

# Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
zu München

---

Jahrgang 1952

---

München 1955

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

# Gruppentheoretische Untersuchungen zur Theorie der Spinwellengleichungen

Von Friedrich L. Bauer in München

Vorgelegt von Herrn Walther Gerlach am 4. Juli 1952

## Inhaltsverzeichnis

Teil I. Invariante Wellengleichungen . . . . .	112
§ 1. Einleitung . . . . .	112
§ 2. Erste Aussonderung der brauchbaren Algebren . . . . .	115
§ 3. Darstellungen und ihre Kennzeichnung . . . . .	128
§ 4. Beziehungen zur Invariantentheorie . . . . .	135
§ 5. Verzweigungssätze. Charakteristiken. Lösung des Problems . . . . .	141
Teil II. Ausreduzierte Wellengleichungen . . . . .	149
§ 6. Verschmelzung. Ausreduktion durch Symmetriebedingungen . . . . .	149
§ 7. Cliffordsche Algebra. „Méthode de fusion“. Wellengleichungen, deren Wellenfunktionen einen Undor bilden . . . . .	153
§ 8. Wellengleichungen, deren Wellenfunktionen einen Tensor bilden . . . . .	159
§ 9. Schlußdiskussion . . . . .	163
Anhang I. Lie-Algebren . . . . .	167
II. Vollreduzible und halbeinfache Algebren . . . . .	168
III. Zum Beweis der Verzweigungssätze und der Formeln für Darstellungsgrad und Charakteristiken . . . . .	171
IV. Zum Beweis des Verschmelzungssatzes . . . . .	176
Tabellen . . . . .	177
Literaturverzeichnis . . . . .	178

## Zusammenfassung

Es werden Wellengleichungen vom Typus der Diracgleichung mit gruppentheoretischen Methoden untersucht.

Teil I: Invariante Wellengleichungen. In § 1 wird aus der Lorentz-Invarianz die Bedingung hergeleitet, daß die Basis-matrizen der Wellengleichung aus gewissen Lie-Algebren infinitesimaler geometrischer Transformationen ausgewählt sein

müssen. § 2 bringt allgemeine Untersuchungen über Lie-Algebren, § 3 über deren Matrizendarstellungen. In § 4 wird auf die Beziehungen zur Invariantentheorie eingegangen. § 5 bringt den Abschluß der Darstellungstheorie und klärt, welche invarianten Wellengleichungen möglich sind.

Teil II: Ausreduzierte Wellengleichungen. In § 6 wird der Gedanke der Ausreduktion durch Nebenbedingungen formuliert. In § 7 sind ausreduzierte Wellengleichungen, deren Komponenten einen Undor bilden, behandelt. Ein Undor ist eine mehrstufige Größe, deren Komponenten sich in jedem Index wie die Komponenten einer Diracgleichung transformieren. § 8 bringt Wellengleichungen, deren Komponenten Tensoren sind, gebildet u. U. mit quaternionischen Elementen. Eine abschließende Diskussion findet sich in § 9.

## I. Invariante Wellengleichungen

### § 1. Einleitung

1. Ausgehend von der Feldmechanik wurde Bopp (Bopp 1948) auf Spinwellengleichungen vom Typus der Diracgleichung geführt. Das Problem der Bestimmung von Basismatrizen dieser Wellengleichungen hatte sich in einer Form ergeben, die gruppentheoretische Behandlung nahelegte (Bopp und Bauer 1949, s. spez. Gl. (25)). Es zeigte sich bei diesen Untersuchungen, daß einigen grundlegenden Fragen des Problemkreises der Spinwellengleichungen solche gruppentheoretische Methoden angemessen sind. Einschlägige Betrachtungen hatte schon Lubanski (Lubanski 1942) begonnen.

Insbesondere führt die Aufgabe, unter möglichst geringen Voraussetzungen invariante Wellengleichungen aufzustellen, in nachfolgender Weise direkt auf die Theorie Liescher Gruppen und ihrer Darstellungen.

Wir nehmen Matrizenwellengleichungen an, die

α) von erster Ordnung in den Ableitungssymbolen,

β) invariant bei zulässigen Ortstransformationen sind und sich damit zurückführen lassen auf den allgemeinen Typus der Dirac-

gleichung

$$(1) \quad K\psi \equiv (\beta_\mu \partial_\mu + \kappa) \psi = 0 \quad (\mu = 1 \dots 4)$$

$$\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}; \partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}; \partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}; \partial_4 = \frac{\partial}{\partial ict},$$

wie er in einer Reihe von Arbeiten (Kemmer 1939, de Broglie 1939, Belinfante 1939, Lubanski 1942, Bhabha 1945, Madhava Rao und Mitarbb. 1946, Hönl und Boerner 1950, Le Couteur 1950) zugrundegelegt ist.

Zweierlei ist zu beachten:

1. Wir sprechen zunächst gar nicht vom Spin.

2. Die Elemente  $\beta_\mu$  können bei der Invarianzforderung keine gewöhnlichen Zahlen sein. Man muß, um überhaupt eine Lösung zu bekommen, hyperkomplexe Zahlen (dargestellt etwa durch Matrizen) zulassen.

$\psi$  ist ein Spaltenvektor aus Komponenten der Wellenfunktion. Auf ihn wirken die Matrizen  $\beta_\mu$ . Der Operator  $K$  muß mindestens<sup>1</sup> gegen die Transformationen der Lorentzgruppe invariant sein. Die Basismatrizen  $\beta_\mu$  transformieren sich demnach kontragredient zu den Ableitungssymbolen und damit kogredient zu den zulässigen Raum-Zeit-Transformationen. Dabei bleibt  $\psi$  invariant.

Hält man jedoch, etwa wegen expliziter Komponentenschreibweise der Gl. (1), die Matrizen bei der orthogonalen Transformation  $x'_\mu = a_{\mu\nu} x_\nu$  fest, so resultiert aus der Invarianzforderung für das Wellengleichungssystem eine in bestimmter Weise zugeordnete Substitution  $\psi' = \mathfrak{L}\psi$  der Wellenkomponenten. Der Zusammenhang ist durch die bekannte Formel

$$(2) \quad \mathfrak{L}\beta_i \mathfrak{L}^{-1} = a_{i\nu} \beta_\nu$$

gegeben. Entsteht also bei einer zulässigen Raum-Zeit-Transformation ein neues System von Basismatrizen, so muß es ein äquivalentes System in einem anderen Bezugsraum sein.

---

<sup>1</sup> In der mathematischen Formulierung wollen wir zunächst die Möglichkeit einer Invarianz gegen eine umfassendere Gruppe offen lassen. Man bedenke, daß z. B. die Maxwell'schen Gleichungen gegen Transformationen der Kugelverwandtschaft in Raum-Zeit invariant sind.

Für infinitesimale Änderungen wird aus (2) mittels  $\mathfrak{X} = e^\tau$  und  $a_{ikh} = e^{\alpha_{ih}}$  im Kleinen

$$(3) \quad [\tau\beta_i] \equiv \tau\beta_i - \beta_i\tau = \alpha_{iv}(\tau)\beta_v \quad (\alpha_{ih} + \alpha_{hi} = 0).$$

Die Kommutatorprodukte (3) definieren in abstracto einen Teil der Verknüpfungen einer Lie-Algebra  $\mathfrak{B}$  (s. Anhang I), die die sämtlichen Elemente  $\beta$  und  $\tau$  und die daraus erzeugten Kommutatorprodukte umfaßt.

