# Sitzungsberichte

der

## mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

## Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München

Jahrgang 1953

München 1954
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Über Fourierreihen, die in einem Teilintervall der Entwicklungsperiode identisch verschwinden

*Herrn K. W. Wagner zum 70. Geburtstag*

Von Gottfried Eckart in Paris

Vorgelegt von Herrn Joseph Lense am 3. Juli 1953

## § 1

Es gibt Fourierreihen, die Funktionen darstellen, die in einem Teilintervall (im folgenden als „Nullintervall" bezeichnet) der Entwicklungsperiode identisch verschwinden, und wir stellen die Frage, ob man Kriterien angeben kann, die dieses Verhalten an den Koeffizienten erkennen lassen. Unter den Fourierreihen, die wir betrachten, wollen wir uns auf solche beschränken, die stückweise glatte Funktionen darstellen, die also in der Entwicklungsperiode samt ihren ersten Ableitungen abteilungsweise stetig sind ([1], S. 33).

Gewöhnlich schreibt man eine Fouriersche Reihe einer Funktion im Intervall $(0, 2\pi)$, die man darüber hinaus periodisch fortsetzen kann, in der Form

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt). \tag{1}$$

Definieren wir

$$a_{-n} = a_n, \quad b_{-n} = -b_n, \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - i b_n). \tag{2}$$

so daß

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n}), \tag{3}$$

so können wir auch schreiben:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int}. \tag{4}$$

Diese Beziehungen setzen voraus, daß man nach den in $(0, 2\pi)$ normierten vollständigen Orthogonalsystemen

(I)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t, \ldots, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nt, \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nt, \ldots,$$

oder

$$\text{(II)} \qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int} \; (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

entwickelt.

Statt dieser beiden können wir auch die in $(0, \pi)$ normierten vollständigen Orthogonalsysteme

$$\text{(III)} \qquad \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos t, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2t, \ldots,$$

$$\text{(IV)} \qquad \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin t, \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin 2t, \ldots$$

verwenden, wobei wir zu beachten haben, daß bei Ergänzung zu einer ganzen Periode (III) eine gerade, (IV) eine ungerade Funktion darstellt, was aber bei der Beschränkung auf das Intervall $(0, \pi)$ nicht in Erscheinung tritt. Natürlich kann man durch einfache Variablentransformation das Intervall $(0, 2\pi)$ in $t$ in das Intervall $(0, \pi)$ in $t'$ überführen und die Koeffizienten einer nach (III) oder (IV) fortschreitenden Reihe durch diejenigen einer Entwicklung nach (I) oder (II) ausdrücken und umgekehrt.

Im folgenden wollen wir stets annehmen, daß unser Nullintervall bei $t = 0$ beginnt und bis zur Stelle $b$ reicht, wo natürlich $b$ kleiner als $2\pi$ oder $\pi$ ist, je nach dem gewählten Orthogonalsystem und seinem Entwicklungsintervall. Im Falle einer Reihe der Form (1) können wir jederzeit den Nullpunkt unserer $t$-Achse von $t = 0$ nach $t = b$ verschieben mittels $\xi = t - b$, wobei sich die Koeffizienten in der folgenden Form umrechnen:

(5)

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt) = \frac{\overline{a_0}}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\overline{a_n} \cos n\xi + \overline{b_n} \sin n\xi)$$

mit

$$\text{(6)} \qquad \begin{aligned} \overline{a_n} &= a_n \cos nb + b_n \sin nb, \\ \overline{b_n} &= -a_n \sin nb + b_n \cos nb. \end{aligned}$$

Im Falle der komplex geschriebenen Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{c_n} e^{in\xi} \tag{5a}$$

ist dann

$$\overline{c_n} = c_n e^{inb}. \tag{6a}$$

Da nach unseren Voraussetzungen die Funktion $f(t)$ in $0 \leqq t \leqq b$ identisch verschwindet, muß für $t > b$ das Integral $\int_0^t f(t)\,dt$ identisch gleich sein dem Integral $\int_b^t f(t)\,dt$. Daß diese Bedingung nicht hinreichend ist, sieht man daraus, daß sie erfüllt ist für jedes $f(t)$, für das $\int_0^b f(t)\,dt = 0$.

Um diese notwendige Bedingung anzuschreiben, haben wir

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt), \tag{7}$$

$$\int_0^t f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\,t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{b_n}{n}\right), \tag{8}$$

$$\begin{aligned} \int_b^t f(t)\,dt = \frac{a_0}{2}\,t - \frac{a_0}{2}\,b + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(&\frac{a_n}{n} \sin nt - \frac{a_n}{n} \sin nb \\ &- \frac{b_n}{n} \cos nt + \frac{b_n}{n} \cos nb\Big). \end{aligned} \tag{9}$$

Identisches Gleichsetzen von (8) und (9) bringt:

$$\frac{a_0}{2}\,b + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{a_n}{n} \sin b + \frac{b_n}{n} (1 - \cos nb)\right] = 0. \tag{10}$$

Dies stellt also eine Beziehung dar, welche die Koeffizienten einer Reihe, wie wir sie untersuchen, zu erfüllen haben.

## § 2

Der Verschiebungssatz der Laplacetransformation ([2], S. 147) legt folgende Überlegung nahe, um ein notwendiges und hinreichendes Kriterium für das Verschwinden von $f(t)$ im Inter-

vall (0, $b$) zu erhalten: Es sei $f_1(t) = f(t)$ im Intervall (0, $b$), außerhalb null, dagegen $f_2(t) = f(t)$ außerhalb des Intervalls, im Intervall 0. Dann hat man

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f_1(t)\, e^{-st}\, dt + \int_0^\infty f_2(t)\, e^{-st}\, dt.$$

Gemäß dem Eindeutigkeitssatz der Laplacetransformation ([2], S. 34) folgt aus dem identischen Verschwinden von $\int_0^\infty f_1(t)\, e^{-st}\, dt$, daß $f_1(t)$ bis auf eine Nullmenge ebenfalls null ist, d. h. daß $f(t)$ bis auf eine Nullmenge im Intervall (0, $b$) null ist. Die gesuchte notwendige und hinreichende Bedingung besteht also darin, daß

$$\int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_b^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt$$

identisch in $s$ sein muß. Führt man im zweiten Integral $\xi = t - b$ als neue Veränderliche ein, so hat man

$$e^{bs} \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = \int_0^\infty f(\xi + b)\, e^{-s\xi}\, d\xi.$$

