

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

---

Jahrgang 1953

---

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

## Der Hodograph der Gravitation zweier Massenpunkte

Von Alexander Wilkens in München

Vorgelegt am 3. Juli 1953

Mit 2 Figuren

Bekanntlich hat Hamilton unter Voraussetzung des Newtonschen Gesetzes den Hodographen der Geschwindigkeiten im Zweikörperproblem untersucht und überraschenderweise einen für die drei möglichen Kegelschnitte gültigen Kreis als Lösung gefunden. Darüber hinaus bezieht sich nun die folgende Untersuchung auf den Hodographen des Beschleunigungsvektors, der zu einer weit komplizierteren algebraischen Kurve führt.

Ist im Zweikörperproblem  $r$  der Abstand eines Punktes beliebiger Masse  $m$  von der Sonne mit der Masse 1, ferner  $k^2$  die Gaußsche Konstante, ferner  $K^2 = k^2(1 + m)$  eine weitere Konstante, und  $w$  der Polarwinkel der Richtung von  $r$  gegen die Perihelrichtung eines beliebigen der 3 Kegelschnitte der Masse  $m$  um die Sonne im Brennpunkt, so ist die Gesamtbeschleunigung in der beweglichen Richtung  $r$ , zusammengesetzt aus der Newtonschen Anziehung und der Zentrifugalkraft:

$$(1) \quad \rho = \ddot{r} = -\frac{K^2}{r^2} + r \left( \frac{dw}{dt} \right)^2.$$

Da nach dem Flächenintegral

$$(2) \quad r^2 \frac{dw}{dt} = \text{const.} = K \sqrt{\phi},$$

wo  $\phi$  den Parameter des Kegelschnittes fixiert, so folgt nach Elimination von  $\dot{w}$  mittels des Integrals die weitere Form:  $\rho = -\frac{K^2}{r^2} \left( 1 - \frac{\phi}{r} \right)$ , oder weiter unter Benutzung der allgemeinen Polargleichung der drei Kegelschnitte, d. h.

$$(3) \quad r = \phi (1 + e \cos w)^{-1}$$

die neue Definition von

$$(4) \quad \rho = \frac{K^2}{p^2} (1 + e \cos w)^2 e \cos w$$

als erste Parameterdarstellung von  $\rho$  als Funktion von  $w$  als Variabler und  $e$  und  $p$  als Parametern; folglich ist im 1. und 4. Quadranten von  $w$ :  $\rho > 0$ , aber  $\rho < 0$  im 2. und 3. Quadranten. Bemerkenswert ist die Form der Abhängigkeit von  $\rho$  von  $e$ , die keine unabhängige ist, insofern  $w$  nur in der Form  $f(e) \cdot g(w)$  auftritt, weil im Falle  $e = 0$ , d. h. bei einer Kreisbahn, wo sich die Vektoren der Gravitation und der Zentrifugalkraft das Gleichgewicht halten,  $\rho = 0$  sein muß, unabhängig von  $w$ , so daß folglich  $w$  nur in der genannten Form auftreten kann, wo  $f(e)$  bei  $e = 0$  verschwinden muß, damit die Abhängigkeit von  $\rho$  von  $w$  aufhört, wobei in unserem Falle  $f(e) = e$  und  $g(w) = \cos w$  ist.

Die rechtwinkligen Koordinaten von  $\rho$ , die wir für die Untersuchung der Kurve und ihrer Eigenschaften noch benötigen, bezogen auf die Perihellinie als positive Richtung der  $x$ -Achse mit der Sonne im Brennpunkt als Nullpunkt, also der Parameterichtung als  $y$ -Achse, erhalten dann die folgenden Ausdrücke:

$$(5) \quad \begin{cases} x = \frac{K^2}{p^2} (1 + e \cos w)^2 e \cos^2 w, \\ y = \frac{K^2}{p^2} (1 + e \cos w)^2 e \cos w \sin w, \end{cases}$$

wonach  $\rho$ ,  $x$  und  $y$  von  $p = \text{Brennpunktsordinate} = a(1 - e^2)$  und der Exzentrizität als Parametern abhängig erscheinen. Die Ausdrücke für  $\rho$ ,  $x$  und  $y$  haben dann als gemeinsamen Faktor die Größe  $\frac{K^2}{p^2}$ , die also von der Ordinate  $p$  des Brennpunktes abhängig ist, während bei Substitution von  $p = a(1 - e^2)$  eine Abhängigkeit von  $a$  entstehen würde, so daß man alsdann die genannten Formeln numerisch nicht auf alle drei Kegelschnitte anwenden könnte, weil bei der Parabel mit  $e = 1$  die halbe große Achse  $a = \infty$  wird. Deshalb ist es zwecks Gültigkeit der Formeln für alle 3 Kegelschnitte, auch vom Standpunkt der kontinuierlichen numerischen Anwendung über die Parabelgrenze hinaus angebracht, die Größe  $q = a(1 - e) = \text{Perihelabstand}$  in allen

