BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1955

MÜNCHEN 1956

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Fehlerabschätzungen und Verbesserungen der numerischen Charakteristikenmethoden für Anfangswertprobleme in der Gasdynamik

Von Franz Bauhuber in Bad Aibling

Vorgelegt von Herrn Robert Sauer am 14. Januar 1955

Mit 12 Figuren

Zusammenfassung

Die Kenntnis der Fehler der mittels Charakteristikenmethoden gewonnenen numerischen Ergebnisse ist für die Praxis von großer Bedeutung. In der vorliegenden Arbeit werden die Größenordnungen der Verfahrensfehler für die bisher verwendeten Charakteristikenmethoden sowie für verfeinerte Verfahren zur Berechnung stationärer ebener und räumlich-drehsymmetrischer Überschallströmungen ermittelt. Ferner werden praktische Regeln zur überschlagsmäßigen Fehlerabschätzung angegeben und an numerischen Beispielen erläutert.

Einleitung und Problemstellung

Die auf der Charakteristikentheorie für Systeme quasilinearer Differentialgleichungen vom hyperbolischen Typus (vgl. [1]) beruhenden numerischen Differenzenverfahren in charakteristischen Gittern („Charakteristikenverfahren") werden in der Gasdynamik zur Berechnung stationärer Überschallströmungen sowie auch zur Berechnung nichtstationärer Strömungen vielfach verwendet. Die Ergebnisse dieser Rechnungen wurden bisher fast durchwegs ohne genauere Analyse der Fehler benutzt. Dem Verfasser sind nur drei Arbeiten bekannt, in denen Fehlerfragen untersucht werden. M. Holt [3] und P. Teofilato [4] geben sehr rohe Fehlerabschätzungen an, M. A. Hyman [5] behandelt nichtisentropische stationäre Überschallströmungen[1].

[1] Durch die in eckigen Klammern stehenden Ziffern sei auf das Literaturverzeichnis S. 43 verwiesen.

Ziel dieser Arbeit ist es,

1. für die in der Gasdynamik gebräuchlichen numerischen Charakteristikenmethoden praktisch brauchbare Formeln zur überschlagsmäßigen Fehlerabschätzung zu gewinnen,

2. die Charakteristikenverfahren so weiterzuentwickeln, daß bei gleichbleibender Genauigkeit der numerischen Ergebnisse mit größeren Maschenweiten gerechnet werden kann.

Es werden stationäre ebene und räumlich-drehsymmetrische stationäre Überschallströmungen behandelt. Die Untersuchungen beschränken sich auf die Analyse der Verfahrensfehler, und zwar auf Abschätzungen der Größenordnung dieser Verfahrensfehler, ausgedrückt durch Potenzen eines Parameters ε, welcher die Maschenweite der charakteristischen Gitter kennzeichnet. Die Ergebnisse sind ohne Beweise mitgeteilt. Die Herleitungen finden sich in der Dissertation des Verfassers [6].

§ 1. Zusammenstellung der Differentialgleichungen. Hyperbolisches Anfangswertproblem

1. Bezeichnungen

x, y — rechtwinklige Ortskoordinaten bei ebenen, bzw. Zylinderkoordinaten (x-Achse = Symmetrieachse, y = Abstand von der x-Achse) bei räumlich-drehsymmetrischen Strömungen.

$\left.\begin{matrix} d\xi \\ d\eta \end{matrix}\right\}$ — Längenelement auf der $\left.\begin{matrix}\text{rechts-}\\ \text{links-}\end{matrix}\right\}$ laufenden Charakteristik

$d\zeta$ — Längenelement auf der Stromlinie

w — Betrag des Geschwindigkeitsvektors $\mathfrak{w}$

u, v — Komponenten von $\mathfrak{w}$ bezüglich der x- bzw. y-Achse

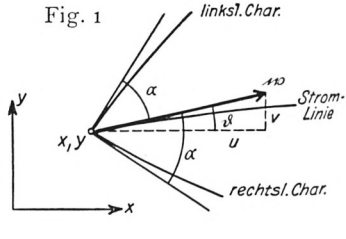
c — örtliche Schallgeschwindigkeit

$M = \frac{w}{c}$ — Mach'sche Zahl

$\alpha = \arcsin \frac{1}{M}$ — Mach'scher Winkel

ϑ — Winkel zwischen $\mathfrak{w}$ und x-Achse

Fig. 1



$\varkappa = \frac{c_p}{c_v}$ Verhältnis der spezifischen Wärmen eines idealen Gases

S Entropie

$s = \frac{S}{c_v}$ auf c_v bezogene Entropie

$$\left.\begin{aligned} \lambda &= 400 + \frac{90}{\pi} \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{\varkappa - 1}{2}} - \frac{90}{\pi} \vartheta \\ \mu &= 600 + \frac{90}{\pi} \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{\varkappa - 1}{2}} + \frac{90}{\pi} \vartheta \end{aligned}\right\}$$

Busemann'sche Geschwindigkeitskoordinaten

Es gelten die Beziehungen

$$\sigma = \lambda + \mu = 1000 + \frac{180}{\pi} \int_{\pi/2}^{\alpha} \frac{\cos^2 \alpha \, d\alpha}{\sin^2 \alpha + \frac{k-1}{2}}; \quad \vartheta[^\circ] = \mu - \lambda - 200.$$

Die Funktionen $\sigma = \sigma(\alpha)$ und $\sigma = \sigma(M)$ sind für die praktische Rechnung tabelliert (vgl. [2], S. 62), so daß die zu vorgegebenen Werten λ, μ gehörigen Mach-Winkel α aus Tafeln entnommen werden können.

2. Differentialgleichungen

Als strömende Medien legen wir im folgenden ideale Gase mit konstanten spezifischen Wärmen zugrunde. Ferner beschränken wir uns auf isoenergetische Strömungen (konstante Staupunkt-Temperatur im ganzen Strömungsfeld). Die Erhaltungssätze von Masse, Impuls und Energie liefern dann unter Vernachlässigung der inneren Reibung und Wärmeleitfähigkeit sowie der Schwerkraft und sonstiger äußerer Kräfte ein System von drei quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für die drei gesuchten Funktionen $u(x, y)$, $v(x, y)$, $s(x, y)$ (vgl. [1], [2]). Für Überschallströmungen ist dieses System vom hyperbolischen Typus, d.h. es existieren drei i. a. voneinander verschiedene reelle Charakteristikenscharen, nämlich die rechts- bzw. linkslaufenden Charakteristiken (Mach-Linien) und die Stromlinien. Nach Einführung der Busemann'schen Geschwindigkeitskoordinaten λ, μ gelten folgende Differentialgleichungen:

Die rechts- bzw. linkslaufenden Mach-Linien sowie die Stromlinien genügen den Richtungsbedingungen

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{dy}{dx}\right)_{1,2} &= \operatorname{tg}(\vartheta \mp \alpha)\\
\left(\frac{dy}{dx}\right)_{3} &= \operatorname{tg}\vartheta .
\end{aligned}
$$

