Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1953

München 1954
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Über die quaternionalen projektiven Räume

Von **Friedrich Hirzebruch**, z. Z. Princeton*

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 6. November 1953

Einleitung

In dieser Arbeit soll untersucht werden, ob die quaternionalen projektiven Räume $P_k(Q)$ eine fast-komplexe Struktur zulassen, die mit der natürlichen differenzierbaren Struktur von $P_k(Q)$ verträglich ist. Zu diesem Zwecke werden zunächst die Pontrjaginschen Klassen der $4k$-dimensionalen Mannigfaltigkeit $P_k(Q)$ bestimmt. Dann ergibt sich mit Hilfe der Methode von Wu[1] der folgende Satz:

Es gibt für $P_k(Q)$ im Falle $k \neq 2, 3$ keine fast-komplexe Struktur, die mit der natürlichen differenzierbaren Struktur von $P_k(Q)$ verträglich ist. Insbesondere ist $P_k(Q)$ für $k \neq 2, 3$ keine komplexe Mannigfaltigkeit.

$P_1(Q)$ ist die 4-dimensionale Sphäre S^4. Für $k = 1$ besagt also der obige Satz, daß S^4 keine mit ihrer natürlichen differenzierbaren Struktur verträgliche fast-komplexe Struktur besitzt. Diese zuerst von C. Ehresmann und H. Hopf[2] bewiesene Tatsache war der Anfang einer Reihe von Untersuchungen zur Frage, welche differenzierbaren Mannigfaltigkeiten fast-komplexe Strukturen besitzen. (Inzwischen ist bekannt, daß die Sphären S^{2k} für $k \neq 1, 3$ keine fast-komplexe Struktur besitzen.[3] Dies ist ohne Einschränkung über die zugrunde gelegte differenzierbare Struktur richtig.)

---

* The Institute for Advanced Study.

[1] Wu Wen-Tsun et G. Reeb, Sur les espaces fibrés et les variétés feuilletées, Actual. sci. industr., 1183 (1952).

[2] Ch. Ehresmann, Colloques internat. Centre nat. Rech. Sci., Nr. 12, 3–15 (1949). H. Hopf, ibid. Nr. 12, 55–59 (1949) und Studies Essays, pres. to R. Courant, 167–85 (1948).

[3] A. Borel et J. P. Serre, Amer. J. Math. 75, 409–48 (1953).

Es wird die Frage offengelassen, ob $P_2(Q)$ und $P_3(Q)$ fast-komplex sind oder nicht.

In einem Anhang wird der obige Satz etwas verschärft. Es läßt sich nämlich für $k \equiv 1 \pmod 3$ ohne Einschränkung über die zugrunde gelegte differenzierbare Struktur zeigen, daß $P_k(Q)$ nicht fast-komplex ist. Der Anhang enthält weitere ergänzende Bemerkungen.

§ 1. Vorbereitungen

In diesem Abschnitt sollen bekannte Dinge,[4] die im folgenden Verwendung finden, kurz skizziert werden.

1.1. *Pontrjaginsche Klassen und Chernsche Klassen.*[3] Es sei $\tilde{\mathfrak{E}} = [E, X, R^n, SO(n)]$ ein Bündel[4] mit dem Gesamtraum E, der Basis X, der Faser R^n (= n-dimensionaler reeller Vektorraum) und der Strukturgruppe $SO(n)$. Die Pontrjaginsche Klasse[5] $p_i(\tilde{\mathfrak{E}})$ ist ein Element von $H^{4i}(X, Z)$. Es ist $p_0 = 1$ und $p_i = 0$ für $2i > n$.

Es ist bequem, von *der* Pontrjaginschen Klasse

$$p(\tilde{\mathfrak{E}}) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(\tilde{\mathfrak{E}})$$

zu sprechen, die ein bestimmtes Element des Cohomologieringes $H^*(X, Z)$ ist.