3 Kegelschnitten als gemeinsamen konstanten Faktor für alle 3 Kegelschnitte zu verwenden, so daß wegen  $p = a(1 - e^2) = (1 + e)q$  die folgende gemeinsame Formel mit demselben konstanten Faktor  $C$  erhalten wird:

$$(4a) \quad \rho = C \frac{(1 + e \cos w)^2}{(1 + e)^2} e \cos w, \text{ wo } C = \frac{K^2}{q^2}.$$

Unsere Aufgabe besteht nun in der Analyse der Gleichungen (4) resp. (4a) und (5), wobei die Formel (4a) die einfachste Parameterdarstellung von  $\rho$  sein dürfte, besonders, wenn noch nützlicher Weise, wie später,  $e \cos w = z$  gesetzt wird, so daß die neue Form (4b):

$$(4b) \quad \rho = C \cdot \frac{(1+Z)^2}{(1+e)^2} \cdot Z$$

entsteht, während die Formeln (5) für die Koordinaten die für die graphische Darstellung des Hodographen praktische Form fixieren.

Aus der Darstellung (4) von  $\rho$  folgte, daß  $\rho$  längs der Richtung  $r$  sowohl positiv wie negativ sein kann, aber in bezug auf die korrespondierenden Koordinaten  $x$  und  $y$  folgt, daß nach (5) die Abszissen  $x$  stets nur positiv oder 0, nämlich bei  $w = 90^\circ$  resp.  $270^\circ$ , sind, während  $y$  positiv wie negativ ist. Folglich liegt der ganze Hodograph nur einseitig auf der durch die positive  $x$ -Achse charakterisierten Halbebene und symmetrisch zur  $x$ -Achse, da  $y$  bei der Vertauschung von  $w$  mit  $-w$  nur das Vorzeichen ändert, so daß weiter der Hodograph nur zwischen  $w = 0^\circ$  und  $w = 180^\circ$  zu untersuchen ist.

Sucht man eine von  $w$  unabhängige algebraische Darstellung des Hodographen, so ergibt sich als erste unmittelbar die durch Substitution in (4) mittels  $\cos w = \frac{x}{\rho}$  erhaltene:

$$(6) \quad \rho^4 - C' e x \rho^2 - 2 C' e^2 x^2 \cdot \rho - C' e^3 x^3 = 0,$$

wo  $C' = \frac{K^2}{p^2}$  und somit eine algebraische Gleichung 4. Grades in  $\rho$  und 3. Grades in  $x$  entsteht; verzichtet man auf die Darstellung nach ganzen Potenzen von  $x$ , so erhält man unmittelbar aus der

Grundform die Gleichung:  $\rho^4 = C \frac{(\rho+ex)^2}{(1+e)^2} e \cdot x$ , so daß bei Radizieren folgt:

$$(7) \quad \rho^2 = \pm \sqrt{C} \frac{\rho+ex}{1+e} \sqrt{e} \sqrt{x},$$

jetzt also eine in  $\rho$  quadratische Gleichung, der zufolge die Lösungen nach (7) lauten:

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_1 = + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{Cex}}{1+e} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{Cex}{(1+e)^2} + \frac{e^{3/2} \cdot x^{3/2} \cdot C^{1/2}}{1+e}} \\ \rho_2 = + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{Cex}}{1+e} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{Cex}{(1+e)^2} + \frac{e^{3/2} \cdot x^{3/2} \cdot C^{1/2}}{1+e}} \\ \rho_3 = - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{Cex}}{1+e} + \sqrt{\frac{1}{4} \frac{Cex}{(1+e)^2} - \frac{e^{3/2} \cdot x^{3/2} \cdot C^{1/2}}{1+e}} \\ \rho_4 = - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{Cex}}{1+e} - \sqrt{\frac{1}{4} \frac{Cex}{(1+e)^2} - \frac{e^{3/2} \cdot x^{3/2} \cdot C^{1/2}}{1+e}} \end{array} \right.$$