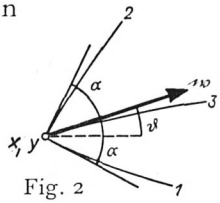


Fig. 2

Beim Fortschreiten längs dieser Kurven ändern sich λ, μ und s gemäß den Verträglichkeitsbedingungen

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\left(\frac{d\lambda}{d\xi}\right)_{1} &= \frac{90}{\pi}\left[\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\left(\frac{ds}{d\xi}\right)_{1} - \tau\,\frac{\sin\alpha\sin\vartheta}{y}\right]\\
\left(\frac{d\mu}{d\eta}\right)_{2} &= \frac{90}{\pi}\left[\frac{\sin 2\alpha}{2\varkappa(\varkappa-1)}\left(\frac{ds}{d\eta}\right)_{2} - \tau\,\frac{\sin\alpha\sin\vartheta}{y}\right]\\
\left(\frac{ds}{d\zeta}\right)_{3} &= 0 .
\end{aligned}
$$

Für ebene Strömungen ist in den Gleichungen (2) $\tau = 0$ zu setzen. Im räumlich-drehsymmetrischen Fall (gekennzeichnet durch $\tau = 1$) haben wir $y \neq 0$ vorauszusetzen, d. h. die Punkte auf der Symmetrieachse sind ausgenommen (für $y = 0$ gelten andere Formeln, vgl. [2], [6]).

3. Hyperbolisches Anfangswertproblem

In der x, y-Ebene sei durch die stetig differenzierbare Funktion $y = k(x)$ eine doppelpunktfreie Kurve k gegeben. Längs k sei die Strömung durch die Anfangswerte $u = u(x, k(x))$, $v = v(x, k(x))$, $s = s(x, k(x))$ oder, was auf dasselbe hinausläuft, durch die Anfangswerte $\lambda = \lambda(x, k(x))$, $\mu = \mu(x, k(x))$, $s = s(x, k(x))$ vorgegeben. Für diese Anfangswerte sei das System der quasilinearen partiellen Differentialgleichungen 1. Ordnung für u, v, s längs k hyperbolisch, so daß durch (1) in jedem Punkte von k und einer gewissen Umgebung (G) von k drei voneinander verschiedene reelle charakteristische Richtungen definiert sind. Wir setzen dabei voraus, daß k keine der Charakteristiken berührt.

Gesucht wird eine in (G) stetig differenzierbare Lösung der Differentialgleichungen (1), (2), welche längs k die vorgeschriebenen Werte annimmt. Weitere Differenzierbarkeitsbedingungen werden in § 5 hinzugefügt.

Es handelt sich im folgenden um numerische Näherungsverfahren zur Lösung des hyperbolischen Anfangswertproblems. Dabei werden die in den Richtungs- und Verträglichkeitsbedin-

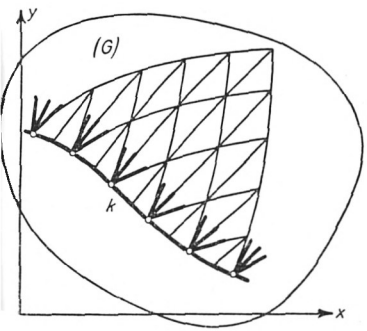


Fig. 3

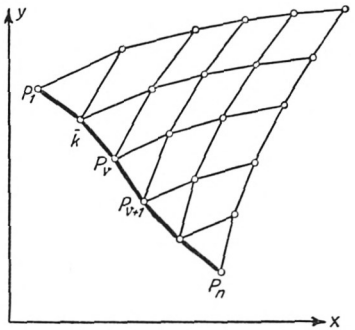


Fig. 4

gungen auftretenden Differentialquotienten durch Differenzenquotienten ersetzt. Die Anfangskurve k wird durch ein Sehnenpolygon $\bar{k}$ von der Sehnenlänge ε angenähert. ε nennen wir die Maschenweite. Die Charakteristikennetze werden durch Streckenzugnetze bzw. Parabelbogen-Gitter approximiert („charakteristische Gitter").

§ 2. Näherungsverfahren zur Berechnung ebener wirbelfreier Überschallströmungen

Bei ebenen isentropischen Strömungen (s = konst) reduziert sich das Problem auf zwei Charakteristikenscharen, und die Verträglichkeitsbedingungen (2) spezialisieren sich zu

$$\begin{matrix}\lambda = \text{konst} \\ \mu = \text{konst.}\end{matrix} \quad \text{längs der} \quad \begin{matrix}\text{rechts-} \\ \text{links-}\end{matrix} \quad \text{laufenden Charakteristik.}$$

Es liegt daher folgende Aufgabe vor:

Gegeben sind zwei Punkte P, Q des zu konstruierenden Mach-Linien-Gitters samt den Geschwindigkeitskoordinaten λ_P, μ_P und λ_Q, μ_Q. Gesucht sind die Ortskoordinaten des nächsten strom-

abwärts gelegenen Gitterpunktes R, in dem sich die von P kommende rechtslaufende und die von Q kommende linkslaufende Mach-Linie schneiden.

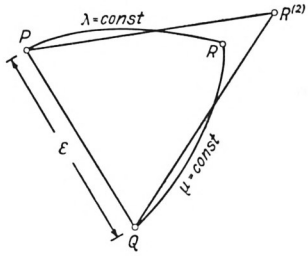


Fig. 5

1. Verfahren zweiter Ordnung

Die Verträglichkeitsbedingungen liefern $\lambda_R = \lambda_P$ und $\mu_R = \mu_Q$, d. h. die Geschwindigkeitskoordinaten des gesuchten Gitterpunktes sind von vorneherein bekannt. Mit λ_R, μ_R sind nach § 1 Ziffer 1 auch die Winkel α_R, ϑ_R bekannt. Man bildet nun die Mittelwerte α_{PR}, ϑ_{PR}, α_{QR}, ϑ_{QR} entweder nach der Vorschrift

$$\alpha_{PR} = \frac{1}{2}(\alpha_P + \alpha_R); \qquad \vartheta_{PR} = \frac{1}{2}(\vartheta_P + \vartheta_R)$$

$$\alpha_{QR} = \frac{1}{2}(\alpha_Q + \alpha_R); \qquad \vartheta_{QR} = \frac{1}{2}(\vartheta_Q + \vartheta_R)$$

oder

$$\alpha_{PR} \text{ aus } \sigma_{PR} = \lambda_P + \frac{1}{2}(\mu_P + \mu_Q); \quad \alpha_{QR} \text{ aus } \sigma_{QR} = \mu_Q + \frac{1}{2}(\lambda_P + \lambda_Q)$$

$$\vartheta_{QR}[°] \text{ aus } \vartheta_{QR} = \mu_Q - \frac{1}{2}(\lambda_P + \lambda_Q) - 200$$

$$\vartheta_{PR}[°] \text{ aus } \vartheta_{PR} = \frac{1}{2}(\mu_P + \mu_Q) - \lambda_P - 200 \qquad \text{(vgl. § 1, Ziff. 1).}$$

Dann sind durch die approximierten Richtungsbedingungen

$$(3) \qquad \frac{y_R^{(2)} - y_P}{x_R^{(2)} - x_P} = \operatorname{tg}(\vartheta_{PR} - \alpha_{PR}); \qquad \frac{y_R^{(2)} - y_Q}{x_R^{(2)} - x_Q} = \operatorname{tg}(\vartheta_{QR} + \alpha_{QR})$$

die Koordinaten $x_R^{(2)}$, $y_R^{(2)}$ eines Näherungspunktes $R^{(2)}$ festgelegt (vgl. Fig. 5).

