und $g(x) = f^*(x)$, wenn $x \in E \sim B$, hätten wir eine $\mathfrak{B}$-meßbare Funktion g mit $f \leq g$, aber nicht $f^* \leq g \bmod \mathfrak{N}$ im Widerspruch zur Definition von f^*. Aus (5.3) folgt nun $f^* \leq {}'D\Psi \bmod \mathfrak{N}$ und damit nach (5.2) die Behauptung (5.1). Aus ihr resultiert insbesondere ${}'D\Psi = f \bmod \mathfrak{N}$, wenn f meßbar ist.

Bekanntlich ist f^* dann und nur dann integrierbar, wenn ${}^*\int_E f\,d\mu$ existiert, und es wird dann $\int_E f^*\,d\mu = {}^*\int_E f\,d\mu$.[1] Dies ist, im Fall einer Zellenfunktion der speziellen Gestalt $\Psi(K) = \mu(K) \sup_K f$, die im Corollar zum Satz 2.7 enthaltene Gleichung, und zwar auch dann, wenn Ψ nicht notwendig hinsichtlich $\sqsubset$ totalstetig oder von beschränkter Variation ist.

Ganz analoge Betrachtungen lassen sich natürlich im Fall einer Booleschen σ-Algebra $\mathfrak{B}$, auf der ein strikt positives σ-endliches Maß μ definiert ist, anstellen, wenn wir für $\mathfrak{K}$ das System aller von O verschiedenen Elemente aus $\mathfrak{B}$ endlichen Maßes und für Θ das System aller disjunkten Zerlegungen von E in Zellen aus $\mathfrak{K}$ nehmen. Statt des Satzes 5.1 könnten wir dann den folgenden Satz beweisen: Jede hinsichtlich $\sqsubset$ feine Überdeckung eines Elementes A aus $\mathfrak{B}$ enthält ein disjunktes Zellensystem $\mathfrak{P}$ mit $\bigvee \mathfrak{P} = A$; insbesondere haben Θ und $\sqsubset$ die Eigenschaft $'\boldsymbol{V}$. Es sei zum Schluß bemerkt, daß Θ im allgemeinen nicht die Vitalische Eigenschaft $\boldsymbol{V}$ hinsichtlich der Feinheit der μ-Norm hat, selbst wenn $\boldsymbol{N}$ und $\boldsymbol{W}$ erfüllt sind. Im Fall eines euklidischen Raumes und des Lebesgueschen Maßes gibt es z. B. normfeine Überdeckungen von E, bei denen der Durchschnitt zweier beliebiger ihrer Elemente ein positives Maß hat. Θ und die Feinheit der μ-Norm nach erfüllen offenbar im allgemeinen auch weder $\boldsymbol{R}$ noch $\boldsymbol{U}$.

Das folgende Beispiel zeigt, daß unsere Vitalische Bedingung $\boldsymbol{V}$ wirklich eine Verschärfung der sonst üblichen starken Vitalischen Bedingung darstellt, etwa der sogenannten „reduzierten starken Vitalischen Bedingung[2] in der ε-Fassung", die bei uns unter dem Namen $\boldsymbol{V}_0$ auftrat. Θ sei abzählbar, etwa $\Theta = \{\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2, \ldots\}$, und

---

[1] Siehe [16].

[2] Vgl. [21] S. 75.

$\mathfrak{S}_n \sqsubset \mathfrak{S}_{n+1}$. Wir setzen $\mathfrak{K} = \bigcup \Theta$, so daß $\boldsymbol{K}$ gilt, und sprechen dann von einem de la Vallée Poussinschen Netz. Bekanntlich erfüllt Θ mit $\sqsubset$ als Feinheitsrelation das Axiom $\boldsymbol{V}_0$, doch einfache Beispiele zeigen, daß $'\boldsymbol{V}$ nicht zu gelten braucht. In der Tat genügen Θ und $\sqsubset$ im allgemeinen nicht den Forderungen $\boldsymbol{E}$ und $'\boldsymbol{D}$.[1] Dagegen sind $\boldsymbol{E}_1$, $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{L}$ offensichtlich erfüllt.

Literaturverzeichnis

[1] Aumann, G., Reelle Funktionen. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

[2] Birkhoff, G., Lattice theory. 2. Aufl., New York 1948.

[3] Bourbaki, N., Théorie des ensembles (Fasc. de résultats). Actual. sc. industr. 846 (1939).

[4] Bourbaki, N., Intégration. Actual. sci. industr. 1175 (1952).

[5] Caccioppoli, R., Sull'integrazione delle funzioni discontinue. Rend. Circ. mat. Palermo 52, 1–29 (1928).

[6] Carathéodory, C., Entwurf für eine Algebraisierung des Integralbegriffs. Sitz.-Ber. math.-naturw. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München 1938, 27–69.

[7] Cotlar, M. y Y. Frenkel, Una teoria general de integral basada en una extensión del concepto de limite. Univ. nac. Tucumán, Revista, A 6, 113–159 (1947).

[8] Fichera, G., Intorno al passaggio al limite sotto il segno d'integrale. Portugaliae Math. 4, 1–20 (1943).

[9] Gomes, A. Pereira, Introdução ao estudo duma noção de funcional em espaços sem pontos. Portugaliae Math. 5, 1–120 (1946).

[10] Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung. I. 2. Aufl., Berlin 1948.

[11] Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung. III. 2. Aufl., Berlin 1955.

[12] Haupt, O. und Chr. Pauc, Über die Ableitung absolut additiver Mengenfunktionen. Arch. der Math. 1, 23–28 (1948).

[13] Haupt, O. et Chr. Pauc, Propriétés de mesurabilité de bases de dérivation. Portugaliae Math. 13, 37–54 (1953).

[14] Kolmogoroff, A., Untersuchungen über den Integralbegriff. Math. Ann. 103, 654–696 (1930).

[15] Krickeberg, K., Zur Theorie des oberen und unteren Integrals. Math. Nachr. 9, 86–128 (1953).

[16] Krickeberg, K., Darstellungen oberer und unterer Integrale durch Integrale meßbarer Funktionen. Arch. der Math. 4, 432–436 (1953).

[17] Krickeberg, K., La nécessité de certaines hypothèses de Vitali fortes dans la théorie de la dérivation extrême de fonctions d'intervalle. C. r. Acad. Sci., Paris, 238, 764–766 (1954).

[1] Vgl. S. 261.

[18] Loomis, L., On the representation of σ-complete Boolean algebras. Bull. Amer. math. Soc. **53**, 757–760 (1947).

[19] Olmsted, J. M. H., Lebesgue theory on a Boolean algebra. Trans. Amer. math. Soc. **51**, 164–193 (1942).

[20] Pauc, Chr., Contributions à une théorie de la différentiation de fonctions d'intervalle sans hypothèse de Vitali. C. r. Acad. Sci., Paris, **236**, 1937–1939 (1953).

[21] Pauc, Chr., Ableitungsbasen, Prätopologie und starker Vitalischer Satz. J. reine angew. Math. **191**, 69–91 (1953).

[22] Picone-Viola, Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione. Manuali Einaudi. 1952.

[23] Vitali, G., Sull'integrazione per serie. Rend. Circ. mat. Palermo **23**, 137–155 (1907).

[24] Wecken, F., Abstrakte Integrale und fastperiodische Funktionen. Math. Z. **45**, 377–404 (1939).