Man kennt ferner die Verknüpfungen der Elemente  $\tau$  untereinander. Diese Kommutatoren bilden gerade die Lie-Algebra  $\mathfrak{T}$  der infinitesimalen Transformationen der physikalisch vorgegebenen Gruppe, sie führen also nicht aus dem Raum der  $\tau$  heraus. Dementsprechend ist  $\mathfrak{T}$  eine Unteralgebra von  $\mathfrak{B}^1$ . Die zu suchende Lie-Algebra  $\mathfrak{B}$  unterliegt also folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen:

Sie muß die Lie-Algebra der physikalisch vorgegebenen Gruppe als Unteralgebra enthalten. Überdies muß es möglich sein, aus dem Raum  $\mathfrak{B}-\mathfrak{T}$  ein Quadrupel von Elementen auszuwählen, das sich gemäß (3) wie der Ort transformiert, oder anders ausgedrückt, sich wie ein Vektor verhält.

2. Dieses Problem: Welche lorentzinvarianten Wellengleichungen sind überhaupt möglich? wird uns durch den Teil I der vorliegenden Arbeit begleiten und mit den bekannten Grundlagen und physikalisch wichtigen Ergebnissen der Theorie Liescher Gruppen und der dazugehörigen Invariantentheorie vertraut machen. Es wird sich ergeben, daß es selbst im Rahmen unserer sehr allgemeinen Voraussetzungen, soweit man von Verkopplungen mehrerer Wellengleichungen absieht, nur den von Lubanski a. a. O. bereits behandelten Fall lorentzinvarianter Wellengleichungen gibt, wobei die Basismatrizen innerhalb einer fünfdimensionalen orthogonalen Gruppe Darstellungen der vier unabhängigen Drehungen in die fünfte Koordinate hinein sind. Der Lubanski-Fall wird vollständig erfaßt von de Broglies Ver-

<sup>1</sup> Man kennt also bereits drei von den vier Teilfeldern der Kommutatortafel. Die Kommutatoren der  $\beta$  unter sich müssen noch bestimmt werden. Dazu allein würde man vermutlich nicht das ganze schwere Geschütz der Gruppentheorie benötigen.

	$\tau$	$\beta$
$\tau$	$\tau$	$\beta$
$\beta$	$\beta$	$\beta$

schmelzungsmethode (a. a. O.). Von dieser Seite unserer Betrachtungen her kann also nichts eingewendet werden gegen eine Vorstellung, daß alle Teilchen höheren Spins komplexe Gebilde aus Spin- $\frac{1}{2}$ -Teilchen wären.

Der Spin ergibt sich von selbst. Er ist hier insofern Ausdruck eines geometrischen Transformationscharakters der Wellenfunktionen, als sich die Matrizen  $\tau_{23}$ ,  $\tau_{31}$ ,  $\tau_{12}$  als die Operatoren des Spins erweisen. Sein Wesen wird man demnach allerdings tiefer, etwa in der Feldmechanik oder in virtuellen Prozessen zu suchen haben.

Unter der Annahme der Allgemeingültigkeit einer Spin-Dimensionskonstanten ergibt sich innerhalb unserer Voraussetzungen, selbst bei einer etwaigen Erweiterung der Lorentzgruppe, keine andere Möglichkeit als ganzer und halbganzer Spin.

3. Die gruppentheoretischen mathematischen Hilfsmittel werden jedoch vor allem entwickelt, um in Teil II die Zusammenhänge zu untersuchen, die sich mathematisch als Isomorphien bestimmter Gruppen dartun und für uns bedeuten, daß es etwa tensorielle und spinorielle Schreibweise derselben Wellengleichung gibt. Es wird insbesondere gezeigt, wie man bei expliziter Komponentenschreibweise durch passende Symmetrie- und vor allem Spurbedingungen die Ausreduktion in nicht mehr weiter trennbare Systeme erzwingt und so theoretisch für beliebig hohen Spin die Wellengleichungen angeben kann. Bisher hatten sich dafür in der reinen Matrizenschreibweise unüberwindliche Schwierigkeiten bei der numerischen Ausreduktion der Matrizen ergeben.

Unsere Ergebnisse haben natürlich enge Beziehungen zu den von anderen Voraussetzungen her gewonnenen von Fierz, Pauli (Fierz 1939, Fierz und Pauli 1939) und der anderen erwähnten Autoren (neuerdings auch Potier 1946 ff., Le Couteur 1950). Soviel wir sehen, umfassen unsere Untersuchungen unter einheitlichem Gesichtspunkt die bekannten Ansätze in der Theorie der Spinwellengleichungen.

## § 2. Erste Aussonderung der brauchbaren Algebren

1. Wir haben einleitend gezeigt, daß die Basismatrizen  $\beta$  einer invarianten Wellengleichung vom Diracschen Typus zusammen

mit den Darstellungsmatrizen  $\tau$  der zulässigen Ortstransformationen aus einer Lie-Algebra  $\mathbf{B}$  auszuwählen sind. Ihre Unter- algebra  $\mathbf{T}$ , gebildet aus den Matrizen  $\tau$  allein, ist die Algebra der infinitesimalen Transformationen der Lorentzgruppe (oder auch gemäß Anm. 1 einer umfassenderen geometrischen Gruppe). Nach den Untersuchungen von Lie und seiner Schule haben die geometrischen Transformationsgruppen spezielle Lie-Algebren, die man halbeinfach nennt.  $\mathbf{T}$  ist demnach eine halbeinfache Algebra.

Einige Gründe sprechen dafür, daß darüber hinaus auch  $\mathbf{B}$  halbeinfach sein muß. Wir gehen etwa von der Forderung aus, das System der Basismatrizen  $\beta$  müsse *vollreduzibel* sein.<sup>1</sup> Eine nicht vollreduzible Basis würde nämlich zu Wellengleichungen führen von der Form

$$(4) \quad \begin{aligned} \mathfrak{A}\psi^I + \mathfrak{B}\psi^{II} &= 0 \\ \mathfrak{D}\psi^{II} &= 0. \end{aligned}$$

Die Komponenten  $\psi^{II}$  würden also durch die Komponenten  $\psi^I$  überhaupt nicht beeinflußt werden, wohl aber umgekehrt  $\psi^I$  durch  $\psi^{II}$ . Eine solche einseitige „Wechselwirkung“ ist mit unseren physikalischen Vorstellungen von der Gegenseitigkeit einer Wechselwirkung nicht verträglich. Sie kann höchstens in Grenzfällen verstanden werden, etwa bei extremen Massenverhältnissen oder in nicht-relativistischer Näherung. Für exakt gültige Wellengleichungen sollte man annehmen, daß nur vollreduzible Basismatrizensysteme in Betracht kommen.

Sind die Matrizen  $\beta$  überdies aus der quantenmechanischen Umdeutung klassischer Größen entstanden, wie in der Feldmechanik, so sind sie als hermitesch anzusehen und damit von selbst vollreduzibel.