Es sei nun $\mathfrak{E} = [E, X, C_m, U(m)]$ ein Bündel mit dem Gesamtraum E, der Basis X, der Faser C_m (= m dimensionaler komplexer Vektorraum) und der Strukturgruppe $U(m)$. Die Chernsche Klasse $c_i(\mathfrak{E})$ ist ein Element von $H^{2i}(X, Z)$. Es ist $c_0 = 1$ und $c_i = 0$ für $i > m$. Unter *der* Chernschen Klasse $c(\mathfrak{E})$ werde die Summe $\sum_{i=0}^{\infty} c_i(\mathfrak{E})$ verstanden $\left(c(\mathfrak{E}) \in H^*(X, Z)\right)$.

---

[4] Über die hier benutzten Begriffe und Sätze aus der Theorie der gefaserten Räume kann man sich in dem Buche von Steenrod („The topology of fibre bundles", Princeton 1951) orientieren. Im folgenden wird die übliche Terminologie verwendet. ($SO(n)$ = eigentliche orthogonale Gruppe, $U(m)$ = unitäre Gruppe, Z = unendlich zyklische Gruppe, Z_q = zyklische Gruppe der Ordnung q.) Alle Produkte und Potenzen sind im Sinne des Cup-Produkts zu verstehen.

[5] Wu (loc. cit. in Fußnote 1) und Borel-Serre (loc. cit. in Fußnote 3) versehen die Klasse p_i mit dem Dimensionsindex $4i$.

Da $U(m)$ eine Untergruppe von $SO(2m)$ ist, bestimmt jedes Bündel $\mathfrak{E} = [E, X, C_m, U(m)]$ ein Bündel $\tilde{\mathfrak{E}} = [E, X, R^{2m}, SO(2m)]$ – Erweiterung der Strukturgruppe.

Man hat dann die folgende Formel[1,3]

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i p_i(\tilde{\mathfrak{E}}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(\mathfrak{E}) \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_i(\mathfrak{E}).$$

Zum Beispiel

$$p_1 = c_1^2 - 2c_2, \quad p_2 = 2c_4 - 2c_3c_1 + c_2^2.$$

1.2. *Das Kriterium von* Wu.[1,3]. Es sei M^n eine kompakte orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit (M^n sei mit einer bestimmten differenzierbaren Struktur versehen). Es sei E der Raum aller Tangentialvektoren von M^n. Man erhält nach Einführung einer Riemannschen Metrik und nach Festlegung einer Orientierung ein Bündel $\tilde{\mathfrak{E}}(M^n)$.

$$\tilde{\mathfrak{E}}(M^n) = [E, M^n, R^n, SO(n)].$$

Dieses Bündel hängt (bis auf Isomorphie) nicht von der Wahl der Riemannschen Metrik ab. Die Pontrjaginschen Klassen von $\tilde{\mathfrak{E}}(M^n)$ heißen Pontrjaginsche Klassen von M^n $\Big($Bezeichnung: $p_i(M^n)$ und $p(M^n) = \sum_{i=0}^{\infty} p_i(M^n)\Big)$.

Es ist nicht bekannt, ob $p(M^n)$ von der differenzierbaren Struktur von M^n abhängt oder nicht. Die Klasse $p(M^n)$ hängt *nicht* von der Orientierung von M^n ab und bleibt bei allen differenzierbaren Homöomorphismen von M^n fest. Nun sei $n = 2m$. Eine Reduktion der Strukturgruppe $SO(2m)$ von $\tilde{\mathfrak{E}}(M^{2m})$ auf $U(m)$ wird eine fast-komplexe Struktur von M^{2m} genannt. In anderen Worten: Das Bündel $\tilde{\mathfrak{E}}(M^{2m}) = [E, M^{2m}, R^{2m}, SO(2m)]$ kann durch Erweiterung der Strukturgruppe aus einem Bündel

$$\mathfrak{E}(M^{2m}) = [E, M^{2m}, C_m, U(m)]$$

erhalten werden.