Da stets  $x \geq 0$ , so folgt nach (8) zuerst, daß stets  $\rho_1 \geq 0$ , gemäß (4) dem 1. und 4. Quadranten von  $w$  entsprechend; ebenso folgt mit Rücksicht auf  $x > 0$  beim Vergleich der beiden Summanden in jeder der anderen Wurzeln  $\rho$ , daß stets  $\rho_2 < 0$ , analog stets  $\rho_3 < 0$  und  $\rho_4 < 0$ , solange die Diskriminante positiv verbleibt. Da im 1. und 4. Quadranten von  $w$  gemäß (4) nur positives  $\rho$ , d. h.  $\rho = \rho_1$  gilt, so kommt die zweite Wurzel  $\rho = \rho_2$  der Gruppe  $(\rho_1, \rho_2)$  gar nicht in Frage. Das Wurzelpaar  $\rho_3$  und  $\rho_4$  bezieht sich, weil beide negativ sind, auf den 2. und 3. Quadranten von  $w$ , d. h.  $|w| > 90^\circ$ , aber  $< 270^\circ$ ;  $\rho_3$  und  $\rho_4$  können zusammenfallen, wenn die Diskriminante verschwindet, woraus die Bedingung für die Existenz der Grenze für reelles  $x$  zu folgern ist. Man erhält als Bedingung:  $\frac{1}{4} \sqrt{C} > \sqrt{ex}(1+e)$ , also  $ex < \frac{1}{16} C (1+e)^{-2}$ ; zur Ableitung des Grenzwertes ist das Maximum von  $x$ , und zwar für  $w = 180^\circ$  auf der  $x$ -Achse zu substituieren, weil  $\rho_3$  und  $\rho_4$  dem 2. Quadranten von  $w$ , also weil negativ, dem 4. Quadranten der Zeichnung entsprechen, so daß  $|\rho(180)| = x(180^\circ) = C \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2 \cdot e$ .

Folglich geht die Ungleichung über in:  $e \cdot x = C e^2 \left( \frac{1-e}{1+e} \right)^2 < < \frac{1}{16} C (1+e)^{-2}$ , d. h.  $|e(1-e)| < \frac{1}{4}$ ; sie ist also erfüllt für alle Werte von  $e$  zwischen 0 und  $\frac{1}{2} (1 + \sqrt{2})$ .

Hieran anschließend wollen wir sogleich die Extreme von  $\rho$  allgemein als Funktion von  $w$  untersuchen. Nach (4a) folgt als Bedingung:  $\frac{d\rho}{dw} = -C \frac{e}{(1+e)^2} (1+e \cos w) (1+3e \cos w) \cdot \sin w = 0$ , also: 1)  $1+e \cos w = 0$ , deren Erfüllung nur ab  $e = 1$ , also speziell bei der Parabel möglich ist, allgemein aber nur bei der Hyperbel, in beiden Fällen nur bei  $r = \infty$ , bei  $w = 180^\circ$  bei der Parabel, und bei  $w = w_0$ , dem der Asymptotenrichtung entsprechenden Polarwinkel  $w_0$ , definiert durch  $\cos w_0 = -\frac{1}{e}$ , und zwar mit der Folgerung, daß  $\rho = 0$ . Die zweite Möglichkeit eines Extremis ist gegeben durch 2)  $1+3e \cos w = 0$ , also  $\cos w = -\frac{1}{3e}$ , wo  $w$  folglich nur im 2. oder 3. Quadranten gelegen ist und  $e > \frac{1}{3}$  sein muß, das entsprechende Extrem also bei allen 3 Kegelschnitten eintritt. Im Falle des Extremis, wo  $\cos w = -\frac{1}{3e}$ , ergibt sich  $\rho = -\frac{4}{27} C (1+e)^{-2}$  und dann für den korrespondierenden Wert von  $x$ :  $x = \rho \cos w = \frac{4}{81} (1+e)^{-2} \cdot C$ , also im speziellen Falle, wo  $e = \frac{1}{3}$ , folglich  $w = 180^\circ$ :  $x = \frac{1}{12} C$  als Maximalwert des Extremis von  $x$  bei  $\cos w = -\frac{1}{3e}$ , da  $x$  für  $e > \frac{1}{3}$  nach obiger Formel abnehmen muß.

