Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1954

München 1955
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die Irrationalität von π

Von **Theodor Schneider** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 4. Juni 1954

Es soll gezeigt werden, daß e^α und α nicht beide aus dem Gaußschen Körper $\Re(i)$ sind, worin für $\alpha = i\pi$ die Irrationalität von π enthalten ist. Die Frage, ob nach Vorliegen des einfachen Nivenschen Irrationalitätsbeweises für π[1] eine weitere Behandlung dieses Gegenstandes gerechtfertigt ist, ist naheliegend. Hierzu ist zu sagen, daß abgesehen von dem größeren Umfang des hier Bewiesenen in dem Nivenschen Beweis und in den Anwendungen der Nivenschen Methode von Koksma[2] und Butlewski[3] auf die Untersuchung der Irrationalität von Werten der Exponentialfunktion mit rationalen bzw. ganzrationalen Exponenten, die auch mit der Methode von Hermite[4] eng verwandt sind, ein spezielles trigonometrisches Integral entwickelt werden muß und hieraus Schlüsse gezogen werden, wobei die Frage nach dem Warum nicht leicht zu beantworten ist. Hier wollen wir uns den bekannten ganz einfachen Beweis der Irrationalität von e zum Vorbild nehmen und die darin enthaltene Methode insofern lediglich verschärfen, als wir an Stelle der Potenzreihenentwicklung eine Interpolationsreihe mit zwei verschiedenen Interpolationsstellen treten lassen. Für die Abschätzung der Entwicklungskoeffizienten dieser Interpolationsreihe nach oben verwenden wir die Cauchysche Integralformel.

Angenommen, es seien e^α und α beide aus $\Re(i)$, und wir schreiben $e^\alpha = \dfrac{P+iQ}{R}$ und $\alpha = \dfrac{p+iq}{r}$ mit ganzrationalen p, q, r, P, Q, R. Wir bilden für die Funktion $e^{\alpha z}$ an den Stellen

---

[1] Bull. Amer. math. Soc. **53**, 509 (1947).

[2] Nieuw Arch. Wiskunde II. S. **23**, 39 (1949).

[3] Colloq. math. **1**, 197–198 (1948).

[4] Oeuvres, Bd. III, 153–155.

$$z_\nu = \begin{Bmatrix} 0 & \text{für gerades } \nu \\ 1 & \text{für ungerades } \nu \end{Bmatrix}$$

die Interpolationsreihe

$$e^{\alpha z} = \gamma_0 + \gamma_1 (z - z_0) + \cdots + \gamma_n (z - z_0)(z - z_1) \cdots (z - z_{n-1}) + \cdots$$

Dann ist mit der Bezeichnung $n = 2t + \delta$ und t ganzzahlig, $\delta = 0$ oder 1

$$(1) \qquad \gamma_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{e^{\alpha\zeta}\, d\zeta}{\zeta^{t+1} (\zeta - 1)^{t+\delta}},$$

wobei C ein Kreis um den Nullpunkt sei, der die Stelle $\zeta = 1$ im Innern enthält. Nach der Cauchyschen Integralformel folgt aus (1)

$$(2) \qquad \gamma_n = \frac{1}{t!} \left(\frac{e^{\alpha z}}{(z-1)^{t+\delta}} \right)^{(t)} \Big/_{z=0} + \frac{1}{(t+\delta-1)!} \left(\frac{e^{\alpha z}}{z^{t+1}} \right)^{(t+\delta-1)} \Big/_{z=1}.$$

Die Ableitung $\left(\frac{e^{\alpha z}}{(z-1)^{t+\delta}} \right)^{(t)}$ ist ein Quotient, dessen Zähler sich als Polynom in z und als Linearform in $e^{\alpha z}, \alpha e^{\alpha z}, \ldots, \alpha^t e^{\alpha z}$ mit ganzrationalen Koeffizienten ergibt und dessen Nenner ein Teiler von $(z-1)^{2t+\delta}$ ist, also für $z = 0$ wegen $\alpha = \frac{p + iq}{r}$ eine komplexe Zahl $a_1 + b_1 i$ mit rationalen a_1 und b_1, deren Nenner in r^t aufgehen. Analog erkennen wir $\left(\frac{e^{\alpha z}}{z^{t+1}} \right)^{(t+\delta-1)}$ als Quotienten, dessen Zähler ein Polynom in z, eine Linearform in $e^{\alpha z}, \alpha e^{\alpha z}, \ldots, \alpha^{t+\delta-1} e^{\alpha z}$ mit ganzrationalen Koeffizienten und dessen Nenner ein Teiler von $z^{2t+\delta}$ ist, also für $z = 1$ wegen $e^\alpha = \frac{P + iQ}{R}$ und $\alpha = \frac{p + iq}{r}$ ebenfalls als eine komplexe Zahl $a_2 + b_2 i$ mit rationalen a_2 und b_2, deren Nenner in $r^{t+\delta-1} \cdot R$ aufgehen. Damit folgt aus (2), daß γ_n eine komplexe Zahl $a + bi$ mit rationalen a und b darstellt, deren Nenner Teiler von $t!\, r^t \cdot R$ sind. Also muß, falls γ_n nicht verschwindet, der Absolutbetrag

$$(3) \qquad |t!\, r^t R\, \gamma_n| \geq 1$$

sein. Es sei nun $n > 5$, also $t > 2$, und C in (1) ein Kreis mit Radius $|\zeta| = t$. Dann folgt $|\zeta - 1| > \frac{t}{2}$, mithin aus (1) und $\operatorname*{Max}_{|\zeta|=t} |e^{\alpha\zeta}| \leq e^{|\alpha| t}$

$$|\gamma_n| < \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{|\alpha| t}}{t^{t+1}\left(\frac{t}{2}\right)^{t+\delta}} \cdot 2\pi t < e^{|\alpha| t}\, 2^{t+\delta}\, t^{-(2t+\delta)}.$$

Dies mit (3) kombiniert, liefert die Ungleichung

$$t!\, r^t R\, e^{|\alpha| t}\, 2^{t+\delta} > t^{2t+\delta},$$

und daraus folgt wegen $t^t > t!$

$$r^t R\, e^{|\alpha| t}\, 2^{t+\delta} > t^{t+\delta},$$

was für genügend großes t unmöglich ist. Also muß ein N existieren, daß für alle $n > N$ die Entwicklungskoeffizienten γ_n verschwinden, d. h. daß die Interpolationsreihe und damit auch die Potenzreihen von $e^{\alpha z}$ um $z = 0$ und $z = 1$ abbrechen. Daraus folgt, daß unsere eingangs gemachte Annahme, e^{α} und α gehörten beide dem Gaußschen Körper $\mathfrak{R}(i)$ an, falsch sein muß.