Die Chernschen Klassen dieses Bündels werden als Chernsche Klassen der fast-komplexen Mannigfaltigkeit M^{2m} bezeichnet $\left(c(M^{2m}) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i(M^{2m})\right)$. *Wie Beispiele zeigen, hängt* $c(M^{2m})$ *von der fast-komplexen Struktur ab.*[6]

Es ist $c_m(M^{2m}) = \chi(M^{2m}) \cdot (\mu)$, wo χ die Euler-Poincarésche Charakteristik ist, und (μ) die Fundamental-Coklasse von M^{2m} bezüglich der durch die fast-komplexe Struktur ausgezeichneten Orientierung ist.

Die Formel (1) in 1.1. ergibt das Kriterium von Wu:

Wenn die kompakte orientierbare differenzierbare Mannigfaltigkeit M^{2m} mit den Pontrjaginschen Klassen p_i eine fast-komplexe Struktur zuläßt, die mit der gegebenen differenzierbaren Struktur verträglich ist und zur Orientierung mit der Fundamental-Coklasse (μ) gehört, dann gibt es Elemente $c_i \in H^{2i}(M^{2m}, Z)$ mit folgenden Eigenschaften:

1. $c_m = \chi(M^{2m})\,(\mu)$,

2. $\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i p_i = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i c_i$,

3. Das Element c_i reduziert mod 2 ist die $2i$-dimensionale Stiefel-Whitney-Klasse[7] von M^{2m}.

1.3. *Whitneysche Multiplikationssätze.*[8] Für zwei Bündel $\mathfrak{F}_1 = [E_1, X, R^{n'}, SO(n')]$ und $\mathfrak{F}_2 = [E_2, X, R^{n''}, SO(n'')]$ ist das Whitney-Produkt $(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2)$ definiert.

$$(\mathfrak{F}_1, \mathfrak{F}_2) = [E, X, R^{n'+n''}, SO(n' + n'')].$$

---

[6] Wendet man auf die fast-komplexe Sphäre S^6 den Hopfschen σ-Prozeß an (H. Hopf, Rend. Mat. e Appl., V Ser., 10, 169–82 [1951]), dann erhält man eine fast komplexe Struktur für den komplex-projektiven Raum $P_3(C)$ mit der Chernschen Klasse $1 - 2g + 4g^3$ (vgl. 2.1., die ,,übliche" Chernsche Klasse für $P_3(C)$ ist $1 + 4g + 6g^2 + 4g^3$).

[7] Vgl. Steenrod (loc. cit. in Fußnote 4). Die Stiefel-Whitney-Klassen werden in dieser Arbeit nicht benutzt.

[8] Beweise für die Multiplikationssätze ergeben sich unmittelbar, wenn man die Pontrjaginschen und Chernschen Klassen nach Borel-Serre (loc. cit. in Fußnote 3) als ,,elementar-symmetrische Funktionen" definiert.

Es gilt (modulo Torsionselementen von $H^*(X, Z)$)

$$p(\tilde{\mathfrak{E}}_1, \tilde{\mathfrak{E}}_2) = p(\tilde{\mathfrak{E}}_1)\, p(\tilde{\mathfrak{E}}_2). \tag{2}$$

Für zwei Bündel $\mathfrak{E}_1 = [E_1, X, C_{m'}, U(m')]$ und $\mathfrak{E}_2 = [E_2, X, C_{m''}, U(m'')]$ ist das Whitney-Produkt $(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2)$ definiert.

$$(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) = [E, X, C_{m'+m''}, U(m' + m'')].$$

Es gilt

$$c(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2) = c(\mathfrak{E}_1)\, c(\mathfrak{E}_2). \tag{3}$$

1.4. *Invarianz bei Abbildungen.* Es sei $\mathfrak{E} = [E, X, C_m, U(m)]$. Eine stetige Abbildung f eines Raumes Y in X induziert ein Bündel $f^{-1}\mathfrak{E}$ über Y. Es gilt

$$\begin{aligned} &c(f^{-1}\mathfrak{E}) = f^* c(\mathfrak{E}), \text{ wo} \\ &f^* : H^*(X, Z) \rightarrow H^*(Y, Z). \end{aligned} \tag{4}$$

Entsprechend für Pontrjaginsche Klassen.