3)  $\sin w = 0$ , so daß die Extreme von  $\rho$  alsdann bei  $w = 0$  und  $w = 180^\circ$  als Maximum bzw. Minimum eintreten.

Weiter wollen wir jetzt allgemein die Extreme in bezug auf  $x$  und  $y$  untersuchen. Die entsprechende aus (5) abzuleitende Bedingung für  $x$  lautet dann:

$$(9) \quad \frac{dx}{dw} = -2 C (1+e \cos w) (1+2e \cos w) \frac{e}{(1+e)^2} \sin w \cos w,$$

wonach Extreme eintreten bei: 1)  $\sin w = 0$ , also bei  $w = 0$  und  $w = 180^\circ$ , entsprechend den Abszissen  $x_0 = C \cdot e$  und

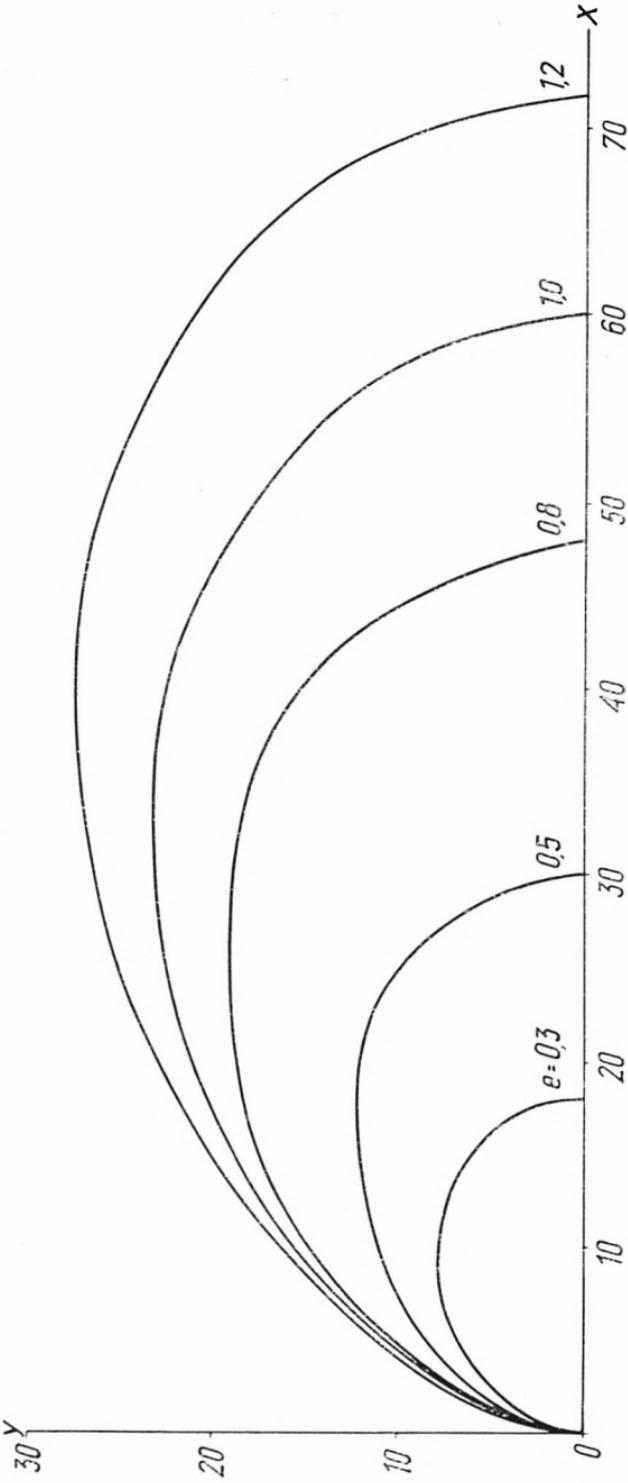


Fig. 1

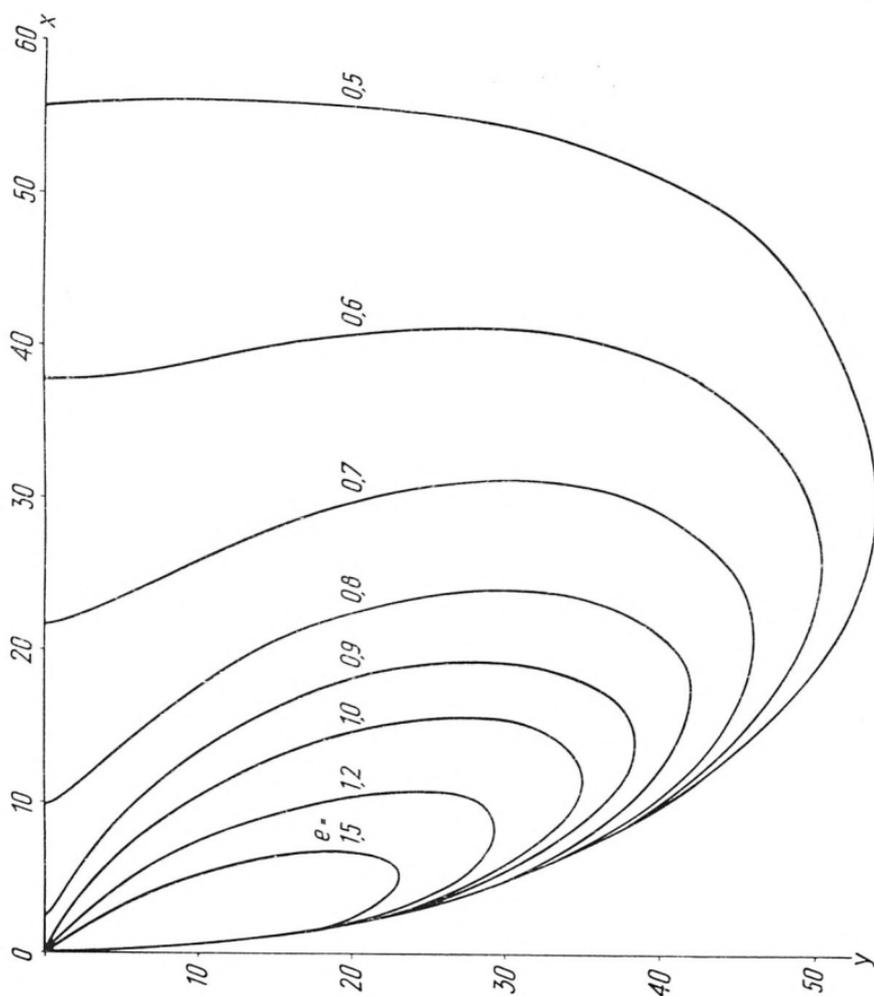


Fig. 2

$x(180^\circ) = C \cdot \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 e$  für alle Exzentrizitäten, ferner 2) bei  $\cos w = 0$ , also folglich bei  $x = y = \rho = 0$  bei  $w = 90^\circ$  für alle  $e$ -Werte und so, daß wegen  $\frac{dx}{dw} = 0$  die Kurven im Nullpunkte senkrecht auf der Achse stehen, die  $y$ -Achse also Tangente für alle  $e$  im Nullpunkte ist, abgesehen vom Sonderfall der Kreisbahn mit  $e = \rho = 0$ , wo der Hodograph