2. Verfahren dritter Ordnung mit Korrektionen

Dieses Verfahren besteht aus folgenden Rechenschritten:

a) Berechnung der Koordinaten eines ersten Hilfspunktes $R^{(1)}$ (Verfahren 1. Ordnung) aus den Gleichungen:

$$(4) \qquad \frac{y_R^{(1)} - y_P}{x_R^{(1)} - x_P} = \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P); \qquad \frac{y_R^{(1)} - y_Q}{x_R^{(1)} - x_Q} = \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q).$$

b) Ermittlung der Koordinaten x_{R_2}, y_{R_2} eines zweiten Hilfspunktes R_2 aus (α_R und ϑ_R erhalten wir aus den bekannten Werten $\lambda_R = \lambda_P$; $\mu_R = \mu_Q$ nach § 1, Ziff. 1)

$$(5) \qquad \frac{y_{R_2} - y_P}{x_{R_2} - x_P} = \operatorname{tg}(\vartheta_R - \alpha_R); \qquad \frac{y_{R_2} - y_Q}{x_{R_2} - x_Q} = \operatorname{tg}(\vartheta_R + \alpha_R).$$

c) Die Koordinaten $x_R^{(3)}$, $y_R^{(3)}$ des neuen Netzpunktes $R^{(3)}$ finden wir dann aus

$$(6) \qquad \begin{aligned} x_R^{(3)} &= \frac{1}{3}(2x_R^{(1)} + x_{R_2}) + \varepsilon^2 K_1 \\ y_R^{(3)} &= \frac{1}{3}(2y_R^{(1)} + y_{R_2}) + \varepsilon^2 K_2, \end{aligned}$$

wobei $\varepsilon^2 K_1$ und $\varepsilon^2 K_2$ noch zu bestimmende Korrektionen darstellen. Wir geben die Formeln für den Fall an, daß die „Basis-

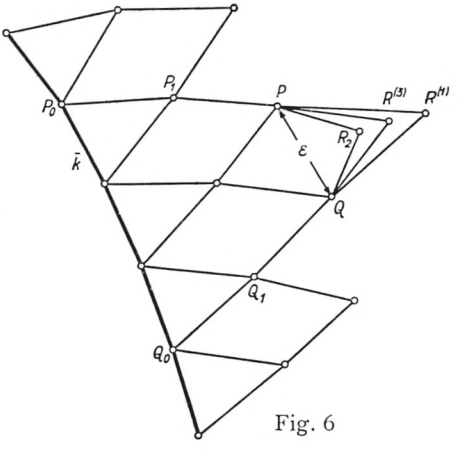


Fig. 6

punkte" P und Q auf der 2., 3., ... Parallelreihe zum Anfangspolygon $\bar{k}$ liegen[1].

[1] Wenn P und Q auf $\bar{k}$ oder auf der ersten Parallelreihe liegen, gelten für die Differenzenquotienten Δ_l und Δ_r modifizierte Formeln (siehe [6]).

$$\varepsilon^2 K_1 = \frac{\Delta_r(P)\,[y_P - y_Q - (x_P - x_Q)\,\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q)]^2 - \Delta_l(Q)\,[y_P - y_Q - (x_P - x_Q)\,\mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P)]^2}{6\,[\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P)]^3}$$

(7)

$$\varepsilon^2 K_2 = \frac{1}{6\,[\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P)]^3} \times$$

$$\times \{\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q)\,\Delta_r(P)\,[y_P - y_Q - (x_P - x_Q)\,\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q)]^2 -$$

$$- \mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P)\,\Delta_l(Q)\,[y_P - y_Q - (x_P - x_Q)\,\mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P)]^2\}$$

$$\Delta_l(Q) = \frac{1}{x_{Q_1} - x_{Q_0}} \left\{ \frac{x_Q - x_{Q_0}}{x_Q - x_{Q_1}} [\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \mathrm{tg}\,(\vartheta_{Q_1} + \alpha_{Q_1})] - \right.$$

$$\left. - \frac{x_Q - x_{Q_1}}{x_Q - x_{Q_0}} [\mathrm{tg}\,(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \mathrm{tg}\,(\vartheta_{Q_0} + \alpha_{Q_0})] \right\}$$

(7 a)

$$\Delta_r(P) = \frac{1}{x_{P_1} - x_{P_0}} \left\{ \frac{x_P - x_{P_0}}{x_P - x_{P_1}} [\mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P) - \mathrm{tg}\,(\vartheta_{P_1} - \alpha_{P_1})] - \right.$$

$$\left. - \frac{x_P - x_{P_1}}{x_P - x_{P_0}} [\mathrm{tg}\,(\vartheta_P - \alpha_P) - \mathrm{tg}\,(\vartheta_{P_0} - \alpha_{P_0})] \right\}.$$

3. Einstufiges Verfahren dritter Ordnung

Wir geben die Gleichungen für den Fall an, daß die „Basispunkte" P und Q auf der 2., 3., . . . „Parallelreihe" zur Anfangskurve liegen (vgl. Fig. 6). Für die Berechnung der 1. und 2. Parallelreihe gelten ähnliche Formeln wie für die folgenden Differenzenausdrücke (vgl. [6]).

Zunächst ermitteln wir die Differenzenquotienten

$$(8)\quad \Delta_r^{(1)} = \frac{(\vartheta_P - \alpha_P - (\vartheta_{P_1} - \alpha_{P_1})}{x_P - x_{P_1}}; \qquad \Delta_l^{(1)} = \frac{\vartheta_Q + \alpha_Q - (\vartheta_{Q_1} + \alpha_{Q_1})}{x_Q - x_{Q_1}}$$