---

<sup>1</sup> Ein System von Matrizen heißt *reduzibel*, wenn sämtliche Matrizen gleichzeitig so transformiert werden können, daß ein ganzes Kästchen von Elementen unter- oder oberhalb der Diagonale verschwindet. Ein nicht redu-

$$\left( \begin{array}{c|c} \mathfrak{A} & \mathfrak{B} \\ \hline \mathfrak{C} & \mathfrak{D} \end{array} \right)$$

zibles System heißt *irreduzibel*. Vollreduzibilität bedeutet, daß aus der Reduzibilität ( $\mathfrak{C} = 0$ ) der vollständige Zerfall in unabhängige Teilsysteme ( $\mathfrak{B} = 0$ ) folgt. Ein irreduzibles System ist trivialerweise vollreduzibel.

Halbeinfache Algebren garantieren vollreduzible Darstellungen (Anhang II). Andererseits sind alle Algebren halbeinfach, deren adjungierte Darstellung vollreduzibel ist. In § 3 Ziff. 1 wird ersichtlich, daß alle Darstellungen einer Algebra dem selben Formalismus genügen und mit der adjungierten Darstellung vollreduzibel sind oder nicht. Man verliert also keine Möglichkeiten, wenn man sich zwecks Diskussion der vollreduziblen Darstellungen auf halbeinfache Algebren beschränkt.

2. Bei halbeinfachen Algebren treten die aus der Elementarteilertheorie bekannten Komplikationen nicht auf. Anschließend an Anhang II geben wir die für halbeinfache Algebren allgemein gültigen Gesetze:

Man hat innerhalb der halbeinfachen Lie-Algebra  $\mathbf{A}$  von der Dimension  $p$  eine Unteralgebra  $\mathbf{H}$  mit einer Basis

$\{h_i\} \equiv (h_1 = t, h_2, \dots, h_\nu)$  von  $\nu$  Elementen, die mit dem allgemeinen Element  $t$  vertauschbar sind.

$h = \sum_i \lambda^i h_i$  ist das allgemeine Element aus  $\mathbf{H}$ . Der Vektorraum der transzendenten Elemente (Variablen)  $\lambda$  ist für den folgenden Kalkül („Cartan-Kalkül“, Cartan 1894) grundlegend.

Entsprechend der willkürlichen Basiswahl von  $\{h_i\}$  ist er beliebigen affinen Transformationen unterworfen,  $\lambda^i$  transformiert sich kontragredient zum Raum der Basiselemente  $h_i$ .  $\mathbf{H}$  ist der maximale Unterraum von  $\mathbf{A}$ , dessen Elemente vollständig untereinander vertauschbar sind (gleichzeitig diagonalisiert werden können). Es gilt nämlich:

$$(i) \quad [h, h_i] = 0 \quad (i = 1 \dots \nu)$$

und:

es existieren  $p - \nu$  nichtverschwindende Eigenwerte  $\alpha_i$  und Eigen-elemente  $e_{\alpha_i}$

$$(ii) \quad [h, e_{\alpha_i}] = \alpha_i e_{\alpha_i}.$$

Die Eigenwerte sind Linearformen in  $\lambda$ . Sie sind die nichtverschwindenden *Wurzeln* des Säkularpolynoms (vi) in Anhang II.

Für die Wurzeln gilt:

1. Sie sind einfach, d. h. alle voneinander verschieden.

2. Die Multipla  $2\alpha, 3\alpha, \dots$  einer Wurzel  $\alpha$  kommen nicht unter den Wurzeln vor.
3. Sie treten paarweise auf, zu einer Wurzel  $\alpha$  gehört auch  $\alpha$  als Wurzel.
4. Es gibt unter ihnen  $\nu$  hinsichtlich der Variablen  $\lambda^i$  linear unabhängige.

In der im folgenden oft anzuwendenden geometrischen Auffassung im Raum der  $\lambda$  sind die Wurzeln also ein System paarweise entgegengesetzter, voneinander verschiedener Strahlen im Raum der Koordinaten  $\lambda^i$ .

Die Verschiedenheit der Wurzeln gestattet es, sie zur Kennzeichnung des Eigenelements zu verwenden. Sie werden deshalb als Index angehängt. Man verwendet neben  $\alpha = a_i \lambda^i$  auch die Schreibweise  $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_\nu)$  also z. B.

$$\lambda^1 - \lambda^3 \text{ und } (1, 0, -1, 0, \dots, 0).$$

Damit ergeben sich nun einfache Formeln für die Verknüpfung der Eigenelemente untereinander (vgl. Anhang II, Hilfssatz)

$$(iii) \quad [e_\alpha e_\beta] = e_{\alpha+\beta} \quad \text{falls } \alpha + \beta \neq 0.$$

Dabei soll  $e_{\alpha+\beta} \equiv 0$  sein, falls  $\alpha + \beta$  nicht Wurzel ist. Die Verknüpfung  $[e_\alpha e_{-\alpha}]$  ergibt schließlich ein Element aus dem Raum  $H$ , das mit  $h_\alpha$  bezeichnet werde

$$(iv) \quad [e_\alpha e_{-\alpha}] \equiv h_\alpha.$$

Jeder als Wurzel vorkommenden Linearkombination von Variablen  $\lambda^i$  entspricht so eine Linearkombination  $a^i h_i$  von Elementen  $h_i$ .

$$(5) \quad (\alpha = a_i \lambda^i) \leftrightarrow (h_\alpha = a^i h_i).$$

Der Linearität wegen ist eine einheitliche Zuordnung möglich,

$$(6) \quad a^i = g^{ih} a_h; \quad a_i = g_{ih} a^h.$$

Merkwürdigerweise ist also durch (iv) eine Metrik festgelegt (Weyl 1925).

Mittels dieser ist es möglich, ein Skalarprodukt zweier Wurzeln  $\alpha = a_i \lambda^i$ ;  $\beta = b_i \lambda^i$  zu definieren

$$(7) \quad (\alpha\beta) = a_i b_h g^{ih} = a_i b^i = a^i b_i.$$

Es gilt noch

5.  $(\alpha\alpha)$ , oft auch als  $\alpha_\alpha$  bezeichnet, ist stets von Null verschieden, die Metrik also nicht ausgeartet.

Die Gesamtheit der Bedingungen 1. bis 5. und die Gesetze (i) bis (iv) kennzeichnen die Halbeinfachheit.

3. Unsere Fragestellung erfordert, wenigstens im Grundsätzlichen, die Kenntnis und Aufzählung aller nicht-isomorphen halbeinfachen Lie-Algebren. Van der Waerden verdankt man eine anschauliche Lösung dieses Problems.

Man geht aus von der Bemerkung, daß für zwei beliebige Wurzeln  $\alpha, \beta$  stets  $k = 2 \frac{(\alpha\beta)}{(\alpha\alpha)}$  eine ganze Zahl ist<sup>1</sup>.

Dann ist auch

$$4 \frac{(\alpha\beta)(\alpha\beta)}{(\alpha\alpha)(\beta\beta)}$$

stets eine ganze Zahl. Durch

$$(8) \quad \frac{(\alpha\beta)}{\sqrt{(\alpha\alpha)(\beta\beta)}} = \cos \varphi$$

ist aber in bekannter Weise eine Winkelmessung im metrischen Raum definiert. Man hat also

$$\cos^2 \varphi = 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1.$$

Die betreffenden Winkel,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  und  $90^\circ$  sind die einzigen möglichen zwischen zwei benachbarten Wurzeln. Sie stimmen natürlich genau mit den euklidischen Winkeln in einer geometrischen Darstellung überein, wenn  $g^{ik}$  durch besondere Wahl der Basis diagonalisiert, die Metrik also euklidisch ist.