sich auf den Nullpunkt reduziert, 3) bei  $1 + e \cos w = 0$ , was nur möglich bei  $e \geq 1$ , d. h. bei  $e = 1$  im Falle der Parabel, wo dann  $w = 180^\circ$  sein muß, dem unendlich fernen Punkt der Parabel entsprechend, also dem Hodographenpunkte  $x = y = \rho = 0$ , dem Anfangspunkte, während bei  $e > 1$ , also der Hyperbelbahn, wegen der Bedingung 3)  $\rho = 0$ , aber die Richtung der Hodographenkurve bedingt ist durch  $\cos w_0 = -\frac{1}{e}$ , entsprechend dem auf der Asymptote gelegenen unendlich fernen Punkte der Hyperbel in der Richtung  $w_0$  zwischen  $w = 90^\circ$  und  $180^\circ$ , 4)  $1 + 2 \cdot e \cos w = 0$ , also bei  $\cos w = -\frac{1}{2e}$ , so daß also  $90^\circ < |w| < 180^\circ$  und  $e$  begrenzt ist durch die Bedingung, daß  $e > \frac{1}{2}$ , bzw. im Minimum  $e = \frac{1}{2}$  bei  $w = 180^\circ$  sein muß, der entsprechende Hodographenpunkt also auf der  $x$ -Achse liegt, während bei  $e > \frac{1}{2}$  der dem Extrem entsprechende Punkt außerhalb der  $x$ -Achse gelegen ist, also  $w \neq 180^\circ$ , auch bei der Hyperbel.

