Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1953

München 1954

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Beitrag zur Elastizitätstheorie bei großen Formänderungen

Von **Ludwig Föppl** in München

Vorgelegt in der Sitzung vom 6. Februar 1953

Mit einer Tafel

Bekanntlich wird in der klassischen Elastizitätstheorie fester Körper vorausgesetzt, daß die Formänderungen, die der Körper bei irgendwelcher Belastung erfährt, als unendlich klein gegenüber den Abmessungen des Körpers angesehen werden dürfen. Bei den meisten Konstruktionen sowohl des Maschinen- wie des Bauingenieurs trifft diese Voraussetzung zu, da bei der Belastung solcher Konstruktionen die elastischen Formänderungen im allgemeinen so gering sind, daß sie mit dem bloßen Auge kaum wahrgenommen werden können. Es hängt dies wesentlich vom Elastizitätsmodul der dabei verwendeten Werkstoffe ab. Der hohe Wert des Elastizitätsmoduls für Eisen und Stahl bedingt, daß die Dehnungen sehr gering sein müssen, damit die Elastizitätsgrenze nicht überschritten wird. Allerdings gibt es Fälle, bei denen trotz geringer elastischer Dehnungen größere endliche Formänderungen des Körpers möglich sind; nämlich dann, wenn der Körper mindestens in einer Richtung sehr kleine Abmessungen besitzt wie z. B. eine Uhrfeder, die beim Aufziehen der Uhr eine sehr große Gestaltänderung als Ganzes erfährt, ohne daß die Dehnungen an irgendeiner Stelle der Feder die Elastizitätsgrenze zu überschreiten brauchen. Dasselbe gilt auch für Stäbe, deren Querschnittsabmessungen sehr klein gegenüber ihrer Länge sind, so daß sie rein elastisch unter Umständen zu einem Kreis von verhältnismäßig kleinem Radius gebogen werden können. Auch bei dünnen Platten und Schalen gilt ähnliches.

In erhöhtem Maße gilt das soeben für Eisen und Stahl Gesagte auch für Holz, für das der Elastizitätsmodul um ein bis zwei Zehnerpotenzen geringer ist als für Stahl. Im allgemeinen kann man sagen, daß mit abnehmendem Elastizitätsmodul der für eine

Konstruktion verwendeten Werkstoffe die zulässigen elastischen Dehnungen zunehmen. Bei Gummi mit seinem geringen Elastizitätsmodul sind große elastische Formänderungen ohne Einschränkungen hinsichtlich der Gestalt des Körpers möglich.

Mit dieser Vorbemerkung ist das Gebiet abgesteckt, für das die *folgenden Überlegungen Gültigkeit besitzen. Wir wollen* zunächst ein Beispiel behandeln, bevor wir verallgemeinern.

Wir gehen von einem kreisgelochten Flachstab nach Bild 1 aus mit einem rechteckigen Querschnitt (von den Abmessungen $1 \times 4{,}5\ \mathrm{cm}^2$), der auf reinen Zug beansprucht wird und eine solche Länge besitzt, daß die vom kreisförmigen Loch herrührenden Störungen des einachsigen Spannungszustandes an den Stabenden, wo die gleichmäßig über den Querschnitt verteilten Zugspannungen eingeleitet werden, praktisch vollkommen abgeklungen sein sollen. Der Stab besteht aus dem spannungsoptisch aktiven Werkstoff Dekorit. Bild 1 zeigt zugleich das Isochromatenbild, das sich dem in Richtung der Achse der spannungsoptischen Apparatur blickenden Beschauer bietet, wenn der Zugversuch zwischen den Polaroiden des Apparates durchgeführt wird. Dieses Isochromatenbild ist das fünfte einer Serie von 10 Aufnahmen, von denen die erste Aufnahme einer solchen Zugbelastung entspricht, daß nahe den Stabenden die erste Isochromatenordnung auftritt. Bei jeder folgenden Aufnahme wächst die Ordnung an dieser Stelle um die Einheit; d. h. daß die Zugbeanspruchung von einem Versuch zum nächsten der Reihe jedesmal um den gleichen Betrag zunimmt. Bei Bild 1 charakterisiert die 5. Ordnung am unteren Rand des Zugstabes das Bild als fünftes der Serie.