(9)

$$\Delta_r^{(2)} = \frac{2}{x_{P_1} - x_{P_0}} \left\{ \frac{\vartheta_P - \alpha_P - (\vartheta_{P_1} - \alpha_{P_1})}{x_P - x_{P_1}} - \frac{\vartheta_P - \alpha_P - (\vartheta_{P_0} - \alpha_{P_0})}{x_P - x_{P_0}} \right\}$$

$$\Delta_l^{(2)} = \frac{2}{x_{Q_1} - x_{Q_0}} \left\{ \frac{\vartheta_Q + \alpha_Q - (\vartheta_{Q_1} + \alpha_{Q_1})}{x_Q - x_{Q_1}} - \frac{\vartheta_Q + \alpha_Q - (\vartheta_{Q_0} + \alpha_{Q_0})}{x_Q - x_{Q_0}} \right\}$$

$$
(10)\quad
\begin{aligned}
\varepsilon^2 \Delta_r &= \frac{1}{12}\left\{\frac{y_P - y_Q - (x_P - x_Q)\operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q)}{\operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P)}\right\}^2 \times \\
&\quad \times \left[\frac{\pi}{180}\,(\Delta_r^{(1)})^2 \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P) - \Delta_r^{(2)}\right] \\
\varepsilon^2 \Delta_l &= \frac{1}{12}\left\{\frac{y_P - y_Q - (x_P - x_Q)\operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P)}{\operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P)}\right\}^2 \times \\
&\quad \times \left[\frac{\pi}{180}\,(\Delta_l^{(1)})^2 \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \Delta_l^{(2)}\right].
\end{aligned}
$$

Aus den bekannten Größen $\lambda_R = \lambda_P$, $\mu_R = \mu_Q$ finden wir nach § 1 Ziff. 1 die Winkel α_R und ϑ_R, so daß wir bilden können

$$
(11)\quad
\begin{aligned}
\gamma_{PR} &= \frac{1}{2}(\vartheta_R - \alpha_R + \vartheta_P - \alpha_P) + \varepsilon^2 \Delta_r \\
\gamma_{QR} &= \frac{1}{2}(\vartheta_R + \alpha_R + \vartheta_Q + \alpha_Q) + \varepsilon^2 \Delta_l .
\end{aligned}
$$

Damit erhalten wir die Koordinaten $x_R^{(3)}$, $y_R^{(3)}$ des neuen Netzpunktes $R^{(3)}$ aus den approximierten Richtungsgleichungen

$$
(12)\qquad \frac{y_R^{(3)} - y_P}{x_R^{(3)} - x_P} = \operatorname{tg}\gamma_{PR}; \qquad \frac{y_R^{(3)} - y_Q}{x_R^{(3)} - x_Q} = \operatorname{tg}\gamma_{QR}.
$$

4. Verfahren dritter Ordnung unter Verwendung von Parabelbogen

In allen bisher beschriebenen Näherungsverfahren wurden die strengen Charakteristiken durch Streckenzüge approximiert. Ein weiteres Verfahren 3. Ordnung beruht darauf, daß die strengen Charakteristiken durch Parabelbogen approximiert werden. Diese Methode läßt sich auch auf räumlich-drehsymmetrische Überschallströmungen übertragen. Wir beschreiben daher den Gang der Rechnung in § 3 Ziffer 2 bei der Behandlung dieser Strömungen.

§ 3. Näherungsverfahren zur Berechnung räumlich-drehsymmetrischer wirbelfreier Überschallströmungen

Bei räumlich-drehsymmetrischen wirbelfreien Überschallströmungen ($\tau = 1$; $s =$ konst in Gl. (2)) sind die Geschwindig-

keitskoordinaten λ, μ längs der Charakteristiken nicht mehr konstant. Es liegt daher folgendes Problem vor:

Gegeben sind Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten x_P, y_P, λ_P, μ_P; x_Q, y_Q, λ_Q, μ_Q zweier Punkte P und Q, gesucht sind Orts-

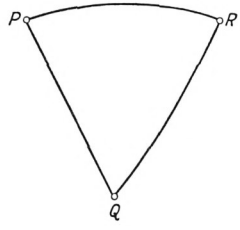


Fig. 7

und Geschwindigkeitskoordinaten desjenigen Punktes R, in dem sich die rechts- bzw. linkslaufende Charakteristik durch P bzw. Q schneiden (vgl. Fig. 7).

1. Näherungsverfahren 2. Ordnung

Diese Methode besteht aus zwei Rechenschritten. Zunächst berechnet man grobe Näherungen $x_R^{(1)}$, $y_R^{(1)}$, $\lambda_R^{(1)}$, $\mu_R^{(1)}$ mit Hilfe des Verfahrens erster Ordnung aus den Gleichungen

$$(13)\quad \frac{y_R^{(1)}-y_P}{x_R^{(1)}-x_P} = \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P); \qquad \frac{y_R^{(1)}-y_Q}{x_R^{(1)}-x_Q} = \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q)$$

$$(14)\quad \begin{aligned} &\frac{\lambda_R^{(1)}-\lambda_P}{\Delta\xi^{(1)}} = -\frac{90}{\pi}\,\frac{\sin\alpha_P \sin\vartheta_P}{y_P}; \quad \frac{\mu_R^{(1)}-\mu_Q}{\Delta\eta^{(1)}} = -\frac{90}{\pi}\,\frac{\sin\alpha_Q \sin\vartheta_Q}{y_Q} \\ &\Delta\xi^{(1)} = \frac{x_R^{(1)}-x_P}{\cos(\vartheta_P-\alpha_P)}; \quad \Delta\eta^{(1)} = \frac{x_R^{(1)}-x_Q}{\cos(\vartheta_Q+\alpha_Q)}. \end{aligned}$$

Nun bilden wir aus den Mittelwerten $\frac{1}{2}(\lambda_R^{(1)}+\lambda_P)$; $\frac{1}{2}(\mu_R^{(1)}+\mu_P)$; $\frac{1}{2}(\lambda_R^{(1)}+\lambda_Q)$; $\frac{1}{2}(\mu_R^{(1)}+\mu_Q)$ die Winkel

$$\alpha_{PR}^{(1)},\ \vartheta_{PR}^{(1)},\ \alpha_{QR}^{(1)},\ \vartheta_{QR}^{(1)}, \qquad \text{(vgl. § 1, Ziffer 1)}$$

und ermitteln die feineren Näherungen

$$x_R^{(2)},\ y_R^{(2)},\ \lambda_R^{(2)},\ \mu_R^{(2)},$$

aus den approximierten Richtungs- und Verträglichkeitsbedingungen:

(15)

$$\frac{y_R^{(2)} - y_P}{x_R^{(2)} - x_P} = \operatorname{tg}(\vartheta_{PR}^{(1)} - \alpha_{PR}^{(1)}); \qquad \frac{y_R^{(2)} - y_Q}{x_R^{(2)} - x_Q} = \operatorname{tg}(\vartheta_{QR}^{(1)} + \alpha_{QR}^{(1)})$$