Von Bedeutung ist nun der Verlauf der Differenz zwischen dem soeben abgeleiteten Extrem bei beliebigem  $e$  in bezug auf die  $x$ -Achse und dem  $x(180^\circ)$  bei demselben  $e$ , also derselben Hodographenkurve, entsprechend dem Falle 4) so daß das Extrem  $x(E) = \frac{1}{16} C (1 + e)^{-2} e^{-1}$ , andererseits ist  $x(180^\circ) = C \left(\frac{1-e}{1+e}\right)^2 \cdot e$ , so daß die gesuchte Differenz:

$$(10) \quad D = x(E) - x(180^\circ) = \frac{1}{16} C e^{-1} (1 + e)^{-2} [1 - 16 e^2 (1 - e)^2];$$

folglich wird  $D = 0$  bei  $e = \frac{1}{2}$ , um dann weiter ab  $e > \frac{1}{2}$ , was allein in Frage kommt, bis  $e = 1$  an dieser Stelle bis zu  $D = \frac{1}{64} C$  anzusteigen, wobei mit  $e = 1$  der Kurvenpunkt, entsprechend  $w = \text{maximum} = 180^\circ$ , in den Nullpunkt rückt, d. h.

$x(180^\circ) = 0$  wird. Wächst jetzt  $e$  über  $e = 1$  hinaus weiter an, so bleibt der Nullpunkt das Extrem auf der  $x$ -Achse, indem  $w = 180^\circ$  als Lösung von  $1 + e \cdot \cos w = 0$  nicht mehr möglich ist, wohl aber eine von  $w = 180^\circ$  verschiedene Richtung am Nullpunkt gemäß der Lösung von  $\cos w = -\frac{1}{e}$ , wobei folglich ab  $e = 1$  der 2. Teil von  $D$ ,  $x(180^\circ) = 0$  wird, und deshalb  $D$  sich allein auf den 1. Teil reduziert, d. h.:  $D = D' = x(E) = \frac{1}{16} C (1 + e)^{-2} \cdot e^{-1}$ , wo  $D'$  nun mit wachsendem  $e$  ab  $e = 1$  kontinuierlich bis zum Werte  $D' = 0$  abnimmt. Zwecks einer konkreten Vorstellung der Größenordnung des Betrages  $D$  (max) werde der  $e = 1$  bei  $w = 0$  entsprechende Punkt auf der  $x$ -Achse fixiert, für den  $x_1 = \rho(\max) = C$  beträgt, so daß also  $D(\max): x_1 = 1:64$  einen so geringen Prozentsatz bedeutet, daß bei der Zeichnung die innere Schleife ( $w = 90^\circ$  bis  $180^\circ$  und deren Spiegelbild  $w = 180^\circ$  bis  $w = 270^\circ$ ) stark (1000:60) gegen die äußere Schleife vergrößert werden mußte.

Die Extreme der  $y$ -Koordinate folgen aus der entsprechenden Bedingung:

$$(11) \quad \frac{dy}{dw} = C \cdot e (1 + e)^{-2} (1 + e \cos w) (\cos 2w + e \cos 3w) = 0.$$

Folglich ergibt sich, abgesehen von dem Falle der Kreisbewegung  $e = 0$ , der Reduktion des Hodographen auf den Koordinatenanfang, als erste Bedingung: 1)  $1 + e \cos w = 0$ , also  $\cos w = -\frac{1}{e}$  mit  $w$  im 2. und 3. Quadranten und  $e \geq 1$ ; im Falle  $e = 1$ , der Parabel, muß folglich  $w = 180^\circ$ , also  $\rho = 0$  sein, dem Koordinatenanfangspunkt entsprechend, wo, wie wir schon wissen, der Hodograph die  $x$ -Achse in einer Spitze berührt. Aber die Bedingung 1) wird außer im Spezialfall  $e = 1$  noch für jedes  $e > 1$  erfüllt, wobei dann  $\cos w_0 = -\frac{1}{e}$  sein muß und der Hodograph wegen  $\rho = 0$  durch den Nullpunkt geht, aber die Berührung jetzt längs der der Asymptoten parallelen durch den Nullpunkt gehenden Graden stattfindet. Diese beiden unter der Bedingung 1) behandelten Extreme sind aber nur Nebenextreme, weil sie nur auf der  $x$ -Achse liegen, während die Haupt-Extreme von  $y$  oberhalb und unterhalb der  $x$ -Achse gelegen sind und auf Grund der