Die größte Beanspruchung tritt am horizontalen Durchmesser des Loches auf, wo die höchste Ordnung etwa 15,5 beträgt. Es sei darauf hingewiesen, daß beim 10. Bild der Reihe, wo demnach die doppelte Zugbeanspruchung wie bei dem hier wiedergegebenen 5. Bild der Reihe vorliegt, am Lochrand etwa die 30. Ordnung festgestellt werden konnte. Es handelte sich dabei um rein elastische Spannungen, die bei Entlastung wieder vollkommen zurückgingen.

Wie obiges Isochromatenbild zeigt, kann man mit bloßem Auge keine Deformation des ursprünglich kreisförmigen Loches erkennen. Es hängt dies mit dem verhältnismäßig großen Elastizitätsmodul E des Dekorits von etwa 30000 kg/cm^2 zusammen.

Wir vergleichen nun Bild 1 mit Bild 2. Letzteres Isochromatenbild ist mit einem Stab aus spannungsoptisch aktivem Gummi gewonnen, der vor der Belastung dieselben Abmessungen besaß wie der unbelastete Dekoritstab von Bild 1. Die Kreislöcher beider Stäbe haben in unbelastetem Zustand denselben Durchmesser. Der Elastizitätsmodul des Gummis $E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$ wurde von uns zu 11,40 kg/cm^2 bestimmt und dabei eine streng proportionale Abhängigkeit zwischen der Dehnung ε und der auf den jeweiligen Querschnitt bezogenen Spannung σ festgestellt.

Von dem Gummistab wurde auch eine Versuchsreihe mit 10 Aufnahmen gemacht, von denen jeder folgende Versuch der Reihe gegenüber dem vorhergehenden dem gleichen Zuwachs an Zugkraft entspricht, wobei dieser Betrag so bemessen wurde, daß ebenso wie bei der zu Bild 1 gehörigen Reihe die von der Störung durch das Loch nicht mehr beeinflußte Zone nahe an den Stabenden jeweils um eine Isochromatenordnung zunahm. Unser Bild 2 ist demnach das fünfte Bild dieser Reihe, da nahe dem unteren Stabende die 5. Ordnung auftritt. Der Vergleich zwischen den Isochromatenordnungen der Bilder 1 und 2 zeigt, daß beim Gummistab eine große Formänderung zu beobachten ist, die unter anderem dazu geführt hat, daß das ursprünglich kreisförmige Loch in der Zugrichtung verlängert und quer dazu verengt wurde, so daß es ungefähr Ellipsengestalt angenommen hat. Die höchste Ordnung am Lochrand ist gegenüber Bild 1 zurückgeblieben und beträgt nur noch 12,2 bis 12,5.

Nunmehr wollen wir Bild 2 mit Bild 3 vergleichen. Letzteres ist aus einem Dekoritstab gewonnen worden, der dem Gummistab in der deformierten Gestalt von Bild 2 getreulich nachgebildet worden ist und auf Zug beansprucht wurde, bis nahe dem unteren Rand die 5. Isochromatenordnung auftrat. Das Bemerkenswerte an dem Vergleich der Bilder 2 und 3 ist die nahezu vollständige Übereinstimmung beider Isochromatenbilder. Die geringen Abweichungen der beiden Bilder müssen aus Versuchsfehlern stammen, so daß wir von ihnen absehen können. Die Übereinstimmung der Isochromatenbilder 2 und 3 ist zugleich ein Beweis dafür, daß beim Gummi ebenso wie bei Dekorit der spannungsoptische Effekt proportional mit der Spannung zunimmt. Es wurde dies bei dem oben erwähnten Zugversuch bestätigt gefunden.