Durch einfache Fallunterscheidungen gelingt es dann zu zeigen (Van der Waerden 1933, Witt 1941):

Es gibt sieben Typen von Lie-Algebren, mit denen man alle *einfachen* Algebren, das sind die ohne invariante Unteralgebren, besitzt.

Die halbeinfachen erhält man aus ihnen in der Form aller möglichen direkten Produkte (siehe Ziff. 4).

<sup>1</sup> Zum Beweis vgl. § 3 Ziff. 1, wo  $k$  eine Anzahl von Schritten ist gemäß Weyl 1925 p. 360.

Wir geben nachfolgend in Tabelle 1 eine Übersicht. Dazu einige Erklärungen:

Bei der Lie-Algebra  ${}^n\text{SL}$  der speziellen linearen Gruppe der Transformationen von der Determinante 1 wird gewöhnlich die überzählige Variable  $\lambda^0$  mitverwendet unter der Nebenbedingung  $\sum_0^v \lambda^i = 0$ . Das Wurzelsystem nimmt im  $v + 1$ -dimensionalen Raum  $(\lambda^0 \dots \lambda^v)$  nur einen  $v$ -dimensionalen Teilraum ein. Diese Schreibweise vereinfacht im folgenden gelegentlich die Formeln. Der Symmetrie wegen schreibt man dann  $\lambda^n$  anstatt  $\lambda^0$ .

Die symplektische Gruppe besteht aus denjenigen Transformationen eines Raumes geradzahligter Dimension  $n = 2v$ , die eine schiefsymmetrische Bilinearform

$$(9) \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \dots + x_{2v-1} y_{2v} - x_{2v} y_{2v-1}$$

invariant lassen. Sie war den Geometern als Gruppe der Linienkomplexe bekannt. Eine andere Kennzeichnung als Gruppe  $v$ -dimensionaler linearer Transformationen über dem Quaternionenring von gewisser Invarianzeigenschaft (vgl. Chevalley 1946 p.19) wird neuerdings bevorzugt.

Die Gruppe von  ${}^{\text{II}}\text{G}$  (II bezeichnet  $v = 2$ ) ist nach Engel eine Gruppe siebendimensionaler linearer Transformationen, die eine bestimmte Trilinearform invariant lassen (vgl. Racah 1949 a). Bei den vier umfassenden Typen A, D, B und C gilt zunächst

$$v \geq 2 \text{ für A, B, C}$$

$$v \geq 3 \text{ für D;}$$

sie beginnen also mit den Lie-Algebren  ${}^3\text{SL}$ ,  ${}^6\text{O}$ ,  ${}^5\text{O}$  und  ${}^4\text{Sp}$ , deren Wurzelsysteme in den folgenden Diagrammen veranschaulicht sind.

a)  ${}^3\text{SL}$ :

Räumliches Diagramm Achsen: Wurzelsystem

Metrik:  
euklidisch



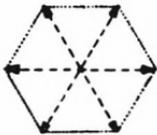
cartesisch  $\alpha = (a_1 a_2 a_3)$

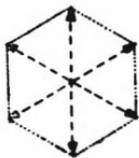
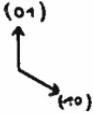
$$\begin{aligned} & \pm (1 \ -1 \ 0) \\ & \pm (0 \ 1 \ -1) \\ & \pm (-1 \ 0 \ 1) \end{aligned}$$

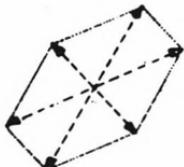
Tabelle 1

Kleinstervorkommender Winkel	Typ	$\nu$	Wurzeln $\alpha$ $i, k=1 \dots \nu$ $i < k$	Metrik ( $m$ ) $m = m_i \lambda^i$	$(\alpha)$ Anzahl der Wurzeln	$\phi$	Bezeichnung	Geometrische Identifizierung	
60°	A	$n-1$	$\pm(\lambda^i - \lambda^k)$ $\pm(\lambda^i - \lambda^0)$ $\lambda^0 = -\sum_1^\nu \lambda^i$	$\pm(m_i - m_k)$ $\pm m_i$	2 2	$\nu(\nu+1)$	$n^2 - 1$	$n$ SL	Lie-Algebra der (inf.) linearen unimodularen Gruppe i. $R_n$
	D	$\frac{n}{2}$	$\pm(\omega_i - \omega_k)$ $\pm(\omega_i + \omega_k)$	$\pm(m_i - m_k)$ $\pm(m_i + m_k)$	2 2	$2\nu(\nu+1)$	$\frac{n}{2}(n-1)$	$n$ O	Lie-Algebra der (inf.) orthogonalen Gruppe i. $R_n$ $n = 2\nu$ , geradzahlig
Es gibt nur drei einfache „Ausnahmegruppen“ diesen Typs, mit den Parameteranzahlen 78, 133 und 248 und von den Raumdimensionen 27, 56 und 248 bzw. Ohne physikalisches Interesse.									
45°	B	$\frac{n-1}{2}$	$\pm(\omega^i - \omega^k)$ $\pm(\omega^i + \omega^k)$ $\pm\omega^i$	$\pm(m_i - m_k)$ $\pm(m_i + m_k)$ $\pm m_i$	2 2 1	$2\nu^2$	$\frac{n}{2}(n-1)$	$n$ O	Lie-Algebra der (inf.) orthogonalen Gruppe i. $R_n$ , $n = 2\nu + 1$ , ungeradzahlig
	C	$\frac{n}{2}$	$\pm(\sigma^i - \sigma^k)$ $\pm(\sigma^i + \sigma^k)$ $\pm 2\sigma_i$	$\pm(m_i - m_k)$ $\pm(m_i + m_k)$ $\pm(m_i)$	2 2 2	$2\nu^2$	$\frac{n}{2}(n-1)$	$n$ Sp	Lie-Algebra der (inf.) symplekt. Gruppe i. $R_n$ $n = 2\nu$ , geradzahlig
30°	F								Die einzige einfache „Ausnahmegruppe“ dieses Typs, mit 52 Parametern und von der Raumdimension 26, ist für unsere Untersuchungen unbedeutend.
	G	2	$\pm(\gamma^1 - \gamma^2)$ $\pm(\gamma^i - \gamma^0)$ $\pm(\gamma^1 + \gamma^2)$ $\pm(\gamma^i + \gamma^0)$ $-\gamma^0 = \gamma^1 + \gamma^2$	$\pm(m_1 - m_2)$ $\pm m_i$ $\pm(m_1 + m_2)$ $\pm(3m_i - m_1 - m_2)$	2 2 2 2	12	14	$II$ G	Lie-Algebra der Killing-Engelschen 14-parametrischen Gruppe im $R_7$ . Es gibt nur diese eine einfache Lie-Algebra vom Typ G mit 30°.

(Alle sechs Wurzeln liegen auf Kantenmitten eines Würfels in ein und derselben Ebene senkrecht zu einer Körperdiagonale.)