2. Bedingung zu erwarten sind, derzufolge 2)  $f(w, e) = \cos 2w + e \cos 3w = 0$  ist. Ist  $e = 0$ , so folgen die beiden Lösungen  $w_1 = 45^\circ$  und  $w_2 = 135^\circ$ , ferner bei  $e = 1$  die Lösung  $w = 180^\circ$ , aber außerdem noch die von  $w = 180^\circ$  verschiedenen Lösungen:  $w_3 = 36^\circ$  und  $w_4 = 108^\circ = 3w_3$ , wie unmittelbar ersichtlich ist, ohne Auflösung der entsprechenden Gleichung 3. Grades in  $\cos w$ . Damit haben wir die außerhalb der  $x$ -Achse gelegenen Lösungen gefunden, wobei  $w_3$  dem Extrem-Maximum des Hodographen bei  $e = 1$  im 1. Quadranten und  $w_4$  dem Minimum im 4. Quadranten entspricht, gemäß dem entsprechenden  $r$  im 2. Quadranten. Anstatt weiter die bei  $e \neq 1$  geltenden  $w$  mittels der Gleichung 3. Grades in  $\cos w$  zu ermitteln, wurden umgekehrt mit  $w$  als Argument die entsprechenden  $e$  aus der Gleichung  $f(w, e) = 0$  berechnet, wonach sich die folgenden Tabellen mit den zugehörigen Werten von  $w$  und  $e$  von  $e = 0$  bis  $e = 1.5$  zur Berechnung der entsprechenden Extremwerte der Koordinaten  $x, y$  und  $r$  ergeben:

$$f(w, e) = 0$$

$w$	$e$	$w$	$e$	$w$	$e$
34.5	1.53	40.0	0.35	135°	0.00
35.0	1.32	40.5	.30	130	.20
35.5	1.15	41.0	.26	125	.35
36.0	1.00	41.5	.22	120	.50
36.5	0.88	42.0	.18	115	.66
37.0	.77	42.5	.14	110	0.88
37.5	.68	43.0	.11	108	1.00
38.0	.60	43.5	.08	107	1.07
38.5	.52	44.0	.05	106	1.14
39.0	.46	44.5	.02	105	1.23
39.5	.40	45.0	0.00	104	1.32
40.0	0.35			103	1.43
				102	1.56

woraus ersichtlich ist, daß das Intervall  $e = 0$  bis  $e = 1.5$  in beiden Fällen in bezug auf  $w$  rasch durchlaufen wird, im ersten Falle, oberhalb der  $x$ -Achse, ab  $w = 34.5^\circ$  bis  $w = 45^\circ$ , und unterhalb der  $x$ -Achse ab  $w = 102^\circ$  bis  $w = 135^\circ$ .

Nach der Untersuchung der Extreme in  $x$  wie  $y$  erhebt sich noch die Frage nach den Wendepunkten des Hodographen, deren Existenz bereits durch die positive Differenz  $D = x(E) - x(180^\circ)$  ab  $e > 0.5$  nahegelegt war, insofern auch schon oben gezeigt worden ist, daß der Hodograph in den Punkten auf der  $x$ -Achse, entsprechend  $w = 0$  bzw.  $180^\circ$  senkrecht stehen muß, weil hier  $\frac{dx}{dw} = 0$  ist, also zwischen den Maxima von  $x$  und den Schnittpunkten mit der  $x$ -Achse Wendepunkte vorhanden sein müssen, ausgenommen war nur der Fall  $e = 1$  und  $e > 1$ , weil in diesem Falle im Nullpunkt Spitzen eintreten. Allgemein ergibt sich nun die Existenz und Lage der Wendepunkte außerhalb der  $x$ -Achse auf Grund der Bedingung, daß der Krümmungsradius im Kurvenpunkte unendlich, also die 2. Ableitung  $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$  sein muß. Zunächst erhält man gemäß der Definition (5) der Koordinaten:  $y' = \frac{dy}{dx} = -\frac{\cos 2w + e \cos 3w}{\sin 2w (1 + 2e \cos w)}$ , um hieraus dann zu folgern:

$$(12) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dy'}{dw} : \frac{dx}{dw},$$