Es ist

$$(11) \qquad f(\xi + b) = \frac{\overline{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^\infty (\overline{a}_n \cos n\xi + \overline{b}_n \sin n\xi),$$

wobei die Koeffizienten aus (6) zu entnehmen sind. Die Laplacetransformierte in (0, $\infty$) ist dann ([2], S. 22–23)

$$(12) \qquad \frac{\overline{a}_0}{2s} + \sum_{n=1}^\infty \left(\overline{a}_n \frac{s}{s^2 + n^2} + \overline{b}_n \frac{n}{s^2 + n^2}\right).$$

Die Laplacetransformierte der ursprünglichen Reihe lautet:

$$(13) \qquad \frac{a_0}{2s} + \sum_{n=1}^\infty \left(a_n \frac{s}{s^2 + n^2} + b_n \frac{n}{s^2 + n^2}\right),$$

somit ist

$$(14) \qquad e^{bs} \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = e^{bs} \left(\frac{a_0}{2s} + \sum_{n=1}^\infty \frac{a_n s + b_n n}{s^2 + n^2}\right).$$

Dies muß (12) identisch gleich sein, also hat man:

$$(15)\quad e^{bs}\left(\frac{a_0}{2s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n s+b_n n}{s^2+n^2}\right)=\frac{\overline{a_0}}{2s}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\overline{a_n}\,s+\overline{b_n}\,n}{s^2+n^2}.$$

Daß man berechtigt ist, die Fouriersche Reihe gliedweise nach Laplace zu transformieren, ergibt sich aus folgender Überlegung[1]:

Wir schreiben (1) in der Gestalt $f(t)=s_n(t)+r_n(t)$. Weil $f(t)$ stückweise glatt ist, hat es im Periodizitätsintervall $(0, 2\pi)$ eine endliche Anzahl $m$ von Unstetigkeitsstellen $\alpha_\nu$ mit endlichen Unstetigkeitsprüngen. Wir schließen sie durch Intervalle von der Länge $2\delta$ aus. Die Reihe konvergiert außerhalb dieser Intervalle gleichmäßig ([1], S. 53), d. h. dort ist $|r_n(t)|<\varepsilon$ für alle $n>N$, wobei $N$ nur von $\varepsilon$ und nicht von $t$ abhängt. Weil die Reihe aber auch an den Unstetigkeitsstellen konvergiert (allerdings nicht gleichmäßig, sie stellt bekanntlich das arithmetische Mittel des links- und rechtsseitigen Grenzwertes der Funktion dar [1], S. 47), sind die Teilsummen $s_n(t)$ gleichmäßig beschränkt und daher ist $|r_n(t)|<A$ für alle $n$ und $t$.

Setzen wir noch $0<s_0\leqq s\leqq s_1$ voraus, so erhalten wir wegen der Periodizität der Funktion folgende Abschätzung:

$$\left|\int_0^\infty r_n(t)\,e^{-st}\,dt\right|<\varepsilon\int_0^\infty e^{-st}\,dt+\sum_{\nu=1}^{m}A\left[\int_{\alpha_\nu-\delta}^{\alpha_\nu+\delta}e^{-st}\,dt\right.$$

$$\left.+\int_{\alpha_\nu+2\pi-\delta}^{\alpha_\nu+2\pi+\delta}e^{-st}\,dt+\int_{\alpha_\nu+4\pi-\delta}^{\alpha_\nu+4\pi+\delta}e^{-st}\,dt+\cdots\right]$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{s}+\frac{A}{s}\sum_{\nu=1}^{m}e^{-\alpha_\nu s}\left(e^{\delta s}-e^{-\delta s}\right)\sum_{n=0}^{\infty}e^{-2\pi n s}$$

$$\leqq\frac{\varepsilon}{s_0}+\frac{A}{s_0}\,\frac{e^{\delta s_1}-e^{-\delta s_1}}{1-e^{-2\pi s_0}}\sum_{\nu=1}^{m}e^{-\alpha_\nu s_0}$$

und dieser Ausdruck strebt unabhängig von $n$ mit $\delta$ gegen 0.

Schließen wir in der $s$-Ebene die Punkte $s=0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ durch entsprechende kleine Kreise vom Halbmesser $\rho$

[1] Ich verdanke sie Herrn Prof. J. Lense.

und den Punkt $\infty$ durch einen genügend großen Kreis vom Halbmesser $R$ aus und nennen wir den so erhaltenen abgeschlossenen Bereich $B$, so konvergieren die Reihen (13) und (14) in $B$ absolut und gleichmäßig. Denn es ist $|s \pm in| > n - R$ für alle $n > R$ und zufolge unserer Voraussetzungen über $f(t)$ auch $|a_n|$, $|b_n| < \frac{C}{n}$ ([1], S. 53),

somit
$$\left|\frac{a_n s + b_n n}{s^2 + n^2}\right| < \frac{C(R+n)}{n(n-R)^2} < \varepsilon$$

für alle $s$ von $B$ und für alle $n > R$. Es ist daher die Laplacetransformierte eine analytische Funktion von $s$ mit den Polen erster Ordnung bei $s = 0, \pm i, \pm 2i, \pm 3i, \ldots$ Somit existiert in dem Ringgebiet $0 < |s| < 1$ eine Laurentsche Entwicklung. Wir stellen sie auf und vergleichen die Koeffizienten der Potenzen von $s$.

Aus (6a) ersieht man $a_0 = \bar{a}_0$, also ist das Residuum in $s = 0$

$$\lim_{s \to 0} e^{bs} \frac{a_0}{2s} s = a_0, \tag{16}$$

die Gleichheit ist von selbst erfüllt.