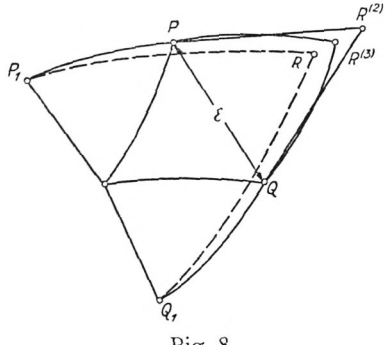
(16)

$$\frac{\lambda_R^{(2)} - \lambda_P}{\Delta \xi^{(2)}} = -\frac{90}{\pi} \frac{\sin \alpha_{PR}^{(1)} \sin \vartheta_{PR}^{(1)}}{\frac{1}{2}(y_P + y_R^{(1)})}; \quad \frac{\mu_R^{(2)} - \mu_Q}{\Delta \eta^{(2)}} = -\frac{90}{\pi} \frac{\sin \alpha_{QR}^{(1)} \sin \vartheta_{QR}^{(1)}}{\frac{1}{2}(y_Q + y_R^{(1)})}$$

$$\Delta \xi^{(2)} = \frac{x_R^{(2)} - x_P}{\cos(\vartheta_{PR}^{(1)} - \alpha_{PR}^{(1)})}; \quad \Delta \eta^{(2)} = \frac{x_R^{(2)} - x_Q}{\cos(\vartheta_{QR}^{(1)} + \alpha_{QR}^{(1)})}.$$

2. Verfahren dritter Ordnung unter Verwendung von Parabelbogengittern

Die im folgenden angegebenen Formeln gelten für den Fall, daß die „Basispunkte" P, Q auf der 1., 2., ..., Parallelreihe zum Anfangspolygon $\bar{k}$ liegen (wenn P und Q auf $\bar{k}$ liegen, gel-



Pig. 8

ten andere Formeln, die sich in [6] finden). Das Verfahren zur Bestimmung der Ortskoordinaten kann auch für ebene Strömungen ($\tau = 0$) verwendet werden (vgl. § 2 Ziff. 4).

Gang der Rechnung:

a) Ausgehend von P und Q berechnet man nach dem in § 2 Ziff. 1 bzw. § 3 Ziff. 2 beschriebenen Verfahren 2. Ordnung für

ebene ($\tau = 0$) bzw. räumlich-drehsymmetrische Strömungen ($\tau = 1$) die Ortskoordinaten $x_R^{(2)}$, $y_R^{(2)}$ im Falle $\tau = 0$ bzw. Ortskoordinaten $x_R^{(2)}$, $y_R^{(2)}$ und Geschwindigkeitskoordinaten $\lambda_R^{(2)}$, $\mu_R^{(2)}$ des Hilfspunktes $R^{(2)}$ im Falle $\tau = 1$ (vgl. Fig. 8).

b) Koordinaten $x_R^{(3)}$, $y_R^{(3)}$ des Parabelschnittpunktes $R^{(3)}$:

Wir ermitteln zunächst die Differenzenquotienten

$$\Delta_r^{(2)}(y_P) = \frac{1}{x_R^{(2)} - x_{P_1}} \left\{ \frac{x_P - x_{P_1}}{x_R^{(2)} - x_P} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_R^{(2)} - \alpha_R^{(2)}) - \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{x_R^{(2)} - x_P}{x_P - x_{P_1}} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P) - \operatorname{tg}(\vartheta_{P_1} - \alpha_{P_1})\right] \right\} \tag{17}$$

$$\Delta_r^{(2)}(y_R^{(2)}) = \frac{1}{x_P - x_{P_1}} \left\{ \frac{x_R^{(2)} - x_{P_1}}{x_R^{(2)} - x_P} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_R^{(2)} - \alpha_R^{(2)}) - \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{x_R^{(2)} - x_P}{x_R^{(2)} - x_{P_1}} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_R^{(2)} - \alpha_R^{(2)}) - \operatorname{tg}(\vartheta_{P_1} - \alpha_{P_1})\right] \right\}$$

$$\Delta_l^{(2)}(y_Q) = \frac{1}{x_R^{(2)} - x_{Q_1}} \left\{ \frac{x_Q - x_{Q_1}}{x_R^{(2)} - x_Q} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_R^{(2)} + \alpha_R^{(2)}) - \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{x_R^{(2)} - x_Q}{x_Q - x_{Q_1}} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q) - \operatorname{tg}(\vartheta_{Q_1} + \alpha_{Q_1})\right] \right\} \tag{18}$$

$$\Delta_l^{(2)}(y_R^{(2)}) = \frac{1}{x_Q - x_{Q_1}} \left\{ \frac{x_R^{(2)} - x_{Q_1}}{x_R^{(2)} - x_Q} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_R^{(2)} + \alpha_R^{(2)}) - \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q)\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{x_R^{(2)} - x_Q}{x_R^{(2)} - x_{Q_1}} \left[\operatorname{tg}(\vartheta_R^{(2)} + \alpha_R^{(2)}) - \operatorname{tg}(\vartheta_{Q_1} + \alpha_{Q_1})\right] \right\}$$

und bilden

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{2}{3}\,\Delta_r^{(2)}(y_P) + \frac{1}{3}\,\Delta_r^{(2)}(y_R^{(2)}); \qquad & a_2 &= \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P) \\ b_1 &= \frac{2}{3}\,\Delta_l^{(2)}(y_Q) + \frac{1}{3}\,\Delta_l^{(2)}(y_R^{(2)}); \qquad & b_2 &= \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q). \end{aligned} \tag{19}$$

Die „rechtslaufende Parabel" $Y_r(x)$ durch den Punkt P

$$Y_r(x) = y_P + \frac{1}{2}\,a_1(x - x_P)^2 + a_2(x - x_P) \tag{20}$$

und die „linkslaufende Parabel" $Y_l(x)$ durch den Punkt Q

$$Y_l(x) = y_Q + \frac{1}{2}\,b_1(x - x_Q)^2 + b_2(x - x_Q) \tag{21}$$

schneiden sich im gesuchten neuen Gitterpunkt $R^{(3)}$ mit den Koordinaten

$$x = x_R^{(3)}; \quad Y_r(x_R^{(3)}) = Y_l(x_R^{(3)}) = y_R^{(3)}. \tag{22}$$

c) Bei räumlich-drehsymmetrischen Strömungen haben wir nun noch die Geschwindigkeitskoordinaten $\lambda_R^{(3)}$, $\mu_R^{(3)}$ zu bestimmen: Dazu brauchen wir die Längen der Parabelbogen

$$\begin{aligned} \widehat{PR}^{(3)} &= \Delta\widehat{\xi}^{(3)} = (x_R^{(3)} - x_P) + \frac{a_1^2}{6}(x_R^{(3)} - x_P)^3 \\ \widehat{QR}^{(3)} &= \Delta\widehat{\eta}^{(3)} = (x_R^{(3)} - x_Q) + \frac{b_1^2}{6}(x_R^{(3)} - x_Q)^3 \end{aligned} \tag{23}$$

sowie die Differenzenquotienten $\Delta_r^{(2)}(a_P)$, $\Delta_r^{(2)}(\vartheta_P)$, $\Delta_r^{(2)}(y_P)$ bzw. $\Delta_l^{(2)}(a_Q)$, $\Delta_l^{(2)}(\vartheta_Q)$, $\Delta_l^{(2)}(y_Q)$, die wir nach der Vorschrift

$$\Delta_r^{(2)}(f_P) = \frac{2}{\widehat{P_1P} + \widehat{PR}^{(3)}} \left\{ \frac{f_R^{(2)} - f_P}{\widehat{PR}^{(3)}} - \frac{f_P - f_{P_1}}{\widehat{P_1P}} \right\}$$