weil die Ableitungen  $\frac{dy'}{dw}$  und  $\frac{dx}{dw}$  unmittelbar aus  $y'$  und  $x$  zu bilden sind. Zuerst ergibt sich

$$(13) \quad \frac{dy'}{dw} = + \frac{1}{N} \left[ 2 + 3e^2 + \frac{13}{2}e \cos w + 2e^2 \cos 2w - \frac{1}{2}e \cos 3w - e^2 \cos 4w \right],$$

wo  $N = \sin^2 2w (1 + 2e \cos w)^2$ , und  $\frac{dx}{dw} = -2 \frac{C}{(1+e)^2} (1 + e \cos w) \cdot (1 + 2e \cos w) \cdot e \cdot \sin w \cdot \cos w$ . Da wir die Wendepunkte außerhalb der  $x$ -Achse suchen, wo  $w \neq 0$  und  $w \neq 180^\circ$ , so daß der Faktor  $\sin^2 2w$  im Nenner  $N$  verschieden von 0 ist, bleibt die Bedingung für die Wendepunkte das Verschwinden des Zählers, d. h. die in  $e$  quadratische Gleichung:

$$(14) \quad e^2(3 + 2 \cos 2w - \cos 4w) + e \left( \frac{13}{2} \cos w - \frac{1}{2} \cos 3w \right) + 2 = 0,$$

woraus sich die beiden Wurzeln  $e_1 = +1$  und  $e_2 = +\frac{1}{2}$  bei  $w = 180^\circ$  ergeben, den Grenzen auf der  $x$ -Achse entsprechend,

zwischen denen allein Wendepunkte möglich sind, d. h. zwischen  $w = 180^\circ$  und  $w = 161.5$ , bei welchem Werte  $w$  die Diskriminante der obigen Gleichung in  $e$  verschwindet, und zwar bei  $e = 0.681$  als Doppelwurzel. Die folgende Tabelle, berechnet auf Grund der Auflösung der obigen quadratischen Gleichung in  $e$ , gibt eine Übersicht über den Verlauf der Wurzeln  $e$  bis zur Doppelwurzel  $e = 0.681$  bei  $w = 161.5$ . Bemerkenswert ist, daß die Wendepunkte alle nahe bei der  $x$ -Achse gelegen bleiben, indem die Höchstabweichung von  $w = 180^\circ$  nur  $18.5$  beträgt.

$w$	$e_1$	$e_2$
$180^\circ$	1.000	0.500
177.5	1.000	0.500
175	0.979	0.507
172.5	0.960	0.512
170.	.928	.524
167.5	.889	.539
165	.833	.567
164	.810	.580
163	.776	.602
162	.741	.627
161.5	.681	.681
161.0	imag.	imag.

Insgesamt sind demnach die oben abgeleiteten Hodographenkurven der radialen Beschleunigung, entsprechend dem Newtonschen Gesetze, ergänzt gedacht durch die zur  $x$ -Achse, der Apsidenlinie der drei möglichen Kegelschnitte, ober- wie unterhalb dieser Achse aus einer äußeren und inneren Schleife zusammengesetzt; dabei löst sich die innere Schleife ab  $e = 1$  (Parabel) in 2 durch die  $x$ -Achse getrennte Schleifen auf. Ferner zeigen die inneren Schleifen ab  $e = 0.5$  bis zur Grenze  $e = 1$  auf der  $x$ -Achse infolge von Wendepunkten entstehende Einbuchtungen, die bis  $e = 0.68$  zum Maximum anwachsen, um sich dann ständig abnehmend bei der Grenze  $e = 1$  auf eine Spitze im Nullpunkt zu reduzieren, womit die herzförmigen Innenschleifen dann in 2 zur  $x$ -Achse symmetrische Schleifen zerfallen, deren Fläche sich mit wachsendem  $e$  ständig bis zum Verschwinden vermindert.

während die äußeren Schleifen mit wachsendem  $e$  sich ständig vergrößern.

Zu den Figuren 1 und 2 sei bemerkt, daß sie auf Grund der Rechnungen entsprechend  $e = 0.3, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2$  und  $1.5$  erhalten wurden. Der Vergrößerungsfaktor ist für die äußeren Schleifen ein anderer als der für die inneren, wegen der, wie erwähnt, erheblich geringeren Dimensionen, so daß der Vergrößerungsfaktor der inneren zu den äußeren Schleifen im Verhältnis 100:6 steht.