Die Übereinstimmung der beiden Isochromatenbilder bedeutet, daß in beiden Stäben bis auf einen konstanten Faktor, der das Verhältnis der spannungsoptischen Konstanten von Gummi und Dekorit angibt, derselbe Spannungszustand herrschen muß. Es ist klar, daß die beiden Zehnerreihen, zu denen die obigen Bilder 1 und 2 gehören, einander zugeordnet sind, so daß 10 Bilderpaare entstehen, bei denen man bei jedem Paar ebenso vorgehen kann, wie es beim fünften Bilderpaar oben auseinandergesetzt worden ist. Dabei entsteht eine dritte Reihe von 10 Bildern, zu denen als fünftes obiges Bild 3 gehört. Diese dritte Reihe von Isochromatenbildern würde mit der zweiten vollkommen übereinstimmen. Jedes ihrer 10 Bilder würde aber ein neues Dekoritmodell erfordern, das dem zugehörigen deformierten Gummimodell der zweiten Reihe nachgebildet sein müßte.

Als Ergebnis dieser Überlegungen können wir feststellen, daß sich die Elastizitätstheorie bei großen elastischen Formänderungen auf die klassische Elastizitätstheorie, die unendlich kleine Dehnungen voraussetzt, zurückführen läßt, indem man die Belastung des Gummimodelles in kleinen Schritten vornimmt, denen natürlich auch kleine Formänderungen entsprechen. Diese einzelnen Schritte spielen sich im Rahmen der klassischen Elastizitätstheorie ab, wobei die dem einzelnen Schritt entsprechende elastische Formänderung bei der Anfangsgestalt des Körpers für den folgenden Schritt zu berücksichtigen ist. Der Unterschied zwischen der Elastizitätstheorie bei sehr kleinen Formänderungen und der bei beliebig großen besteht im wesentlichen darin, daß man im ersteren Fall die Gleichgewichtsbedingungen auf den ursprünglichen undeformierten Körper beziehen darf, während bei großen Formänderungen das Gleichgewicht am deformierten Körper auszudrücken ist.

Daß bei einem Körper mit einem Werkstoff von geringem Elastizitätsmodul E, der große Formänderungen rein elastisch aufnehmen kann, die kleinen Einzelschritte, in die man die gesamte Formänderung des Körpers aufteilen kann, der klassischen Elastizitätstheorie gehorchen, folgt aus dem Eindeutigkeitssatz der Elastizitätstheorie, wonach bei gegebener Gestalt und gegebener Belastung des Körpers der elastische Spannungszustand aus der Elastizitätstheorie eindeutig folgt, wobei die Hookeschen Gleichungen den Zusammenhang zwischen Spannungen und Formänderungen angeben. Da für kleine Einzelschritte ebenso wie für große bei Körpern aus Gummi die Hookeschen Gleichungen gelten ebenso wie für Körper aus Dekorit oder Stahl, so gibt es nur eine Lösung, die für die gegebene Gestalt unabhängig vom Material ist. Wenigstens gilt dies streng für ebene Spannungszustände, bei denen die Spannungen nach der klassischen Elastizitätstheorie im allgemeinen nicht nur vom Elastizitätsmodul, sondern auch von der Poissonschen Querkontraktionsziffer $\frac{1}{m}$ unabhängig sind.

Diese Überlegungen lassen sich aber ohne weiteres auch auf räumliche Spannungszustände übertragen, wobei jedoch insofern eine Einschränkung gegenüber dem ebenen Spannungszustand nötig wird, als bekanntlich die räumlichen elastischen Spannungen zwar nicht vom Elastizitätsmodul E, wohl aber im allgemeinen Fall von der Poissonschen Konstante $\frac{1}{m}$ abhängig sind. Beim Vergleich zwischen zwei gleichgestalteten Körpern, von denen der eine aus Dekorit und der andere aus Gummi besteht, ist der Unterschied in der Poissonschen Konstante gering. Für Gummi ist $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$ und für Dekorit gilt ungefähr $\frac{1}{m} = 0{,}3$ bei Raumtemperatur, während bei einer Temperatur von etwa 80° C, mit der im Einfrierverfahren der räumlichen Spannungsoptik gewöhnlich gearbeitet wird, für $\frac{1}{m}$ auch der Wert $\frac{1}{2}$ mit guter Annäherung gilt. Stahl besitzt bekanntlich bei Zimmertemperatur auch den Wert $\frac{1}{m} = 0{,}3$. Der Unterschied in den Poissonschen Konstanten zwischen Gummi und den üblichen Baumaterialien ist auf jeden Fall nicht so groß, daß er den Vergleich zwischen den Spannungszuständen in beiden Körpern erheblich beeinflussen könnte. Abgesehen von diesen geringen Differenzen folgt aus unseren Überlegungen, daß auch bei räumlicher elastischer Beanspruchung zweier gleichgestalteter Körper, deren Elastizitätsmoduln von ganz verschiedener Größenordnung sind wie die von Gummi und Dekorit, die Spannungszustände in beiden Körpern bis auf einen konstanten Faktor übereinstimmen, wenn sie in gleicher Weise belastet sind und sich die Gleichheit der Gestalt auf die durch die Belastung des Gummikörpers hervorgerufene deformierte Körperform bezieht, siehe A. Schraud, „Zur Berechnung und Untersuchung von Gummi-Federn" Z. VDI. Bd. 95 (1953) S. 379.