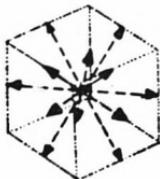
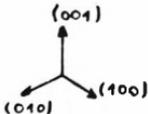
Ebenes Diagramm	Achsen: cartesisch	Wurzelsystem $\alpha = (a_1 a_2)$	Metrik: euklidisch
		$\pm (1 \ 0)$ $\pm \left( \frac{1}{2} \ \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$ $\pm \left( \frac{1}{2} \ -\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$	

Ebenes Diagramm	Achsen: schiefwinklig	Wurzelsystem $\alpha = (a_1 a_2)$	Metrik: $(a^1 a^2)$
		$\pm (2 \ 1)$ $\pm (1 \ 2)$ $\pm (1 \ -1)$	$\pm (1 \ 0)$ $\pm (0 \ 1)$ $\pm (1 \ -1)$

Ebenes Diagramm	Achsen: cartesisch	Wurzelsystem	Metrik:
		wie vorstehend	

(In den letzten beiden Beispielen ist die Winkelmessung nach (8) mit der angegebenen Metrik durchzuführen.)

b)  ${}^6O$ :

Räumliches Diagramm	Achsen: cartesisch	Wurzelsystem	Metrik: euklidisch
		$\pm (1 \ -1 \ 0)$ $\pm (0 \ 1 \ -1)$ $\pm (-1 \ 0 \ 1)$ $\pm (1 \ 1 \ 0)$ $\pm (0 \ 1 \ 1)$ $\pm (1 \ 0 \ 1)$	

c)  ${}^5O$ :

Ebenes Diagramm


 Achsen  
cartesisch


Wurzelsystem

$$\alpha = (a_1 \ a_2)$$

$$\pm (1 \ -1)$$

$$\pm (1 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 1)$$

Metrik:

euklidisch

 d)  ${}^4Sp$ :

Ebenes Diagramm


 Achsen:  
cartesisch


Wurzelsystem

$$\alpha = (a_1 \ a_2)$$

$$\pm (2 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 2)$$

$$\pm (1 \ 1)$$

$$\pm (1 \ -1)$$

Metrik:

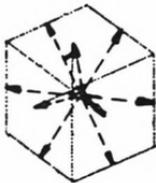
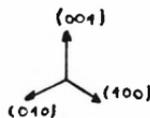
euklidisch

Offensichtlich sind die letzten beiden Wurzelsysteme affin verwandt und damit identisch. Dies ist Ausdruck dafür, daß die beiden Algebren isomorph sind.

Von Bedeutung sind noch:

 e)  ${}^4SL$ : (drei rückwärts liegende Wurzeln nicht eingezeichnet)

Räumliches Diagramm


 Achsen:  
cartesisch


Wurzelsystem

$$\alpha = (a_1 \ a_2 \ a_3)$$

Metrik:

$$(a^1 \ a^2 \ a^3)$$

$$\pm (1 \ -1 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 1 \ -1)$$

$$\pm (-1 \ 0 \ 1)$$

$$\pm (2 \ 1 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 2 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 1 \ 2)$$

$$\pm (1 \ -1 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 1 \ -1)$$

$$\pm (-1 \ 0 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 0 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 1 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 0 \ 1)$$

 f)  ${}^{II}G$ :

Ebenes Diagramm


 Achsen:  
schiefwinklig


Wurzelsystem

$$\alpha = (a_1 \ a_2)$$

Metrik:

$$(a^1 \ a^2)$$

$$\pm (2 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 2)$$

$$\pm (1 \ -1)$$

$$\pm (0 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 0)$$

$$\pm (1 \ 1)$$

$$\pm (1 \ 0)$$

$$\pm (0 \ 1)$$

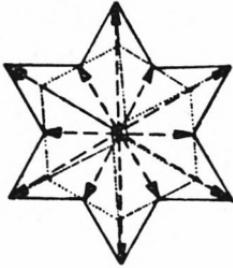
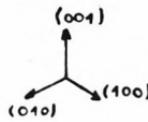
$$\pm (1 \ -1)$$

$$\pm (-1 \ 2)$$

$$\pm (2 \ -1)$$

$$\pm (1 \ 1)$$

Räumliches Diagramm

Achsen:  
cartesischWurzelsystem  
 $\alpha = (a_1 a_2 a_3)$  Metrik:  
euklidisch

$$\begin{aligned} &\pm (1 \ 0 \ -1) \\ &\pm (1 \ 1 \ -2) \\ &\pm (0 \ 1 \ -1) \\ &\pm (-1 \ 2 \ -1) \\ &\pm (-1 \ 1 \ 0) \\ &\pm (-2 \ 1 \ 1) \end{aligned}$$

(Alle zwölf Wurzeln liegen in einer Ebene senkrecht zur Körperdiagonale.)

Schließlich erlauben die in Tabelle 1 angeführten Bildungsgesetze der Wurzelsysteme noch die Ausartung  $\nu = 1$  für die Typen A, B und C sowie  $\nu = 2$  für den Typ D. Es ergeben sich folgende Wurzelsysteme und Diagramme:

g)  ${}^2\text{SL}$ :

ebenes Diagramm



Achsen



Wurzelsystem

$$\pm (1 \ -1)$$

lineares Diagramm



Wurzelsystem

$$\pm (2)$$

h)  ${}^3\text{O}$ :

lineares Diagramm



Wurzelsystem

$$\pm (1)$$

i)  ${}^2\text{Sp}$ :

lineares Diagramm



Wurzelsystem

$$\pm (2)$$

Die Wurzelsysteme und Diagramme der drei letztangeführten Algebren sind identisch (bis auf eine affine Transformation), die Algebren sind also isomorph.

k)  ${}^4\text{O}$ :

ebenes Diagramm

Achsen:  
cartesisch

Wurzelsystem

$$\begin{aligned} &\pm (1 \ -1) \\ &\pm (1 \ 1) \end{aligned}$$

Metrik:  
euklidisch

Winkel von  $60^\circ$  kommen nicht mehr vor, der kleinste vorkommende Winkel ist  $90^\circ$ . Das System der vier Wurzeln zerfällt in zwei vollständig zueinander senkrechte Teilsysteme. Beide Teilsysteme sind von der Art der abstrakten Algebra, die durch g), h) und i) beschrieben ist.

Die letztmögliche Ausartung  $\nu = 1$  beim Typ D führt trivialerweise auf die Lie-Algebra einer einparametrischen Abelschen (Dilatations-)Gruppe.

4. Im Vorstehenden lieferte die  ${}^4O$  ein Beispiel für den Zerfall eines Wurzelsystems in zwei vollständig zueinander senkrechte. Dieser ist offenbar gleichbedeutend damit, daß die Verknüpfung von Elementen aus den beiden Teilräumen der Teilsysteme stets verschwindet. Man hat also zwei vollständig voneinander getrennte Teilalgebren, deren im mengentheoretischen Sinn direktes Produkt die ursprüngliche Algebra ist. Eine halbeinfache Lie-Algebra, deren Wurzelsystem nicht in solcher Weise zerfällt, ist ohne invariante Unteralgebra und wird einfach genannt. Alle Algebren der uns weiter berührenden Typen A, B, C, D (und G) mit Ausnahme der erwähnten  ${}^4O$  sind einfach (letztere haben wir aus praktischen Gründen in den Typus D mit eingeschlossen).