(24) bzw.

$$\Delta_l^{(2)}(f_Q) = \frac{2}{\widehat{Q_1Q} + \widehat{QR}^{(3)}} \left\{ \frac{f_R^{(2)} - f_Q}{\widehat{QR}^{(3)}} - \frac{f_Q - f_{Q_1}}{\widehat{Q_1Q}} \right\}$$

zu bilden haben ($\widehat{P_1P}$ und $\widehat{Q_1Q}$ sind dabei die Bogen der Näherungsparabeln durch die Punkte P_1, P bzw. Q_1, Q, vgl. Fig. 8). Ferner berechnen wir $a_{m,r}$; $\vartheta_{m,r}$; $y_{m,r}$ bzw. $a_{m,l}$; $\vartheta_{m,l}$; $y_{m,l}$ nach der Vorschrift

$$f_{m,r} = \frac{1}{2}(f_P + f_R^{(2)}) - \frac{1}{8}(\Delta\widehat{\xi}^{(3)})^2 \Delta_r^{(2)}(f_P)$$

(25) bzw.

$$f_{m,l} = \frac{1}{2}(f_Q + f_R^{(2)}) - \frac{1}{8}(\Delta\widehat{\eta}^{(3)})^2 \Delta_l^{(2)}(f_Q).$$

Nun ermitteln wir λ_R^{I}, λ_R^{II}, λ_R^{III} bzw. μ_R^{I}, μ_R^{II}, μ_R^{III} aus den Verträglichkeitsbedingungen

$$\begin{aligned} \lambda_R^{\mathrm{I}} &= \lambda_P - \frac{90}{\pi} \frac{\sin a_P \sin \vartheta_P}{y_P} \Delta\widehat{\xi}^{(3)} \\ \lambda_R^{\mathrm{II}} &= \lambda_P - \frac{90}{\pi} \frac{\sin a_{m,r} \sin \vartheta_{m,r}}{y_{m,r}} \Delta\widehat{\xi}^{(3)} \\ \lambda_R^{\mathrm{III}} &= \lambda_P - \frac{90}{\pi} \frac{\sin a_R^{(2)} \sin \vartheta_R^{(2)}}{y_R^{(2)}} \Delta\widehat{\xi}^{(3)} \end{aligned} \tag{26}$$

bzw.

$$\mu_R^{\mathrm{I}} = \mu_Q - \frac{90}{\pi} \frac{\sin \alpha_Q \sin \vartheta_Q}{y_Q} \Delta \bar{\eta}^{(3)}$$

$$\mu_R^{\mathrm{II}} = \mu_Q - \frac{90}{\pi} \frac{\sin \alpha_{m,l} \sin \vartheta_{m,l}}{y_{m,l}} \Delta \bar{\eta}^{(3)} \tag{27}$$

$$\mu_R^{\mathrm{III}} = \mu_Q - \frac{90}{\pi} \frac{\sin \alpha_R^{(2)} \sin \vartheta_R^{(2)}}{y_R^{(2)}} \Delta \bar{\eta}^{(3)}.$$

Die gesuchten Geschwindigkeitskoordinaten $\lambda_R^{(3)}$, $\mu_R^{(3)}$ im neuen Netzpunkt $R^{(3)}$ erhalten wir schließlich durch die Mittelbildungen

$$\lambda_R^{(3)} = \frac{1}{6} (\lambda_R^{\mathrm{I}} + 4\lambda_R^{\mathrm{II}} + \lambda_R^{\mathrm{III}})$$

$$\mu_R^{(3)} = \frac{1}{6} (\mu_R^{\mathrm{I}} + 4\mu_R^{\mathrm{II}} + \mu_R^{\mathrm{III}}). \tag{28}$$

§ 4. Näherungsverfahren für nicht isentropische Überschallströmungen

Es handelt sich hier um folgendes Problem:

Zwei Punkte P bzw. Q des zu konstruierenden Mach-Linien-Gitters sind samt Geschwindigkeitskoordinaten λ_P, μ_P bzw. λ_Q, μ_Q und Entropie s_P bzw. s_Q gegeben. Gesucht ist der neue Gitter-

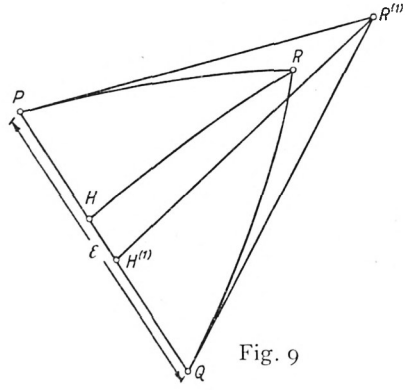


Fig. 9

punkt R, in dem sich die durch P bzw. Q gehenden rechts- bzw. linkslaufenden Charakteristiken schneiden, samt den Werten λ_R, μ_R, s_R (vgl. Fig. 9).

Während bei wirbelfreien Strömungen der Geschwindigkeitsvektor $\mathfrak{w}$ bereits durch λ und μ bestimmt ist, ist dieser bei nicht wirbelfreien Strömungen erst nach Kenntnis von λ, μ und der Entropie s festgelegt. Da aus der dritten der Verträglichkeitsbedingungen (2) die Konstanz der Entropie s längs der Stromlinien folgt, werden zum Aufbau der charakteristischen Gitter neben den Mach-Linien nunmehr noch die Stromlinien herangezogen.

Verfahren erster Ordnung

Bei diesem Verfahren berechnet man im ebenen Fall ($\tau = 0$) bzw. bei räumlich-drehsymmetrischen Strömungen ($\tau = 1$) die Koordinaten $x_R^{(1)}$, $y_R^{(1)}$ eines Näherungspunktes $R^{(1)}$ als Schnittpunkt der in P bzw. Q an die rechts- bzw. linkslaufenden Charakteristiken gelegten Tangenten (vgl. Fig. 9) aus

$$(29)\qquad \frac{y_R^{(1)}-y_P}{x_R^{(1)}-x_P} = \operatorname{tg}(\vartheta_P - \alpha_P)\,; \qquad \frac{y_R^{(1)}-y_Q}{x_R^{(1)}-x_Q} = \operatorname{tg}(\vartheta_Q + \alpha_Q)\,.$$

Die strenge Stromlinie durch R schneidet $\overline{PQ}$ im Punkt H. Die Koordinaten eines zu H gehörigen Näherungspunktes $H^{(1)}$ erhält man aus den Gleichungen

$$(30)\qquad \frac{y_H^{(1)}-y_Q}{x_H^{(1)}-x_Q} = \frac{y_P-y_Q}{x_P-x_Q}\,; \qquad \frac{y_H^{(1)}-y_R^{(1)}}{x_H^{(1)}-x_R^{(1)}} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\vartheta_P + \vartheta_Q)\,.$$