Wenn wir jetzt den bei $s = 0$ singulären Term abtrennen, so können wir wegen der absoluten Konvergenz in (15) gliedweise nach Potenzen von $s$ entwickeln und umordnen. Es ist

$$\frac{1}{s^2 + n^2} = \frac{1}{n^2\left(1 + \frac{s^2}{n^2}\right)} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left(\frac{s^2}{n^2}\right)^k \tag{17}$$

mit $|s| < 1$, ferner

$$\frac{e^{bs} a_0}{2s} - \frac{a_0}{2s} = \frac{a_0}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b^{k+1}}{(k+1)!} s^k. \tag{18}$$

Entwickelt man $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n s + b_n n}{s^2 + n^2}$ gliedweise nach (17), so bekommt man

(19)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n s + b_n n}{s^2 + n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + s \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} - s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^3} - s^3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^4} + \cdots$$
$$= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^l \frac{b_k}{k^{2l+1}} s^{2l} + \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^l \frac{a_k}{k^{2l+2}} s^{2l+1}.$$

Diese Reihe haben wir mit $e^{bs}$ zu multiplizieren:

$$
\begin{aligned}
e^{bs} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n s + b_n n}{s^2 + n^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + s \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b\, b_n}{n} + \frac{a_n}{n^2} \right) \\
&+ s^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b^2}{2!} \frac{b_n}{n} + \frac{b\, a_n}{n^2} - \frac{b_n}{n^3} \right) \\
&+ s^3 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b^3}{3!} \frac{b_n}{n} + \frac{b^2}{2!} \frac{a_n}{n^2} - \frac{b\, b_n}{n^3} - \frac{a_n}{n^4} \right) \\
&+ s^4 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b^4}{4!} \frac{b_n}{n} + \frac{b^3}{3!} \frac{a_n}{n^2} - \frac{b^2}{2!} \frac{b_n}{n^3} - \frac{b\, a_n}{n^4} + \frac{b_n}{n^5} \right) \qquad (20) \\
&+ s^5 \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{b^5}{5!} \frac{b_n}{n} + \frac{b^4}{4!} \frac{a_n}{n^2} - \frac{b^3}{3!} \frac{b_n}{n^3} - \frac{b^2}{2!} \frac{a_n}{n^4} + \frac{b\, b_n}{n^5} + \frac{a_n}{n^6} \right) \\
&+ \cdots \\
&+ s^k \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{b^k}{k!} \frac{b_n}{n} + \frac{b^{k-1}}{(k-1)!} \frac{a_n}{n^2} - \frac{b^{k-2}}{(k-2)!} \frac{b_n}{n^3} - \frac{b^{k-3}}{(k-3)!} \frac{a_n}{n^4} \right. \\
&\left. + \frac{b^{k-4}}{(k-4)!} \frac{b_n}{n^5} + \frac{b^{k-5}}{(k-5)!} \frac{a_n}{n^6} - \cdots \pm \frac{a_n \text{ oder } b_n}{n^{k+1}} \right],
\end{aligned}
$$

wo in der letzten Klammer das letzte Glied $\pm \frac{a_n}{n^{k+1}}$ oder $\pm \frac{b_n}{n^{k+1}}$ ist je nach dem Wert von $k$. Es wechseln immer in jedem Glied $b_n$ und $a_n$ ab und es folgen immer auf zwei Pluszeichen zwei Minuszeichen und umgekehrt. Zu dieser Reihe haben wir noch die Reihe (18) zu addieren.

Für die rechte Seite von (15) bekommen wir formal den Ausdruck (19), aber mit $\overline{a_n}$, $\overline{b_n}$ an Stelle von $a_n$, $b_n$ geschrieben. Das Glied mit $\frac{1}{s}$ ist bereits als auf beiden Seiten gleich erkannt und entfällt im folgenden. Diese in $\overline{a_n}$ und $\overline{b_n}$ geschriebene Gleichung (19) muß noch mittels (6) auf $a_n$ und $b_n$ umgeschrieben werden. Dann wird aus (15)

(21)

$$\frac{a_0 b}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n \sin nb + b_n \cos nb}{n}$$

$$\frac{a_0}{2}\frac{b^2}{2!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b b_n}{n} + \frac{a_n}{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nb + b_n \sin nb}{n^2}$$

$$\frac{a_0}{2}\frac{b^3}{3!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b^2}{2!}\frac{b_n}{n} + \frac{b a_n}{n^2} - \frac{b_n}{n^3}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \sin nb - b_n \cos nb}{n^3}$$

$$\frac{a_0}{2}\frac{b^4}{4!} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{b^3}{3!}\frac{b_n}{n} + \frac{b^2}{2!}\frac{a_n}{n^2} - \frac{b b_n}{n^3} - \frac{a_n}{n^4}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-a_n \cos nb - b_n \sin nb}{n^4}$$

. . . . . .

Hier ist das allgemeine Gesetz bereits zu erkennen. Das System (21) stellt eine weitere Bedingung für das Verschwinden der Reihe (1) im Intervall $(0, b)$ bis auf eine Nullmenge dar.

## § 3

Im vorigen Paragraphen haben wir die durch die Reihe dargestellte Funktion als periodisch mit der Periode $2\pi$ in $(0, \infty)$ betrachtet und der Laplacetransformation in diesem Intervall unterzogen. Jetzt betrachten wir eine andere Funktion: diese sei im Intervall $(0, 2\pi)$ durch die Fourierreihe gegeben, sonst soll sie dagegen identisch verschwinden. Wir wollen diese Funktion, d. h. die Reihe in dem Intervall $(0, 2\pi)$ der nunmehr endlichen Laplacetransformation ([3], S. 411) unterwerfen und weiterhin analog wie oben verfahren. Dies wird uns weitere notwendige und hinreichende Bedingungen liefern.

Wir wollen uns jetzt der komplexen Schreibweise (4) für die Reihe bedienen, also

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{int} \qquad \text{in } 0 \leqq t \leqq 2\pi \tag{22}$$

und $f(t) = 0$ in $t > 2\pi$.

Gliedweise Laplacetransformation ergibt wegen

$$\int_0^{2\pi} e^{int} e^{-st}\, dt = \frac{1}{in-s}\left(e^{-2\pi s}-1\right) \tag{23}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in-s}\left(e^{-2\pi s}-1\right), \tag{24}$$

wobei wir bemerken, daß in $s = in$ keine Pole vorhanden sind, weil auch der Zähler dort verschwindet; nach einem Satz von Doetsch ([3], S. 411) ist $\int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt$ eine ganze Funktion.