§ 2. Die Pontrjaginschen Klassen von $P_k(Q)$

2.1. *Der komplex-projektive Raum* $P_m(C)$ von m komplexen Dimensionen ist eine $2m$-dimensionale kompakte Mannigfaltigkeit, die mit einer natürlichen komplexen Struktur und einer natürlichen Orientierung versehen ist. Der Cohomologiering $H^*(P_m(C), Z)$ wird durch ein Element $g \in H^2(P_m(C), Z)$ mit der einzigen Relation $g^{m+1} = 0$ erzeugt.

Das Element g ist dual zur Hyperebene $P_{m-1}(C)$ von $P_m(C)$, und g^m ist die zur natürlichen Orientierung gehörige Fundamental-Coklasse von $P_m(C)$. Die Chernsche Klasse[9] von $P_m(C)$ ist $(1 + g)^{m+1}$ und die Pontrjaginsche Klasse demnach $(1 + g^2)^{m+1}$ (siehe 1. 1. Formel (1)).

2.2. *Der quaternionale projektive Raum* $P_k(Q)$ ist eine $4k$-dimensionale Mannigfaltigkeit. Der Raum $P_k(Q)$ entsteht aus

---

[9] Siehe S. Chern, Annals of Math. 47, 85–121 (1946). Die Chernsche Klasse $c(P_m(C))$ ergibt sich mit Hilfe der Whitneyschen Multiplikationsformel auch leicht durch Induktion über m.

dem Raum aller nicht verschwindenden $(k+1)$-Tupel von Quaternionen durch die Identifizierung:

$$(q_1, q_2, \ldots, q_{k+1}) = (q q_1, q q_2, \ldots, q q_{k+1})$$

für jedes Quaternion $q \neq 0$.

Der Cohomologiering $H^*(P_k(Q), Z)$ wird durch ein Element $u \in H^4(P_k(Q), Z)$ mit der einzigen Relation $u^{k+1} = 0$ erzeugt.

Die Fundamental-Coklasse ist je nach Orientierung u^k oder $-u^k$. Die Euler-Poincarésche Charakteristik ist $k+1$.

2.3. *Zur Bestimmung der Pontrjaginschen Klasse* $p(P_k(Q))$ wird die bekannte Faserung

$$P_{2k+1}(C) \to P_k(Q) \quad (\text{Faser} = S^2) \tag{5}$$

verwandt. Diese Faserung erhält man folgendermaßen.

Dem Punkte $(z_1, z_2, \ldots, z_{2k+2}) \in P_{2k+1}$, (die komplexen Zahlen z_i sind homogene Koordinaten), wird der Punkt

$$(z_1 + z_2 j, z_3 + z_4 j, \ldots, z_{2k+1} + z_{2k+2} j) \in P_k(Q)$$

zugeordnet ($1, i, j, k$ sind die Basiselemente der Quaternionen, wobei i die komplexe Zahl i und $k = ij$ ist). Hierdurch erhält man eine Abbildung π von $P_{2k+1}(C)$ auf $P_k(Q)$. Man kontrolliert leicht, daß π eine Faserabbildung von $P_{2k+1}(C)$ auf $P_k(Q)$ ist. Diejenige Faser, zu der der Punkt $(z_1, z_2, \ldots, z_{2k+2})$ gehört, besteht aus allen Punkten von P_{2k+1}, die sich in der Form $a(z_1, z_2, \ldots, z_{2k+2}) + b(-\bar{z}_2, \bar{z}_1, -\bar{z}_4, \bar{z}_3, \ldots, -\bar{z}_{2k+2}, \bar{z}_{2k+1})$ mit a, b beliebig komplex schreiben lassen. Die Fasern sind daher komplex-projektive Geraden, also 2-dimensionale Sphären.

Das Tangentialbündel von P_{2k+1} ist Whitney-Produkt von zwei Bündeln $\tilde{\mathfrak{E}}_1$, $\tilde{\mathfrak{E}}_2$. (Wir schreiben kurz $P_m(C) = P_m$).

Definition von $\tilde{\mathfrak{E}}_1$: tangentiale Vektoren von P_{2k+1}, die *tangential* zu den Fasern S^2 der Faserung (5) sind.