Die Entropie $s_H^{(1)}$ im Punkte $H^{(1)}$ ermittelt man durch lineare Interpolation

$$(31)\qquad s_H^{(1)} = \frac{\overline{H^{(1)}Q}\cdot s_P + \overline{PH^{(1)}}\cdot s_Q}{\overline{PQ}}$$

mit

$$\overline{H^{(1)}Q} = \sqrt{(x_H^{(1)}-x_Q)^2+(y_H^{(1)}-y_Q)^2}\,; \quad \overline{PH^{(1)}} = \sqrt{(x_H^{(1)}-x_P)^2+(y_H^{(1)}-y)^2}\,.$$

Da die Entropie s längs einer Stromlinie konstant ist, setzt man

$$(32)\qquad s_R^{(1)} = s_H^{(1)}\,.$$

Die Geschwindigkeitskoordinaten $\lambda_R^{(1)}$, $\mu_R^{(1)}$ ergeben sich dann aus den Verträglichkeitsbedingungen

$$(33)\quad \begin{aligned} \lambda_R^{(1)} &= \lambda_P + \frac{90}{\pi}\left\{\frac{\sin 2\alpha_P}{2\varkappa(\varkappa-1)}(s_R^{(1)}-s_P) - \tau\,\frac{\sin\alpha_P\,\sin\vartheta_P}{y_P}\,\Delta\xi^{(1)}\right\} \\ \mu_R^{(1)} &= \mu_Q + \frac{90}{\pi}\left\{\frac{\sin 2\alpha_Q}{2\varkappa(\varkappa-1)}(s_R^{(1)}-s_Q) - \tau\,\frac{\sin\alpha_Q\,\sin\vartheta_Q}{y_Q}\,\Delta\eta^{(1)}\right\} \end{aligned}$$

$$\Delta\xi^{(1)} = \frac{x_R^{(1)}-x_P}{\cos(\vartheta_P-\alpha_P)}\,; \qquad \Delta\eta^{(1)} = \frac{x_R^{(1)}-x_Q}{\cos(\vartheta_Q+\alpha_Q)}\,.$$

In der Dissertation des Verfassers [6] sind auch Verfahren 2. Ordnung angegeben.

§ 5. Größenordnung der Verfahrensfehler. Regeln zur überschlägigen Fehlerabschätzung

Wir setzen voraus, daß bei den Verfahren k-ter Ordnung die Funktionen $\alpha(x,y)$, $\vartheta(x,y)$ stetige k-te Ableitungen, $s(x,y)$ stetige $(k+1)$-te Ableitungen in dem in Frage stehenden Bereich der (x,y)-Ebene besitzen. Ferner dürfen die Charakteristiken-Tangenten in keinem Punkt des (x,y)-Bereiches zur y-Achse parallel sein. Dann gelten für die Größenordnung der Verfahrensfehler der Näherungsverfahren k-ter Ordnung die Abschätzungen

$$(34)\qquad x_R^{(k)}-x_R = o(\varepsilon^{k+1})\,; \quad y_R^{(k)}-y_R = o(\varepsilon^{k+1})\,;$$
$$\lambda_R^{(k)}-\lambda_R = o(\varepsilon^{k+1})\,; \quad \mu_R^{(k)}-\mu_R = o(\varepsilon^{k+1})\,; \quad s_R^{(k)}-s_R = o(\varepsilon^{k+1}).$$

Dabei verstehen wir unter $o(\varepsilon^{k+1})$ Funktionen der Maschenweite ε, die mit $\varepsilon \to 0$ in der Größenordnung ε^{k+1} verschwinden. Mit $x_R, y_R, \ldots, s_R$ sind die strengen Werte, mit $x_R^{(k)}, y_R^{(k)}, \ldots, s_R^{(k)}$ die zugehörigen Näherungswerte bezeichnet.

Aus den obigen Abschätzungsformeln ergeben sich folgende einfachen Regeln zur überschlagsmäßigen Fehlerabschätzung: Ausgehend von der Anfangskurve berechnen wir nach dem Verfahren k-ter Ordnung unter Zugrundelegung der Maschenweite ε

zwei Parallelreihen von Gitterpunkten. Hierauf wiederholen wir die Rechnung mit der doppelten Maschenweite 2ε (vgl. Fig. 10).

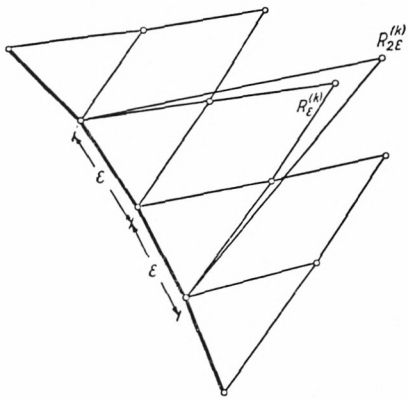


Fig. 10

Dann folgt für den Fehler bei der feineren Rechnung überschlagsweise

$$
\begin{aligned}
x_\varepsilon - x &\approx \frac{x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon}{2^k - 1}; \quad y_\varepsilon - y \approx \frac{y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon}{2^k - 1} \\
\lambda_\varepsilon - \lambda &\approx \frac{\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_\varepsilon}{2^k - 1}; \quad \mu_\varepsilon - \mu \approx \frac{\mu_{2\varepsilon} - \mu_\varepsilon}{2^k - 1} \\
\alpha_\varepsilon - \alpha &\approx \frac{\alpha_{2\varepsilon} - \alpha_\varepsilon}{2^k - 1}; \quad \vartheta_\varepsilon - \vartheta \approx \frac{\vartheta_{2\varepsilon} - \vartheta_\varepsilon}{2^k - 1} \\
s_\varepsilon - s &\approx \frac{s_{2\varepsilon} - s_\varepsilon}{2^k - 1}.
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Die Größen ohne Index kennzeichnen dabei die strengen Werte, die Indizes ε bzw. 2ε die mit der Maschenweite ε bzw. 2ε nach dem Verfahren k-ter Ordnung berechneten Näherungswerte.

Für die praktische Durchführung empfiehlt es sich, immer zwei Parallelreihen von Gitterpunkten zu ermitteln, anschließend die Rechnung mit der doppelten Maschenweite zu wiederholen und

die obigen Abschätzungsformeln im Sinne von Verbesserungen zu verwenden. Die verbesserten Werte

$$x_v = x_\varepsilon - \frac{x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon}{2^k - 1} \quad \text{usw.} \tag{36}$$

werden dann der weiteren Rechnung zugrunde gelegt.