Die Berechtigung zur gliedweisen Transformation ergibt sich wie im § 2. Denn man hat hier (in reeller Schreibweise)

$$\left|\int_0^{2\pi} r_n(t)\, e^{-st}\, dt\right| < \varepsilon \int_0^{\infty} e^{-st}\, dt + \sum_{\nu=1}^{m} A \int_{\alpha_\nu-\delta}^{\alpha_\nu+\delta} e^{-st}\, dt$$

$$\leqq \frac{\varepsilon}{s_0} + \frac{A}{s_0}\left(e^{\delta s_1} - e^{-\delta s_1}\right).$$

Die Reihe (24) konvergiert in einem genügend großen Kreis vom Halbmesser $R$ absolut und gleichmäßig. Denn wie im § 2 ist

$$\left|\frac{c_n}{in-s}\left(e^{-2\pi s}-1\right)\right| < \frac{C\left(e^{2\pi R}+1\right)}{n\,(n-R)}.$$

Die Koeffizienten der Fourierreihe stellen die Fouriertransformierte von $F(t)$ in den ganzzahligen Werten dar ([2], S. 101); wir wissen zunächst nicht, wie sich die Fouriertransformierte in den Bereichen zwischen den ganzzahligen Werten verhält. Nun ist aber die Fouriertransformierte durch die Laplacetransformierte in $s = x + i\omega$ für $x = 0$, $s = i\omega$ gegeben, wobei $\omega$ eine kontinuierliche Variable mit den ganzzahligen Werten $n$ darstellt.

Wenn also von unserer Funktion nur die Koeffizienten $c_n$ bekannt sind, können wir aus (24) eindeutig die Fouriertransformierte von $f(t)$, das außerhalb $(0, 2\pi)$ identisch verschwindet, entnehmen (die Berechtigung zur gliedweisen Integration er-

gibt sich wie früher):

$$(25)\quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-i\omega t}\, dt = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{i(n-\omega)}\left(e^{-2\pi i\omega}-1\right).$$

Der erwähnte Satz von Doetsch sagt weiter: Für die ganze Funktion $F(s) = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-st}\, dt$ gilt, wenn $\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt = M$ gesetzt wird:

$$(B)\quad \begin{aligned} &|F(s)| \leqq M \text{ für } \Re(s) \geqq 0, \\ &|F(s)| \leqq M e^{-2\pi \Re(s)} \text{ für } \Re(s) \leqq 0. \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß $F(s)$ vom Exponentialtypus ist, d. h. $|F(s)| \leqq A e^{a|s|}$ mit geeigneten festen Werten von $A$ und $a$. Unabhängig davon muß $F(s)$ als Laplacetransformierte allen Bedingungen einer solchen genügen, z. B. $F(s) \to 0$ für $\Re(s) \to +\infty$ ([2], S. 49), allgemeiner: Wenn $s_0$ ein Punkt ist, für den das Laplaceintegral konvergiert, konvergiert $F(s)$ gleichmäßig gegen null, sobald $s$ innerhalb eines Winkelraumes, gegeben durch $|\operatorname{arc}(s-s_0)| \leqq \vartheta < \frac{\pi}{2}$, gegen unendlich strebt. Insbesondere gilt also $F(s) \to 0$ auf jedem Strahl, der mit der reellen Achse einen Winkel $\alpha < \frac{\pi}{2}$ einschließt. Diese Behauptung ist auch richtig, wenn $s = s_0$ kein Konvergenzpunkt des Laplaceintegrals, sondern ein beliebiger Punkt der Ebene ist ([2], S. 57).

Damit haben wir folgendes Nebenergebnis gewonnen: Wenn wir von einer Laplacetransformierten $F(s)$, die den Bedingungen (B) genügen soll, die also das Bild einer Funktion $f(t)$ ist, welche außerhalb des Intervalls $(0, 2\pi)$ verschwindet, ihre Werte auf den ganzzahligen Punkten der imaginären $s$-Achse kennen, ist diese Funktion $f(t)$ durch (24) bis auf eine Nullmenge eindeutig bestimmt.

Ferner: Weil in diesem Falle die komplexe Umkehrformel gilt ([2], S. 105; [3], S. 413) gewinnen wir aus (24) eine Integraldarstellung von $f(t)$:

(26)
$$\frac{f(t+0)+f(t-0)}{2} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \to +\infty} \int_{x-i\omega}^{x+i\omega} e^{ts} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{ni-s} \left(e^{-2\pi s}-1\right) ds,$$

wobei $x$ jede reelle Zahl, z. B. Null bedeuten kann.

Nun wollen wir auf die Reihe (22) dasselbe Verfahren wie in (23) anwenden, aber jetzt mittels der endlichen Laplacetransformation in $(0, 2\pi)$. Der Verschiebungssatz gilt ebenso, wir haben also (gliedweise Transformation ist auf Grund unserer Voraussetzungen erlaubt)

$$(27) \qquad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n e^{inb}}{in-s} \left(e^{-2\pi s}-1\right) = e^{bs} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in-s} \left(e^{-2\pi s}-1\right).$$

Die beiden Seiten wollen wir bei $s=0$ in eine Potenzreihe entwickeln, die nun in der ganzen Ebene konvergiert (wir haben es jetzt mit einer ganzen Funktion zu tun). Das Gleichsetzen beider Entwicklungen gibt wieder Bedingungen für die Fourierkoeffizienten, die notwendig und hinreichend sind, was aus der Eindeutigkeit wie im § 2 folgt, wenn wir von einer Nullmenge absehen. Wir unterdrücken die Zwischenrechnungen und geben gleich die resultierenden Entwicklungen an, wobei ein Strich an einem Summenzeichen ($\sum'$) das Auslassen des Index Null bedeutet. Es ist

$$(28) \qquad \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n e^{inb}\left(e^{-2\pi s}-1\right)}{in-s} &= -c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-2\pi)^{k+1}}{(k+1)!} s^k \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \frac{c_n e^{inb}}{in} \frac{(-2\pi)^l}{l!} \left(\frac{-i}{n}\right)^{k-l} s^k, \end{aligned}$$

$$(29) \qquad \begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n e^{bs}\left(e^{-2\pi s}-1\right)}{in-s} &= -c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b-2\pi)^{k+1}-b^{k+1}}{(k+1)!} s^k \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k} \frac{c_n}{in} \frac{(b-2\pi)^l - b^l}{l!} \left(\frac{-i}{n}\right)^{k-l} s^k. \end{aligned}$$