Definition von $\tilde{\mathfrak{E}}_2$: tangentiale Vektoren von P_{2k+1}, die *normal* zu den Fasern S^2 sind.

$$\tilde{\mathfrak{E}}_1 = [E_1, P_{2k+1}, R^2, SO(2)]$$

$$\tilde{\mathfrak{E}}_2 = [E_2, P_{2k+1}, R^{4k}, SO(4k)].$$

Da $SO(2) = U(1)$, ist für $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ eine Chernsche Klasse $c_1(\tilde{\mathfrak{E}}_1) \in H^2(P_{2k+1}, Z)$ definiert.

Es werde nun das Teilbündel von $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ über einer Faser S^2 der Faserung (5) betrachtet ($S^2 \subset P_{2k+1}$, die Homologieklasse von S^2 ist dual zu g^{2k}).

Die Chernsche Klasse dieses Teilbündels ist die Euler-Poincarésche Charakteristik von S^2 ($= 2 \cdot$ Fundamental-Coklasse von S^2). Das einzige Element von $H^2(P_{2k+1}, Z)$, das bei Beschränkung auf S^2 diese Cohomologieklasse induziert, ist $2g$. Daher (vgl. 1.4., f ist hier die Einbettung der Faser S^2 in P_{2k+1}) erhält man:

$$c_1(\tilde{\mathfrak{E}}_1) = 2g, \quad c(\tilde{\mathfrak{E}}_1) = 1 + 2g.$$

Wegen 1. 1. Formel (1) hat man für die Pontrjaginsche Klasse: $p(\tilde{\mathfrak{E}}_1) = 1 + 4g^2$.

Der Multiplikationssatz 1. 3 (2) für die Bündel $\tilde{\mathfrak{E}}_1$, $\tilde{\mathfrak{E}}_2$ besagt:

$$p(\tilde{\mathfrak{E}}_1) \cdot p(\tilde{\mathfrak{E}}_2) = p(P_{2k+1}(C))$$

$$(1 + 4g^2)\, p(\tilde{\mathfrak{E}}_2) = (1 + g^2)^{2k+2}$$

$$p(\tilde{\mathfrak{E}}_2) = (1 + g^2)^{2k+2}(1 + 4g^2)^{-1}.$$

Man bezeichne für den Augenblick das Tangentialbündel von $P_k(Q)$ mit $\mathfrak{T}$. Das Bündel $\pi^{-1}\mathfrak{T}$ über $P_{2k+1}(C)$ als Basis, das durch die Projektion π von $P_{2k+1}(C)$ auf $P_k(Q)$ induziert wird, ist offenbar isomorph zu $\tilde{\mathfrak{E}}_2$. Daher gilt nach 1. 4

$$\pi^* p(P_k(Q)) = (1 + g^2)^{2k+2}(1 + 4g^2)^{-1}. \tag{6}$$

Wie aus allgemeinen Sätzen zu entnehmen oder direkt einzusehen ist, bildet π^* den Ring $H^*(P_k(Q), Z)$ isomorph in $H^*(P_{2k+1}(C), Z)$ ab (die Faser S^2 ist nicht homolog 0 in P_{2k+1}!), und es ist $\pi^* H^{4i}(P_k(Q), Z) = H^{4i}(P_{2k+1}(C), Z)$. Das erzeugende Element $u \in H^4(P_k(Q), Z)$ werde von nun an durch $\pi^* u = g^2$ festgelegt.

Satz 1:
Die Pontrjagin-Klasse von $P_k(Q)$ ist $(1+u)^{2k+2}(1+4u)^{-1}$.

Es werde hier noch erwähnt, daß man ebenso wie Satz 1 den folgenden Satz erhält.

Satz 2: *Die Stiefel-Whitney-Klasse von $P_k(Q)$ ist* $(1+u)^{k+1}$ (*reduziert* mod 2).

§ 3. Für $k \neq 2, 3$ ist $P_k(Q)$ nicht fast-komplex

Der in der Einleitung angegebene Satz kann nun leicht bewiesen werden.