Wegen der Reversibilität rein elastischer Vorgänge gilt für elastische Körper bei großen Formänderungen folgendes Gesetz der Zuordnung: Belastet man einen Körper aus Gummi innerhalb der elastischen Beanspruchung so, daß er beliebig große Formänderungen annimmt, und stellt aus demselben Werkstoff einen Körper her, der in unbelastetem Zustand die Endgestalt des ersten Körpers besitzt, und belastet diesen zweiten Körper ebenso wie den ersten, nur in der umgekehrten Reihenfolge und mit umgekehrten Vorzeichen der Lasten, so erhält man bei der Endlast als Gestalt die Ausgangsgestalt des ersten Körpers.

Diese Zuordnung ist von praktischer Bedeutung, worauf ich an anderer Stelle eingehen werde.

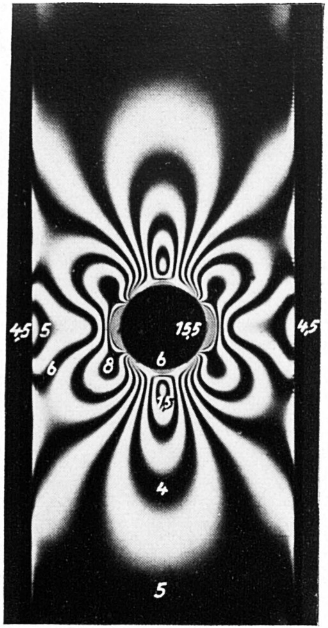

Abb. 1
Zugstab aus Dekorit
$E \approx 30000 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

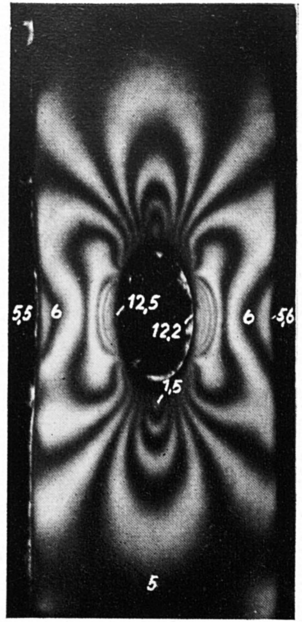

Abb. 2
Zugstab aus Gummi
$E = 11{,}40 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$

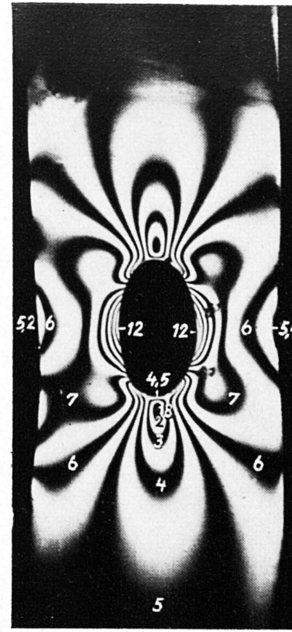

Abb. 3
Zugstab aus Dekorit
$E \approx 30000 \ \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$