In diesen beiden Formeln haben wir die Koeffizienten gleicher Potenzen von $s$ gleichzusetzen und erhalten für $k = 1, 2, \ldots$

$$(30)\quad \begin{aligned} &- c_0 \left[ \frac{(-2\pi)^{k+1}}{(k+1)!} - \frac{(b-2\pi)^{k+1} - b^{k+1}}{(k+1)!} \right] \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{l=1}^{k} \frac{c_n}{in} \left[ e^{inb} \frac{(-2\pi)^l}{l!} - \frac{(b-2\pi)^l - b^l}{l!} \right] \left( \frac{-i}{n} \right)^{k-l} = 0. \end{aligned}$$

(30) ist ein unendliches Gleichungssystem für die Größen $c_n$; hat man die $c_n$ in Abhängigkeit von $n$ gegeben, so kann man an Hand dieses Gleichungssystems versuchen, ob es durch solche $c_n$ gelöst wird. Es wird dies nicht immer ganz einfach sein. Wir wollen das vorliegende System nicht allgemein zu lösen versuchen, da wir weiter unten ein anderes aufstellen werden, das sich mittels der Theorie von Erhard Schmidt sehr leicht behandeln läßt.

Es möge noch ein Kriterium für das Verschwinden unserer Fourierreihe fast überall in $(0, b)$ angegeben werden, das gemäß § 2 notwendig und hinreichend ist. Wir gehen davon aus, daß die endliche Laplacetransformierte unserer Reihe in $(0, 2\pi)$ identisch sein muß mit derjenigen in $(b, 2\pi)$, also (gliedweise Integration wird wie früher gerechtfertigt)

$$(31)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} c_n e^{int} e^{-st}\, dt = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_b^{2\pi} c_n e^{int} e^{-st}\, dt,$$

demnach

$$(32)\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in-s} \left(e^{-2\pi s} - 1\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in-s} \left[e^{-2\pi s} - e^{b(in-s)}\right].$$

Die Entwicklung der linken Seite liegt in (28) bereits vor, die der rechten Seite lautet:

(33)

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{c_n}{in-s} \left(e^{-2\pi s} - e^{inb - bs}\right) &= - c_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \left[(2\pi)^{k+1} - b^{k+1}\right] s^k \\ &+ \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{k} \frac{c_n}{in} \frac{(2\pi)^l - e^{inb} b^l}{l!} (-1)^l \left(\frac{-i}{n}\right)^{k-l} s^k. \end{aligned}$$

Durch Koeffizientenvergleichung in (28) (dort ist $e^{inb}$ wegzulassen) und (33) findet man

$$(34) \qquad c_0 b + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \left(1 - e^{inb}\right) \frac{c_n}{in} = 0,$$

$$-c_0 \frac{(-b)^{k+1}}{(k+1)!} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty}{}' \sum_{l=1}^{k} \frac{c_n}{in} \left[\frac{e^{inb}(-b)^l}{l!} \left(\frac{-i}{n}\right)^{k-l} - \left(1 - e^{inb}\right) \left(\frac{-i}{n}\right)^k\right] = 0$$

für $k = 1, 2, 3, \ldots$

## § 4

Im folgenden wollen wir die Entwicklung im Intervall $(0, \pi)$

$$(35) \qquad f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos nt$$

zugrunde legen, wobei wir darauf verzichten, die einfachen Umrechnungen anzugeben, mittels deren eine beliebige Fourierreihe in diese Form gebracht werden kann. Wenn $f(t)$ in $0 \leqq t \leqq b = \mu\pi$ $(\mu < 1)$ identisch verschwindet, so können wir ein notwendiges und hinreichendes Kriterium dadurch gewinnen, daß wir zunächst längs der $t$-Achse eine Maßstabsveränderung so einführen, daß in einer neuen Veränderlichen $\xi$ das bisherige Intervall in $t\,(0, b)$ nunmehr zum Intervall $(0, \pi)$ wird. Dann entwickeln wir diese Funktion von $\xi$ in dem Intervall $(0, \pi)$ nach dem normierten vollständigen Orthogonalsystem $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos \xi$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos 2\xi, \ldots$ und setzen alle Koeffizienten der neuen Entwicklung gleich null. Dies ist dann notwendig und hinreichend für das identische Verschwinden der Reihe in dem $t$-Intervall $(0, b)$ bis auf eine Nullmenge ([1], S. 97). Das dabei entstehende homogene unendliche Gleichungssystem wird nach der Methode von Erhard Schmidt aufgelöst. Fassen wir unser Koeffizientensystem $a_n$, dessen Quadratsumme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ ja konvergiert ([1], S. 35), als Vektor im Hilbertschen Raum auf, so werden wir aus unserem Gleichungssystem ein Vektorensystem gewinnen, mittels

dessen wir beliebige Koeffizientensysteme $a_n$ mit konvergenten Quadratsummen durch Überlagerung aufbauen können, so daß die entsprechenden Reihen in dem Intervall $0 \leqq t \leqq b$ bis auf eine Nullmenge identisch verschwinden.

Zunächst führen wir in (35) die neue Veränderliche

$$\xi = \frac{t}{\mu} \tag{36}$$

ein, so daß der Größe $t = b$ $(b < \pi)$ die Größe $\xi = \pi$ entspricht, also

$$\mu\pi = b, \quad \mu = \frac{b}{\pi} < 1. \tag{37}$$

Dann lautet unsere Fourierreihe in $\xi$ geschrieben

$$\bar{f}(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\mu\xi \quad \text{für} \quad 0 \leqq \xi \leqq \frac{\pi}{\mu}. \tag{38}$$

Diese Funktion von $\xi$ entwickeln wir in dem Intervall $0 \leqq \xi \leqq \pi$ in eine ebensolche Reihe, wobei wir uns des in diesem Intervall normierten vollständigen Orthogonalsystems bedienen: $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos n\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Die Koeffizienten haben wir dann gleich null zu setzen und das gibt uns ein System von Bedingungen der verlangten Art. Mit

$$\begin{aligned} &\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \cos n\mu\xi \, d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\sin n\mu\pi}{n\mu}, \\ &\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos n\mu\xi \cos m\xi \, d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^m \frac{n\mu \sin n\mu\pi}{n^2\mu^2 - m^2} \end{aligned} \tag{39}$$

bekommt man, wenn man die Koeffizienten der neuen Reihe mit $c_m$ bezeichnet, also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\mu\xi = \sum_{m=0}^{\infty} c_m \cos m\xi \tag{40}$$

setzt:

$$(41)\qquad c_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty a_n \cos n\mu\xi \, d\xi = a_0 \sqrt{\pi} + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m \sin m\mu\pi}{m\mu},$$

$$(-1)^k c_k = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty a_n \cos n\mu\xi \cos k\xi \, d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m m\mu \sin m\mu\pi}{m^2\mu^2 - k^2}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Die gliedweise Integration wird wie in § 3 gerechtfertigt.