Zwei andere Beispiele hatten Isomorphie von Algebren ergeben. Bei den untersten Dimensionszahlen sind Isomorphismen solcher Art häufig. Es stellen sich folgende Isomorphismen heraus:

$$(10) \quad {}^3O \cong {}^2SL \cong {}^2Sp$$

$$(11) \quad {}^4O \cong {}^2SL \times {}^2SL \cong {}^3O \times {}^3O \cong {}^2Sp \times {}^2Sp$$

$$(12) \quad {}^5O \cong {}^4Sp$$

$$(13) \quad {}^6O \cong {}^4SL$$

Man prüft leicht nach, daß die Parameteranzahlen jeweils gleich sind. Man erhält Übereinstimmung der Wurzelsysteme, wenn man z. B. bei Isomorphie  ${}^6O = {}^4SL$  setzt

$$(14) \quad \begin{aligned} \omega^1 + \omega^2 &= \lambda^1 - \lambda^4 \\ \omega^1 - \omega^2 &= \lambda^2 - \lambda^3 \\ \omega^1 + \omega^3 &= \lambda^1 - \lambda^3 \\ \omega^1 - \omega^3 &= \lambda^2 - \lambda^4 \\ \omega^2 + \omega^3 &= \lambda^1 - \lambda^2 \\ \omega^2 - \omega^3 &= \lambda^3 - \lambda^4. \end{aligned}$$

Es genügt, wenn man sich auf die Übereinstimmung der Diagramme der Wurzelsysteme stützt.<sup>1</sup>

5. Schließlich interessiert besonders noch das Untergruppengefüge aller erwähnten Typen. Man hat folgende, auch geometrisch leicht einzusehende Relationen:

- $$\begin{aligned} (15) \quad & {}^n\text{SL} \supset {}^n\text{O} \\ (16) \quad & {}^{2\nu}\text{SL} \supset {}^{2\nu}\text{Sp} \\ (17) \quad & {}^n\text{O} \supset {}^{n-1}\text{O} \\ (18) \quad & {}^{2\nu}\text{Sp} \supset {}^{2\nu-2}\text{Sp} \times {}^2\text{Sp} \supset {}^{2\nu-2}\text{Sp} \\ (19) \quad & {}^{2\nu}\text{O} \supset {}^\nu\text{SL} \\ (20) \quad & {}^{2\nu}\text{Sp} \supset {}^\nu\text{SL} \end{aligned}$$

Die Beziehung

$$(21) \quad {}^{2\nu}\text{SL} \supset {}^{2\nu+2}\text{O} \quad (\nu \geq 2)$$

wird in § 7 bei der Betrachtung der Cliffordschen hyperkomplexen Systeme verständlich werden.

Die  ${}^{\text{II}}\text{G}$  schließlich ist Unteralgebra der  ${}^7\text{O}$ , sie hat als Unter-algebren die  ${}^4\text{O}$  und auch die  ${}^3\text{SL}$ .

Zusammengefaßt sind die Ergebnisse dieses Abschnittes in der Tafel 1. Darin ist jeder halbeinfachen Algebra ein Kästchen zugewiesen. Die Parameteranzahl ist auf einer Leiter rechts ange-tragen. Die Linien zwischen den Kästchen verbinden die Alge-bren mit ihren unmittelbaren Unteralgebren.

Wir kommen zum physikalischen Ausgangspunkt zurück. Es sind nunmehr alle Algebren bestimmt, die die Lie-Algebra der Lorentzgruppe umfassen. Das Untergruppengefüge verzweigt sich über der Lorentzgruppe in vier Wege, die durch die unmittel-

<sup>1</sup> Ausgedrückt in  $\nu$  hat

$$\begin{aligned} {}^{\nu+1}\text{SL} & \nu^2 + 2\nu \quad \text{Parameter} \\ {}^{2\nu}\text{O} & \nu \cdot (2\nu - 1) \quad \text{Parameter} \\ {}^{2\nu+1}\text{O} & \nu \cdot (2\nu + 1) \quad \text{Parameter.} \end{aligned}$$

Die Gleichung  $\nu^2 + 2\nu = \nu(2\nu - 1)$  hat nur die positive Lösung  $\nu = 3$ , (Formel (13)). Die Gleichung  $\nu^2 + 2\nu = \nu(2\nu + 1)$  hat nur die positive Lösung  $\nu = 1$ , (Formel (10)). Zwischen den Algebren  ${}^n\text{SL}$  und  ${}^n\text{O}$  gibt es also außer den angeschriebenen Isomorphismen keine weiteren.



### § 3. Darstellungen und ihre Kennzeichnung

1. Im vorigen Abschnitt wurde der Cartan-Kalkül für die Wurzeln der abstrakten Algebra und ihrer adjungierten Darstellung eingeführt. Er ist auch zur Behandlung aller beliebigen Darstellungen das geeignete Werkzeug (Cartan 1894).

Seien  $\mathfrak{H}_i$  ( $i = 1 \dots \nu$ ) und  $\mathfrak{E}_\alpha$  ( $\alpha$  alle Wurzeln) die darstellenden  $P$ -reihigen Matrizen einer halbeinfachen Lie-Algebra mit den entsprechenden Elementen  $h_i$  und  $e_\alpha$ . Dann gibt es  $P$  gemeinsame Eigenvektoren der Matrizen  $\mathfrak{H}_i$ . Das allgemeine Element  $\mathfrak{H} = \lambda^i \mathfrak{H}_i$  hat  $P$  (nicht notwendig verschiedene) Eigenwerte

$$(22) \quad \mathfrak{H} e^{(l)} = m^{(l)} e^{(l)}, \quad (l = 1 \dots P).$$

Die Eigenwerte  $m^{(l)} = \lambda^i m_i^{(l)}$  sind Linearformen in  $\lambda$ . Die einzelnen Komponenten sind die gemeinsamen Eigenwerte von  $\mathfrak{H}_1 \dots \mathfrak{H}_\nu$  zum selben Eigenvektor.  $m = (m_1 m_2 \dots m_\nu)$  nennen wir deshalb Eigenwertsatz (frz. poids). Unter  $e_m$  werde ein beliebiger Eigenvektor von  $\mathfrak{H}$  zum Eigenwertsatz  $m$  verstanden. Entsprechend der willkürlichen Wahl der Basis  $\{h_i\}$  sind auch die Komponenten  $\{m_i\}$  eines Eigenwertsatzes nur bis auf eine affine Transformation bestimmt, sie transformieren sich wiederum kontragredient zu den Variablen  $\lambda$ , wie die Wurzeln im vorigen Abschnitt, die ja nunmehr nichts anderes als die Eigenwertsätze einer speziellen Darstellung, nämlich der adjungierten, sind.

Während  $\mathfrak{H}$  die Eigenvektoren reproduziert, werden sie durch die Matrizen  $\mathfrak{E}_\alpha$  untereinander ausgetauscht.

Aus

$$\mathfrak{H} e_m = m e_m$$

und

$$\mathfrak{H} \mathfrak{E}_\alpha - \mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{H} = \alpha \mathfrak{E}_\alpha$$

folgt nämlich

$$\mathfrak{H} \mathfrak{E}_\alpha e_m = \mathfrak{E}_\alpha \mathfrak{H} e_m + \alpha \mathfrak{E}_\alpha e_m$$

$$\mathfrak{H} \mathfrak{E}_\alpha e_m = m \mathfrak{E}_\alpha e_m + \alpha \mathfrak{E}_\alpha e_m$$

$$(23) \quad \mathfrak{H} (\mathfrak{E}_\alpha e_m) = (m + \alpha) \mathfrak{E}_\alpha e_m$$

d. h.  $\mathfrak{C}_\alpha e_m$  gehört zum Eigenwertsatz  $m + \alpha$ , falls dieser vorhanden ist, andernfalls verschwindet es:

$$(24) \quad \mathfrak{C}_\alpha e_m = \begin{cases} e_{m+\alpha} & \text{falls } m + \alpha \text{ Eigenwertsatz ist,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die einzelnen Eigenwertsätze bilden also im  $v$ -dimensionalen Raum ein Gitter, die Wurzeln sind in Abstand und Richtung die Gitterkonstanten.