Anhang

A. Fehlerformeln für die einzelnen Verfahren

1. Ebene Strömungen

Verfahren	Fehler in x $x_\varepsilon - x \approx$	Fehler in y $y_\varepsilon - y \approx$
Verf. 2. Ordng. § 2 Ziff. 1	$\frac{1}{3}(x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon)$	$\frac{1}{3}(y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon)$
Verf. 3. Ordng. Ziff. 2 § 2 Ziff. 3 Ziff. 4	$\frac{1}{7}(x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon)$	$\frac{1}{7}(y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon)$

2. Drehsymmetrisch-räumliche Strömungen

Verfahren	Fehler in x $x_\varepsilon - x \approx$	Fehler in y $y_\varepsilon - y \approx$	Fehler in λ $\lambda_\varepsilon - \lambda \approx$	Fehler in μ $\mu_\varepsilon - \mu \approx$
Verf. 1. Ordng. § 3 Ziff. 1	$x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon$	$y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon$	$\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_\varepsilon$	$\mu_{2\varepsilon} - \mu_\varepsilon$
Verf. 2. Ordng. § 3 Ziff. 1	$\frac{1}{3}(x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon)$	$\frac{1}{3}(y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon)$	$\frac{1}{3}(\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_\varepsilon)$	$\frac{1}{3}(\mu_{2\varepsilon} - \mu_\varepsilon)$
Verf. 3. Ordng. § 3 Ziff. 2	$\frac{1}{7}(x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon)$	$\frac{1}{7}(y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon)$	$\frac{1}{7}(\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_\varepsilon)$	$\frac{1}{7}(\mu_{2\varepsilon} - \mu_\varepsilon)$

3. Nichtisentropische ebene ($\tau = 0$) und drehsymmetrisch-räumliche Strömungen ($\tau = 1$)

Verfahren	Fehler in x $x_\varepsilon - x \approx$	Fehler in y $y_\varepsilon - y \approx$	Fehler in λ $\lambda_\varepsilon - \lambda \approx$	Fehler in μ $\mu_\varepsilon - \mu \approx$	Fehler in s $s_\varepsilon - s \approx$
Verf. 1. Ordng. § 4	$x_{2\varepsilon} - x_\varepsilon$	$y_{2\varepsilon} - y_\varepsilon$	$\lambda_{2\varepsilon} - \lambda_\varepsilon$	$\mu_{2\varepsilon} - \mu_\varepsilon$	$s_{2\varepsilon} - s_\varepsilon$

B. Rechenbeispiele

Wir erproben nun die in den §§ 2, 3 beschriebenen Näherungsverfahren für ebene bzw. räumlich-drehsymmetrische Strömungen am Beispiel der ebenen bzw. räumlich-drehsymmetrischen Quellströmung (vgl. [2], § 3 S. 17).

1. Ebene Quellströmung

Auf der rechts- bzw. linkslaufenden Charakteristik sind die Ortskoordinaten der Punkte 2, 4 bzw. 1, 3 bekannt. Ausgehend

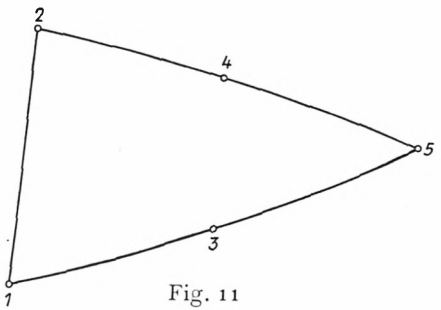


Fig. 11

von den Punkten 3 und 4 werden nun mit Hilfe der verschiedenen Näherungsverfahren Näherungen für den Punkt 5 gewonnen und mit den bekannten Koordinaten des strengen Punktes 5 verglichen:

Verfahren	x_5	y_5	Fehler in x	Fehler in y
2. Ordnung § 2 Ziff. 1	2,900509	—0,000229	$+4534 \cdot 10^{-6}$	$-229 \cdot 10^{-6}$
3. Ordnung § 2 Ziff. 2	2,893601	—0,000189	$-2374 \cdot 10^{-6}$	$-189 \cdot 10^{-6}$
3. Ordnung § 2 Ziff. 3	2,895884	—0,000235	$-91 \cdot 10^{-6}$	$-235 \cdot 10^{-6}$
3. Ordnung § 2 Ziff. 4	2,897394	—0,000218	$+1419 \cdot 10^{-6}$	$-218 \cdot 10^{-6}$
Strenge Werte	2,895975	0	—	—

Anfangswerte $x_4 = 2{,}147070$; $x_3 = 2{,}080565$
$y_4 = +0{,}282048$; $y_3 = -0{,}303973$

Räumlich-drehsymmetrische Quellströmung

In den Punkten 1, 0, 2 sind Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten vorgegeben. Es wurden nach den Verfahren 1. und 2. Ordnung (vgl. § 3 Ziff. 1) Näherungen für Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten des Punktes 3 einmal mit der Maschenweite ε und sodann mit der doppelten Maschenweite berechnet. Die

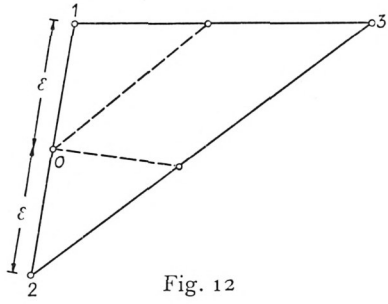


Fig. 12

bei der feineren Rechnung gewonnenen Orts- und Geschwindigkeitskoordinaten wurden anschließend nach den in § 5 angegebenen Abschätzungsformeln verbessert. Den verbesserten λ, μ im verbesserten Punkt werden sodann die strengen λ, μ des verbesserten Punktes gegenübergestellt:

Verfahren 2. O.

Maschenweite	x_3	y_3	λ_3	μ_3
2ε	1,92831	0,51501	568,333	383,440
ε	1,92448	0,51533	568,337	383,359
Verbesserte Näherungswerte	1,92320	0,51544	568,338	383,332
Strenge λ, μ im verbesserten Punkt	1,92320	0,51544	568,339	383,342

Verfahren 1. O.

Maschenweite	x_3	y_3	λ_3	μ_3
2ε	1,93153	0,51646	568,096	382,737
ε	1,92857	0,51581	568,223	383,065
Verbesserte Näherungswerte	1,92561	0,51516	568,350	383,393
Strenge λ, μ im verbesserten Punkt	1,92561	0.51516	568,329	383,306

Literaturverzeichnis

[1] R. Sauer: Anfangswertprobleme bei partiellen Differentialgleichungen, Springer 1952.

[2] R. Sauer: Einführung in die Theoretische Gasdynamik, 2. Auflage, Springer 1951.

[3] M. Holt: The Numerical Method of Characteristics for Supersonic Flows with Axial Symmetry, Quart. Journ. Mech. and Applied Math. Vol. II, Pt. 4 (1949).

[4] P. Teofilato: Applicazione del metodo delle caratteristiche alla corrente supersonica vorticosa, Atti Accad. Naz. Linci. Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) 10, 2, 124–129. Feb. 1951.

[5] M. A. Hyman: On the Numerical Solution of Partial Differential Equations. Diss. Delft 1953.

[6] F. Bauhuber: Fehlerabschätzungen und Verbesserungen der numerischen Charakteristikenmethoden für Anfangswertprobleme in der Gasdynamik. Diss. München 1954.