Damit haben wir ein System von Bedingungen in Form eines unendlichen Gleichungssystems gewonnen; die Unbekannten sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ ([4], S. 407–438). Auf Grund der Herkunft des Systems ist selbstverständlich, daß es unvollständig ist im Sinne der Schmidtschen Theorie, da wir ja schon wissen, daß es unendlich viele Fourierreihen der betrachteten Art gibt. Die Auflösung des Systems zeigt überdies diese Unvollständigkeit explizit an. Die Quadratsumme der Koeffizienten des Gleichungssystems ist konvergent, wie sich gleich zeigen wird. Wir bedienen uns hier der üblichen Sprechweise, indem wir das Schema $a_n$ und das Schema der Koeffizienten jeder Zeile als Vektor im Hilbertschen Raum deuten.

Wir hätten zunächst, um das System aufzulösen, das Vektorsystem zu orthogonalisieren: wir zeigen, daß es diese Eigenschaft, orthogonal zu sein, schon hat. Zunächst schreiben wir das $m$-te Element der nullten Zeile

$$(42)\qquad c_{0m} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\pi \cos m\mu\xi \, d\xi = \frac{1}{\mu\pi} \int_0^{\mu\pi} \cos mt \, dt.$$

Daher ist

$$(43)\qquad \sqrt{\pi}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \mu\pi}{\mu}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin 2\mu\pi}{2\mu}, \ \ldots, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin k\mu\pi}{k\mu}, \ldots$$

das Koeffizientenschema der Funktion

$$(44)\qquad f_0(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu} & \text{für } 0 \leqq t < \mu\pi, \\ 0 & \text{für } \mu\pi \leqq t \leqq \pi, \end{cases}$$

entwickelt nach dem normierten Orthogonalsystem $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$, $\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos n\xi$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Analog schreiben wir das $m$-te Element der $k$-ten Zeile

(45)
$$c_{km} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\pi} \cos m\mu\xi \cos k\xi \, d\xi = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\mu\pi} \cos\frac{kt}{\mu} \cos mt \, dt.$$

Das sind die Koeffizienten der Funktion

$$(46) \qquad f_k(t) = \begin{cases} \frac{1}{\mu}\cos\frac{kt}{\mu} & \text{für } 0 \leqq t < \mu\pi, \\ 0 & \text{für } \mu\pi \leqq t \leqq \pi. \end{cases}$$

Bilden wir jetzt das innere Produkt der nullten und der $k$-ten Zeile und beachten, daß $c_{k0} = 0\,(k \neq 0)$, so erhalten wir nach der Parsevalschen Formel ([1], S. 36)

$$(47) \qquad \sum_{\nu=0}^{\infty} c_{0\nu}\, c_{k\nu} = \int_0^{\mu\pi} \frac{1}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu}\cos\frac{kt}{\mu}\, dt = \frac{1}{\mu}\int_0^{\pi} \cos k\xi \, d\xi = 0.$$

Ebenso ist das innere Produkt der Zeilen $k$ und $l$

(48)
$$\sum_{\nu=0}^{\infty} c_{k\nu}\, c_{l\nu} = \int_0^{\mu\pi} \frac{1}{\mu}\cos\frac{kt}{\mu}\cdot\frac{1}{\mu}\cos\frac{lt}{\mu}\, dt = \frac{1}{\mu}\int_0^{\pi} \cos k\xi \cos l\xi \, d\xi = 0.$$

Nun haben wir dieses System noch zu normieren, was sich mittels der Parsevalschen Formel in analoger Weise erledigt. Um den nullten Vektor zu normieren, beachten wir, daß nach (41)

$$c_{00} = \sqrt{\pi} = \frac{1}{\mu\sqrt{\pi}}\int_0^{\mu\pi} d\xi, \quad c_{0m} = \frac{1}{\mu\sqrt{\pi}}\int_0^{\mu\pi} \cos mt\, dt = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{\sin m\mu\pi}{m\mu},$$

also

$$(49) \qquad \pi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi}\,\frac{\sin^2 m\mu\pi}{m^2\mu^2} = \frac{\pi}{\mu} = \int_0^{\mu\pi} \frac{1}{\mu^2}\, dt$$

ist, somit

$$\pi + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin^2 m\mu\pi}{m^2\mu^2} = \frac{\pi}{2\mu} + \frac{\pi}{2} = \frac{1+\mu}{2\mu}\pi. \tag{50}$$

Die Norm des nullten Vektors von (41) ist die Quadratwurzel daraus und nach Division durch diesen Wurzelwert lautet der normierte nullte Vektor:

$$\sqrt{\frac{2\mu}{\mu+1}}, \quad \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{2\mu}{\mu+1}}\,\frac{\sin m\mu\pi}{m\mu} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{51}$$

Ebenso finden wir den normierten $k$-ten Vektor (seine nullte Komponente ist ohnehin null): Wegen

(52)

$$c_{km} = \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m\mu\xi \cos k\xi \, d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\mu} \int_0^{\mu\pi} \cos mt \cos \frac{kt}{\mu} \, dt$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}} (-1)^k \frac{m\mu \sin m\mu\pi}{m^2\mu^2 - k^2} \quad (k, m = 1, 2, 3, \ldots)$$

ist

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} \frac{m^2\mu^2 \sin^2 m\mu\pi}{(m^2\mu^2 - k^2)^2} = \frac{1}{\mu^2} \int_0^{\mu\pi} \cos^2 \frac{kt}{\mu} \, dt = \frac{\pi}{2\mu} \tag{53}$$

und der normierte $k$-te Vektor ($k = 1, 2, \ldots$) lautet

$$0, \frac{2}{\pi}\sqrt{\mu}\,\frac{m\mu \sin m\mu\pi}{m^2\mu^2 - k^2} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{54}$$