Die genauere Untersuchung ergibt (vgl. Weyl p. 360): Ist  $m$  ein Eigenwertsatz zum Eigenvektor  $e_m$ , so führt die fortgesetzte Anwendung von  $\mathfrak{C}_\alpha$  auf  $e_m$  auf  $k$  neue nichtverschwindende Eigenvektoren und eine zugehörige Reihe  $m, m + \alpha, m + 2\alpha, \dots, m + k\alpha$  von Eigenwertsätzen, wobei

$$(25) \quad k = \frac{-2(m\alpha)}{(\alpha\alpha)}$$

ist. Durch Anwendung von  $\mathfrak{C}_\alpha$  erhält man rückwärts die Reihe

$$m + k\alpha, m + (k-1)\alpha, \dots, m + \alpha, m.$$

Beispiel: Lie-Algebra  $^5O$ . Der Ausgangs-Eigenwertsatz sei  $m = (2, 1)$ . Die Metrik ist euklidisch.

Es ergibt sich dann für

$$\alpha = (-1 \ 1) : k = 1 \text{ und } m' = (1 \ 2)$$

$$\alpha = (0 \ -1) : k = 2 \text{ und } m' = (2 \ -1)$$

$$\alpha = (-1 \ -1) : k = 3 \text{ und } m' = (-1 \ -2)$$

Ist insbesondere  $m$  extremal bezüglich  $\mathfrak{C}_{-\alpha}$ , das soll heißen, daß  $\mathfrak{C}_{-\alpha} e_m = 0$  und  $m - \alpha$  somit kein Eigenwertsatz ist, so ist in der obigen Reihe der letzte,  $m + k\alpha$  tatsächlich der letztmögliche, d. h. er ist extremal bezüglich  $\mathfrak{C}_\alpha$ ,  $\mathfrak{C}_\alpha e_{m+k\alpha} = 0$ .

Der Gitterraum zwischen den extremalen Eigenwertsätzen ist somit vollständig ausgefüllt.

2. Wir ordnen dem Wurzelpaar  $\pm \alpha$  noch die Substitution  $S_\alpha$ , anzuwenden auf alle Eigenwertsätze,

$$S_\alpha : m \rightarrow m + k\alpha$$

zu.

Offensichtlich gehört zu einem Paar ein und dieselbe Substitution, da

$$\frac{(-\alpha_1 m)}{(-\alpha_1 - \alpha)} \cdot (-\alpha) \equiv \frac{(\alpha m)}{(\alpha \alpha)} \cdot \alpha.$$

Zweimalige Anwendung von  $S_\alpha$  hebt sich auf:

$$(26) \quad S_\alpha^2 = 1,$$

alle Substitutionen sind also involutorisch. In den geometrischen Modellen können deshalb die Substitutionen  $S_\alpha$  nichts anderes als Spiegelungen sein.

Die Gesamtheit all dieser Spiegelungen bildet eine Gruppe. Diese, mit  $S$  bezeichnet, ist in abstracto eine endliche Permutationsgruppe, erzeugt aus den zweigliedrigen Zyklen  $S_\alpha$ . Zu verschiedenen endlichen Gruppen gehören offenbar verschiedene Algebren. (Die Umkehrung gilt nicht, wie die folgenden Beispiele zeigen.)

${}^n\text{SL}$ :

$$(27) \quad \alpha = \lambda^i - \lambda^k \quad S_\alpha : \begin{cases} m_i \rightarrow m_k \\ m_k \rightarrow m_i \end{cases}$$

Geometrisch: Spiegelung an der Ebene  $\alpha = 0$ .  $S$  ist die Gruppe  $\mathfrak{S}_n$  (symmetrische Gruppe) von der Ordnung  $n!$ .

${}^{2\nu+1}\text{O}$ :

$$(28) \quad \begin{cases} \alpha = \omega^i - \omega^k & S_\alpha : m_i \rightarrow m_k ; m_k \rightarrow m_i \\ \alpha = \omega^i + \omega^k & S_\alpha : m_i \rightarrow -m_k ; m_k \rightarrow -m_i \\ \alpha = \omega^i & S_\alpha : m_i \rightarrow -m_i \end{cases}$$

Geometrisch: Spiegelungen an den Ebenen  $\alpha = 0$ .  $S$  ist die Gruppe  $\mathfrak{D}_\nu$  („Oktaedergruppe“, Weyl 1939 p. 218), die erzeugt ist aus den Transpositionen zweier Elemente und aus den Vorzeichenänderungen an einem Element. Sie hat dementsprechend die Normalteiler  $\underbrace{\mathfrak{Z}_2 \times \mathfrak{Z}_2 \times \dots \times \mathfrak{Z}_2}_\nu$  und  $\mathfrak{C}_\nu$ . Ihre Ordnung ist  $2^\nu \cdot \nu!$ .

${}^{2\nu}\text{O}$ :

Gegenüber dem vorhergehenden Fall fehlen die Wurzeln  $\omega^i$  und dementsprechend die Vorzeichenänderungen eines Elementen-

tes.  $S$  besteht aus derjenigen Hälfte der vorstehenden Substitutionen, welche nur an einer geraden Anzahl von Elementen das Vorzeichen ändern. Die Ordnung ist  $2^{\nu-1} \cdot \nu!$ .

$2^\nu \text{Sp}$ :

Obwohl  $\sigma^i$  durch  $2\sigma^i$  ersetzt ist, stimmen die Substitutionen und auch die ganze Gruppe  $S$  mit denjenigen der  $2^{\nu+1}\text{O}$  überein.

Die Bedeutung der Gruppe  $S$  einer Algebra für die Darstellungstheorie wird besonders in § 4 Ziff. 3 und § 5 Ziff. 3 ersichtlich werden.

3. Eigenwertsätze, die durch die Substitutionen von  $S$  ineinander übergehen, heißen  $S$ -äquivalent. Insbesondere sind die vorhin als extremal bezeichneten Eigenwertsätze untereinander äquivalent. Als Repräsentant greift man denjenigen extremalen heraus, dessen einzelne Komponenten nichtaufsteigend geordnet sind. Er ist im Sinne einer lexikographischen Ordnung der maximale Eigenwertsatz der Darstellung.

Es ist zu zeigen, daß der maximale Eigenwertsatz einfach ist (vgl. Weyl 1925 p. 282), d. h. daß es nur einen einzigen Eigenvektor gibt, zu dem er gehört.<sup>1</sup>

Der maximale Eigenwertsatz kennzeichnet also die irreduzible Darstellung. Wir nennen ihn die *Bezifferung* der Darstellung, er wird in einer Klammer dem Algebrensymbol beigefügt.

Die einzelnen Komponenten der Eigenwertsätze unterliegen einer sehr einschneidenden Bedingung. In einer Darstellung von endlichem Grad der Matrizen (nur solche interessieren hier) muß nach (25)  $k$  eine ganze Zahl sein. Die Tabelle 1 lehrt, daß dann im Falle der  ${}^n\text{SL}$ ,  ${}^n\text{Sp}$  und  ${}^H\text{G}$  alle Komponenten  $m_i$  ganze Zahlen sein müssen, im Falle der  ${}^n\text{O}$  können in einer irreduziblen Darstellung entweder alle ganzzahlig oder alle halbzahlig sein.