Wenn $P_k(Q)$ fast-komplex ist, dann muß es nach dem Kriterium von Wu (1. 2.) Klassen $c_i \in H^{2i}(P_k(Q), Z)$ mit den Eigenschaften 1, 2, 3 geben. Da $H^{2i}(P_k(Q), Z) = 0$ für ungerades i, besagt Eigenschaft 2:

$$(1-u)^{2k+2}(1-4u)^{-1} = (1+c_2+c_4+\ldots)^2 = c^2, \quad \text{wo}$$

$$c = \sum_{i=0}^{\infty} c_i = \sum_{j=0}^{\infty} c_{2j}.$$

Durch Eigenschaft 2 ist also c vollständig bestimmt:

$$c = (1-u)^{k+1}(1-4u)^{-1/2} = (1-u)^{k+1} \cdot \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} u^r.$$

Wegen 2.3. (Satz 2) erfüllt c auch die Bedingung 3 des Kriteriums von Wu. Für $P_k(Q)$ besagt daher das Kriterium von Wu folgendes:

Wenn $P_k(Q)$ eine fast-komplexe Struktur zuläßt, dann ist der Koeffizient von x^k in der Potenzreihenentwicklung nach x von $(1-x)^{k+1}(1-4x)^{-1/2}$ gleich $\pm(k+1)$. Vgl. Abschnitt 2. 2.

Der durch $k+1$ dividierte Koeffizient von x^k in $(1-x)^{k+1}(1-4x)^{-1/2}$ werde mit a_k bezeichnet. Es ist $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = a_3 = 1$, $a_4 = 3$.

Hilfssatz 1. Die a_k werden durch die folgende Rekursionsformel gegeben

$$a_0 = 1, \quad a_{k+1} = \sum_{j=0}^{k} a_j a_{k-j} + (-1)^{k+1}.$$

Beweis:

$$(k+1)a_k = \frac{1}{2\pi i} \int \left(\frac{1-x}{x}\right)^{k+1} (1-4x)^{-1/2}\, dx,$$

zu integrieren längs eines Kreises um den Nullpunkt in der komplexen x-Ebene. Variablentransformation $v = \frac{x}{1-x}$ ergibt:

$$(k+1)a_k = \frac{1}{2\pi i}\int (1+v)^{-3/2}(1-3v)^{-1/2} v^{-(k+1)}\,dv.$$

Es gilt also in der Umgebung von $v = 0$:

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)a_k v^k = (1+v)^{-3/2}(1-3v)^{-1/2} \quad \text{und}$$

$$v\sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1-3v}{1+v}\right)^{1/2}.$$

Setzt man $\sum_{k=0}^{\infty} a_k v^k = f(v)$, dann erhält man $f^2 = \frac{1}{v}f - \frac{1}{v(1+v)}$ und daraus die zu beweisende Rekursionsformel.

Nun ergibt sich unmittelbar

Hilfssatz 2: Die a_k sind nicht-negative ganze Zahlen. Es ist

$$a_{k+1} \geq 2a_k - 1 \quad \text{und} \quad a_k > 1 \quad \text{für} \quad k \geq 4.$$

Es werde nun das Resultat zusammengefaßt:

Für den quaternionalen projektiven Raum $P_k(Q)$ sind die Klassen c_i des Kriteriums von Wu eindeutig bestimmt. Für $k = 2$ ist $c_4 = 3u^2$, für $k = 3$ ist ist $c_6 = 4u^3$, für alle anderen k ist $c_{2k} \neq (k+1)u^k$ und auch $c_{2k} \neq -(k+1)u^k$. So ergibt sich schließlich

Satz 3: *Die quaternionalen projektiven Räume $P_k(Q)$ mit der natürlichen differenzierbaren Struktur lassen für $k \neq 2, 3$ keine fast-komplexe Struktur zu. Falls $P_r(Q)$, $(r = 2, 3)$, eine fast-komplexe Struktur zuläßt, dann ist ihre Chernsche Klasse gleich* $1 - u + 3u^2$ (bzw. $1 - 2u + 4u^2 + 4u^3$) *und die zugehörige Orientierung hat die Fundamental-Coklasse* u^2 (bzw. u^3). *Es gibt also jedenfalls keine fast-komplexe Struktur für $P_r(Q)$, $(r = 2, 3)$, mit der hierzu entgegengesetzten Orientierung.*