Wir haben nun ([4], S. 427) das vollständige normierte orthogonale Achsensystem

$$\begin{aligned}
A^{(0)} &= 1, 0, 0, 0, 0, \ldots \\
A^{(1)} &= 0, 1, 0, 0, 0, \ldots \\
A^{(2)} &= 0, 0, 1, 0, 0, \ldots \\
A^{(3)} &= 0, 0, 0, 1, 0, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots \\
A^{(k)} &= 0, 0, 0, 0, \ldots, 1, \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots
\end{aligned} \tag{55}$$

nach dem vorliegenden System (51), (54) zu zerlegen und die Reste modulo dieses Systems zu finden. Da der Vektor $a_0, a_1, a_2, \ldots$, also unser Koeffizientensystem der Fourierreihe (zu unterscheiden von den Vektoren $A^{(0)}, A^{(1)}, \ldots$) auf allen Vektoren (51), (54) orthogonal sein soll, muß er eine beliebige Kombination mit konvergenter Quadratsumme der Vektoren des Restes sein, wenn er nach dem System $A^{(0)}, A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots$ zerlegt wird; darin besteht die Lösung des Gleichungssystems. Wir schreiben diese Zerlegung nur für den $k$-ten Vektor $A^{(k)}$ an und führen anschließend das Resultat der gesamten Rechnung an.

Die Vektoren, die durch die Zeilen 0, 1, 2, ..., $k$, ... des Schemas (41) unter Berücksichtigung der Normierungsbedingungen (vgl. (51), (54)) gegeben werden, nennen wir $X^{(0)}, X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(k)}, \ldots$, ihre Komponenten, d. h. die Elemente in den Spalten, $x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}, \ldots$, wobei also $x_m^{(k)}$ die $m$-te Komponente des $k$-ten Vektors darstellt. Wir schreiben $X^{(k)} = (x_0^{(k)}, x_1^{(k)}, \ldots, x_m^{(k)}, \ldots)$.

Dann ist für $k \neq 0$

$$x_0^{(k)} = 0, \quad x_m^{(k)} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\mu} \, \frac{m\mu \sin m\mu\pi}{m^2\mu^2 - k^2} \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots). \tag{56}$$

Das Vektorsystem (55) hatten wir schon analog mit $A^{(k)}$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} A^{(k)} &= (a_0^{(k)}, a_1^{(k)}, \ldots a_m^{(k)}, \ldots), \\ a_k^{(k)} &= 1, \quad a_m^{(k)} = 0 \quad (m \neq k). \end{aligned} \tag{57}$$

Bedeutet $(A^{(k)} X^{(l)})$ das innere Produkt der Vektoren $A^{(k)}$ und $X^{(l)}$, so ist

$$(A^{(k)} X^{(l)}) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(k)} a_m^{(l)} \tag{58}$$

und bekanntlich

$$A^{(k)} = \sum_{l=0}^{\infty} (A^{(k)} X^{(l)}) X^{(l)} + R^{(k)}, \tag{59}$$

wo $R^{(k)}$ den Rest des Vektors $A^{(k)}$ modulo $X^{(0)}, X^{(1)}, \ldots, X^{(l)}, \ldots$ darstellt.

Nun ist

$$(A^{(k)} X^{(l)}) = a_k^{(k)} x_k^{(l)} = x_k^{(l)}, \tag{60}$$

daher können wir die Gleichung (59) in Komponenten in folgender Weise schreiben, wobei die Komponenten $r_l^{(k)}$ des Restes sofort in Erscheinung treten:

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)} x_l^{(\nu)} + r_l^{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{für } k = l \\ 0 & \text{für } k \neq l \end{cases} \qquad (k, l = 0, 1, 2, \ldots), \tag{61}$$

sonach

$$\begin{aligned} r_k^{(k)} &= 1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)2}, \\ r_l^{(k)} &= \quad - \sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)} x_l^{(\nu)} \qquad (k \neq l), \\ & k, l = 0, 1, 2, 3, \ldots. \end{aligned} \tag{62}$$

Zur Auswertung bedienen wir uns wieder der Parsevalschen Formel. Das System der Reste ist

$$R^{(k)} = (r_0^{(k)}, r_1^{(k)}, \ldots r_m^{(k)}, \ldots) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots). \tag{63}$$

Die $x_m^{(\nu)}$ sind die aus dem normierten System (51), (54) sich ergebenden Größen, die wir wieder mittels der Parsevalschen Formel berechnen; ihre Matrix ist ersichtlich symmetrisch. Zunächst die nullte Zeile. Es ist

$$1 - \sum_{\nu=0}^{\infty} x_0^{(\nu)2} = 1 - x_0^{(0)2} = 1 - \frac{2\mu}{\mu+1} = \frac{1-\mu}{1+\mu}, \tag{64}$$

weil nur $x_0^{(0)} = \sqrt{\frac{2\mu}{\mu+1}}$ von null verschieden ist. Wir haben jetzt zu beachten, daß sich die Summationen über die Spalten erstrecken. Wegen der Symmetrie des Schemas (63) genügt es, für die nullte Zeile und Spalte $-\sum_{\nu=0}^{\infty} x_0^{(\nu)} x_k^{(\nu)}$ zu berechnen:

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty} x_0^{(\nu)} x_k^{(\nu)} = -\sqrt{\frac{2\mu}{\mu+1}} \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{2\mu}{\mu+1}} \frac{\sin k\mu\pi}{k\mu} = -\frac{2 \sin k\mu\pi}{k\pi(\mu+1)} \tag{65}$$

$$(k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Jetzt berechnen wir noch die $i$-te Zeile und erhalten wegen der Symmetrie damit von selbst auch die $k$-te Spalte. Es ist explizit geschrieben ($k, l \neq 0$)

$$
\begin{aligned}
\sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)} x_l^{(\nu)} = {} & \frac{1}{\pi^2} \frac{2\mu}{\mu+1} \frac{\sin k\mu\pi}{k\mu} \frac{\sin l\mu\pi}{l\mu} \\
& + \frac{4}{\pi^2} \mu \frac{k\mu \sin k\mu\pi}{k^2\mu^2 - 1^2} \frac{l\mu \sin l\mu\pi}{l^2\mu^2 - 1^2} \\
& + \cdots \\
& + \frac{4}{\pi^2} \mu \frac{k\mu \sin i\mu\pi}{k^2\mu^2 - m^2} \frac{l\mu \sin l\mu\pi}{l^2\mu^2 - m^2} \\
& + \cdots
\end{aligned} \tag{66}
$$

oder

$$
\sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)} x_l^{(\nu)} = \frac{1}{\pi^2} \frac{2\mu}{\mu+1} \frac{\sin k\mu\pi}{k\mu} \frac{\sin l\mu\pi}{l\mu} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4}{\pi^2} \mu \frac{k\mu \sin k\mu\pi}{k^2\mu^2 - m^2} \frac{l\mu \sin l\mu\pi}{l^2\mu^2 - m^2} . \tag{67}
$$

Statt dieser Summe betrachten wir eine ähnliche, die wir mittels der Parsevalschen Gleichung berechnen können und bringen anschließend die sofort ersichtlichen Korrekturen an, um (67) auszuwerten. Wir nehmen

$$
\begin{aligned}
S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin k\mu\pi}{k\mu} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sin l\mu\pi}{l\mu} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{k\mu \sin k\mu\pi}{k^2\mu^2 - m^2} \frac{l\mu \sin l\mu\pi}{l^2\mu^2 - m^2} \\
&= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos k\mu t}{\sqrt{\pi}} dt \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos l\mu t}{\sqrt{\pi}} dt \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos k\mu t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m t \, dt \, \cdot \\
&\quad \cdot \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l\mu t \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m t \, dt .
\end{aligned} \tag{68}
$$

Daher wird

$$
\begin{aligned}
S &= \int_0^{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos k\mu t \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos l\mu t \, dt \\
&= \frac{\pi}{4} \frac{(k-l) \sin (k+l)\mu\pi + (k+l) \sin (k-l)\mu\pi}{\mu (k^2 - l^2)} .
\end{aligned} \tag{69}
$$

$S$ ist symmetrisch in $k$ und $l$. Multiplizieren wir $S$ mit $\frac{4}{\pi^2}\mu$ und beachten wir eine evidente Korrektur, die das nullte Glied berücksichtigt, so wird

$$(70)\quad -\sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)} x_l^{(\nu)} = -\frac{1}{\pi}\,\frac{(k-l)\sin(k+l)\mu\pi + (k+l)\sin(k-l)\mu\pi}{k^2-l^2} + \frac{2}{\pi^2}\,\frac{\sin k\mu\pi \sin l\mu\pi}{kl(\mu+1)}.$$

In analoger Weise findet man

$$(71)\quad 1-\sum_{\nu=0}^{\infty} x_k^{(\nu)2} = 1 + \frac{2}{\pi^2}\,\frac{\mu^2}{\mu+1}\,\frac{\sin^2 k\mu\pi}{k^2\mu^2} - \frac{\sin 2k\mu\pi}{2k\pi} - \mu.$$

Damit sind wir in der Lage, das gesuchte Vektorensystem anzuschreiben:

$$(72)\quad \left\{\begin{array}{l}
\text{Der nullte Vektor hat die Komponenten} \\
\qquad \dfrac{1-\mu}{1+\mu},\ -\dfrac{2\sin k\mu\pi}{k\pi(\mu+1)} \qquad\qquad (k=1,2,3,\ldots), \\
\text{der } k\text{-te Vektor hat folgende Komponenten:} \\
\qquad \text{nullte Komponente: } -\dfrac{2\sin k\mu\pi}{k\pi(\mu+1)}, \\
\qquad k\text{-te Komponente: } 1+\dfrac{2\sin^2 k\mu\pi}{k^2\pi^2(\mu+1)} - \dfrac{\sin 2k\mu\pi}{2k\pi} - \mu, \\
\qquad l\text{-te Komponente } (l \neq k)\text{: } \dfrac{2\sin k\mu\pi \sin l\mu\pi}{kl\pi^2(\mu+1)} \\
\qquad\qquad - \dfrac{(k-l)\sin(k+l)\mu\pi + (k+l)\sin(k-l)\mu\pi}{(k^2-l^2)\pi} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad (k, l \neq 0).
\end{array}\right.$$

Das Ergebnis können wir in folgender Weise zusammenfassen: Der Lösungsvektor, dessen Komponenten die Fourierkoeffizienten der Reihe (35) sind, ist als Superposition von endlich oder unendlich vielen Vektoren des Schemas (72) aufzubauen, die Summe der Quadrate der Komponenten muß konvergieren. Anders ausgedrückt: Ein Vektor der verlangten Art muß, nach dem System (72) zerlegt, den Rest null ergeben.

Unsere Ergebnisse gelten für ein identisches Verschwinden der Reihensumme in $0 \leqq t \leqq b$. Somit können wir unsere Aussagen (nur die notwendigen und hinreichenden Bedingungen betreffend) noch verschärfen: Erfüllt eine Koeffizientenfolge eine solche Bedingung für ein $b = b_0$, so erfüllt sie sie für alle $0 \leqq b \leqq b_0$ von selbst. Unsere Nebenergebnisse in § 3 ermöglichen den Übergang vom diskreten Spektrum der Fourierschen Reihe der periodischen Funktion zum kontinuierlichen der nur in einem Periodenintervall definierten und sonst verschwindenden Funktion.

## Literatur

[1] R. Courant und D. Hilbert, Methoden der mathematischen Physik I (J. Springer, Berlin 1924).

[2] G. Doetsch, Theorie und Anwendung der Laplacetransformation (J. Springer, Berlin 1937).

[3] G. Doetsch, Über die endliche Laplacetransformation. Math. Ann. Bd. 123 (1951) S. 411–414.

[4] G. Kowalewski, Einführung in die Determinantentheorie (Veit und Co., Leipzig 1909).