§ 4. Anhang

4.1. Der Satz 3 des vorigen Abschnitts enthielt die Einschränkung, daß $P_k(Q)$ mit der üblichen differenzierbaren Struktur versehen ist. Der Beweis für Satz 3 wurde mit Hilfe der Pontrjaginschen Klasse $p\,(P_k(Q))$ geführt und die Einschränkung über die zugrunde gelegte differenzierbare Struktur war erforderlich, da nicht bekannt ist, ob $p(P_k(Q))$ eine *topologische* Invariante von $P_k(Q)$ ist.

Nun gilt aber der Satz von Wu[10], daß die Pontrjaginsche Klasse $p(M)$ einer orientierbaren Mannigfaltigkeit nach Reduktion mod 3 topologisch invariant ist. Genauer: ρ sei der natürliche Homomorphismus von $H^*(M, Z)$ in $H^*(M, Z_3)$. Die Klasse $\rho p(M) \in H^*(M, Z_3)$ hängt nur von der topologischen Mannigfaltigkeit M ab (und bleibt bei allen topologischen Automorphismen von M fest).

Daher ergibt das Kriterium von Wu (vgl. § 3) für die quaternionalen Räume $P_k(Q)$ den

Satz 4: *Wenn $P_k(Q)$ für irgendeine differenzierbare Struktur eine fast-komplexe Struktur zuläßt, dann ist der Koeffizient von x^k in der Potenzreihenentwicklung nach x von $(1 - x)^{k+1/2}$ kongruent* $\pm(k+1)$ mod 3, *d. h. es müßte die folgende Kongruenz gelten*:

$$(2k+1)\binom{2k}{k} \equiv \pm\,(k+1) \bmod 3.$$

Insbesondere ist also für $k \equiv 1$ (mod 3) *der quaternionale Raum $P_k(Q)$ bezüglich keiner differenzierbaren Struktur fastkomplex.*[11]

Dieser Abschnitt 4.1. ist „sehr theoretisch", da keine einzige Mannigfaltigkeit mit zwei verschiedenen differenzierbaren Strukturen bekannt ist.

---

[10] Wu Wen-Tsun, Sur les puissances de Steenrod, Colloque de Topologie de Strasbourg 1951. Vgl. auch F. Hirzebruch, On Steenrod reduced powers in oriented manifolds, Notes, Princeton University 1953, und On Steenrod's reduced powers, the index of inertia and the Todd genus (Proc. Nat. Acad. Sci. USA 39, 951–56 (1953). Die Klasse p_i (mod 3) läßt sich durch die Gleichung $p_i = \sum_{r=0}^{i} \mathfrak{P}_3^{i-r} s_3^r$ topologisch invariant definieren.

[11] Für eine fast-komplexe Mannigfaltigkeit M_m der komplexen Dimension m gilt immer die Kongruenz $c_1 c_{m-1} \equiv m c_m$ (mod 3), (vgl. F. Hirzebruch, The index of an oriented manifold and the Todd genus of an almost-complex manifold, Notes, Princeton University 1953). Wenn $P_k(Q)$ fast-komplex ist, dann muß also $2k(k+1) \equiv 0$ (mod 3) sein. Daraus folgt sofort Satz 4.

4.2. In Abschnitt 2. 3 wurde benutzt, daß das Tangentialbündel von $P_{2r+1}(C)$ das Whitney-Produkt von zwei Bündeln $\tilde{\mathfrak{E}}_1, \tilde{\mathfrak{E}}_2$ ist. Falls $P_r(Q)$, $(r = 2, 3)$, fast-komplex ist, dann läßt $\tilde{\mathfrak{E}}_2$ die Gruppe $U(2r)$ als Strukturgruppe zu. Das Bündel $\tilde{\mathfrak{E}}_2$ hat dann die Chernsche Klasse $1 - g^2 + 3g^4$ (bzw. $1 - 2g^2 + 4g^4 + 4g^6$). Das Bündel $\tilde{\mathfrak{E}}_1$ hat die Chernsche Klasse $1 + 2g$. Es folgt:

Wenn $P_2(Q)$ fast-komplex ist, dann hat $P_5(C)$ eine fast-komplexe Struktur mit der Chernschen Klasse

$$(1 - g^2 + 3g^4)(1 + 2g) = 1 + 2g - g^2 - 2g^3 + 3g^4 + 6g^5.$$

Wenn $P_3(Q)$ fast-komplex ist, dann hat $P_7(C)$ eine fast-komplexe Struktur mit der Chernschen Klasse

$$(1 - 2g^2 + 4g^4 + 4g^6)(1 + 2g) = 1 + 2g - 2g^2 - 4g^3 + 4g^4 + 8g^5 + 4g^6 + 8g^7.$$

4.3. Die Bestimmung der Pontrjaginschen Klassen von $P_k(Q)$ erlaubt eine Kontrolle des Satzes, daß der Index (die Signatur) $\tau(M^{4k})$ einer orientierten Mannigfaltigkeit M^{4k} aus den Pontrjaginschen Klassen „mittels der Potenzreihe“ $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{z}}$ erhalten werden kann.[12] Genauer: $\tau(M^{4k})$ ist der Überschuß der Anzahl der plus-Zeichen über die Anzahl der minus-Zeichen in der Diagonalform der durch das Cup-Produkt $x \cdot x$ definierten quadratischen Form $(x \in H^{2k}(M^{4k}, R))$.

Es gilt

$$\tau(M^{4k})(\mu) = L_k(p_1, p_2, \ldots p_k),$$

wo (μ) *die Fundamental-Coklasse von M^{4k} und L_k die multiplikative Folge von Polynomen ist, die mit Hilfe der Potenzreihe* $\dfrac{\sqrt{z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{z}}$ *definiert wird.*

Nun ist $\tau(P_k(Q)) = 1$ für k gerade, $\tau(P_k(Q)) = 0$ für k ungerade. (Es wird hier die Orientierung mit u^k als Fundamental-Coklasse zugrunde gelegt.)

---

[12] F. Hirzebruch, loc. cit. in Fußnote 10.

Da $(1+u)^{2k+2}(1+4u)^{-1}$ die Pontrjaginsche Klasse von $P_k(Q)$ ist, besagt der angegebene Satz angewandt auf $P_k(Q)$: *Der Koeffizient von z^k in der Potenzreihenentwicklung nach z von*

$$\left(\frac{\sqrt{z}}{\operatorname{tgh}\sqrt{z}}\right)^{2k+2} \cdot \frac{\operatorname{tgh}\sqrt{4z}}{\sqrt{4z}}$$

ist gleich 1 *für gerades k und gleich* 0 *für ungerades k.*

Das läßt sich in der Tat bestätigen.

4.4. Abschließend werde noch ein Beziehung der Quadrik Q_{2k} von $2k$ komplexen Dimensionen [eingebettet in $P_{2k+1}(C)$] mit $P_k(Q)$ angegeben. Wenn man mit h die Cohomologieklasse von Q_{2k} bezeichnet, die zum Schnitt von Q_{2k} mit der Hyperebene von $P_{2k+1}(C)$ dual ist $(h \in H^2(Q_{2k}, Z))$, dann wird die Pontrjaginsche Klasse von Q_{2k} durch folgende Formel gegeben

$$p(Q_{2k}) = (1+h^2)^{2k+2}(1+4h^2)^{-1}.$$

Da $(h^2)^k = 2$. Fundamental-Coklasse ist, sind die charakteristischen Zahlen von Pontrjagin für Q_{2k} das zweifache derjenigen von $P_k(Q)$.

Daher gilt nach Thom,[13] daß Q_{2k} und die Vereinigung zweier Exemplare von $P_k(Q)$ „cobordantes" (modulo Torsion) sind. Ist die Einschränkung „modulo Torsion" erforderlich?

---

[13] R. Thom, C. R. Acad. Sci., Paris, 236, 1733–35 (1953).