<sup>1</sup> Nur in den einfachsten Fällen sind alle Eigenwertsätze von der Multiplizität Eins. Dann ist das Darstellungsproblem trivial (vgl. die elementare Lösung für die  ${}^3\text{O}$  bei Born und Jordan). Im allgemeinen sind die Eigenwertsätze jedoch entartet (z. B. hat bereits die adjungierte Darstellung den Eigenwertsatz  $(0, 0, \dots, 0)$ , der zu den Elementen aus  $\mathbf{H}$  gehört, i. a. mehrfach). Die Darstellungstheorie wird hier dadurch beträchtlich komplizierter, daß die Eigenwertsätze nicht eindeutig die Eigenvektoren kennzeichnen.

Bei den Darstellungen der  ${}^n\text{SL}$  behandelt man, wie schon erwähnt, gerne  $\lambda^0 \equiv \lambda^n$  formal als selbständige Variable (unter der Nebenbedingung  $\sum_{i=1}^n \lambda^i = 0$ ). Der Eigenwertsatz hat dann  $n$  Komponenten; diese Verabredung soll im folgenden gelten.

Es ist

$$m_0 \lambda^0 + \sum_{i=1}^{n-1} m_i \lambda^i = \sum_{i=1}^{n-1} (m_i - m_0) \lambda^i.$$

Darstellungen der  ${}^n\text{SL}$  mit äußerlich verschiedener Bezifferung sind identisch, wenn sie nur in den (stets ganzzahligen) Differenzen zwischen den einzelnen Komponenten übereinstimmen. Man kann also zur Bezifferung und damit zu allen Eigenwertsätzen einer Darstellung in allen Komponenten eine beliebige, nicht notwendig ganze Zahl addieren, ohne eine andere Darstellung zu erzielen.

Z. B. kann die Darstellung  ${}^4\text{SL}(1110)$  auch als  ${}^4\text{SL}(000-1)$  bezeichnet werden, oder  ${}^4\text{SL}(1100)$  als  ${}^4\text{SL}(00-1-1)$ . Zusammen mit der Bedingung der lexikographischen Ordnung ergibt sich schließlich, daß für die Bezifferung folgende Ungleichungen gelten:

$$(29) \quad {}^n\text{SL} : m_1 \geq m_2 \geq m_3 \geq \dots \geq m_n$$

$$(30) \quad {}^{2\nu}\text{Sp} : m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_\nu \geq 0, \quad \text{alle } m_i \text{ ganzzahlig}$$

$$(31) \quad {}^{2\nu+1}\text{O} : m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_\nu \geq 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{alle } m_i \text{ ent-} \\ \text{weder ganz-} \end{array} \right\}$$

$$(32) \quad {}^{2\nu}\text{O} : m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_{\nu-1} \geq |m_\nu| \quad \left. \begin{array}{l} \text{zahlig oder} \\ \text{halbzahlig.} \end{array} \right\}$$

Da bei der  ${}^{2\nu}\text{O}$  der Vorzeichenwechsel an einem Element allein nicht vorkommt, kann hier tatsächlich der kennzeichnende Eigenwertsatz eine negative letzte Komponente haben. Zwei Darstellungen, deren Bezifferungen sich nur im Vorzeichen der letzten Komponente (wenn diese nicht verschwindet) unterscheiden, heißen zueinander konjugiert (vgl. § 4 Ziff. 2).

4. In § 2 ist ausgeführt, wie die dort erwähnten Isomorphismen der Lie-Algebren verschiedener Typen auf affiner Verwandt-

schaft der Wurzelsysteme beruhen. Durch eine entsprechende affine Transformation gehen dann auch die Systeme der Eigenwertsätze ineinander über. Für die Eigenwertsätze, insbesondere die Bezifferungen, hat man dabei folgende Umrechnungen:

$$(33) \quad \begin{aligned} {}^3\text{O}(m) &= {}^2\text{Sp}(2m) = {}^2\text{SL}(2m, 0) \\ {}^2\text{SL}(f_1 f_2) &= {}^3\text{O}\left(\frac{f_1 - f_2}{2}\right) = {}^2\text{Sp}(f_1 - f_2) \end{aligned}$$

$$(34) \quad \begin{aligned} {}^4\text{O}(m_1 m_2) &= {}^3\text{O}\left(\frac{m_1 + m_2}{2}\right) \times {}^3\text{O}\left(\frac{m_1 - m_2}{2}\right) \\ {}^3\text{O}(r) \times {}^3\text{O}(s) &= {}^4\text{O}(r + s, r - s)^1 \end{aligned}$$

$$(35) \quad \begin{aligned} {}^5\text{O}(m_1 m_2) &= {}^4\text{Sp}(m_1 + m_2, m_1 - m_2) \\ {}^4\text{Sp}(n_1 n_2) &= {}^5\text{O}\left(\frac{n_1 + n_2}{2}; \frac{n_1 - n_2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$(36) \quad \begin{aligned} {}^6\text{O}(m_1 m_2 m_3) &= {}^4\text{SL}(m_1 + m_2, m_1 - m_3, m_2 - m_3, 0) \\ {}^4\text{SL}(f_1 f_2 f_3 f_4) &= {}^6\text{O}\left(\frac{f_1 + f_2 - f_3 - f_4}{2}, \frac{f_1 - f_2 + f_3 - f_4}{2}, \frac{f_1 - f_2 - f_3 + f_4}{2}\right). \end{aligned}$$

In Tabelle 2 und 3 sind die öfters gebrauchten Umrechnungen zu finden. (Die in der Spalte N stehenden Anzahlen werden später erklärt.)

Wichtige Umrechnungen sind besonders:

$$(37) \quad {}^6\text{O}\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) = {}^4\text{SL}(1000); \quad {}^6\text{O}\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2}\right) - = {}^4\text{SL}(000 -1);$$

$$(38) \quad {}^6\text{O}(100) = {}^4\text{SL}(1100);$$

$$(39) \quad {}^6\text{O}(110) = {}^4\text{SL}(100 -1);$$

$$(40) \quad {}^6\text{O}(111) = {}^4\text{SL}(2000); \quad {}^6\text{O}(11 -1) = {}^4\text{SL}(000 -2);$$

$$(41) \quad {}^5\text{O}\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) = {}^4\text{Sp}(10);$$

$$(42) \quad {}^5\text{O}(10) = {}^4\text{Sp}(11);$$

$$(43) \quad {}^5\text{O}(11) = {}^4\text{Sp}(20);$$

---

<sup>1</sup> Gelegentlich wird die Lorentzgruppe vorteilhaft nach  $r$  und  $s$  beziffert. Wir schließen uns diesem Brauch nicht an, da er sich nicht dem allgemeinen Vorgehen bei der orthogonalen Gruppe fügt.

$$(44) \quad {}^4O\left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) = {}^2Sp(1) \times {}^2Sp(0); \quad {}^4O\left(\frac{1}{2} \ -\frac{1}{2}\right) = {}^2Sp(0) \times {}^2Sp(1);$$

$$(45) \quad {}^4O(10) = {}^2Sp(1) \times {}^2Sp(1);$$

$$(46) \quad {}^4O(11) = {}^2Sp(2) \times {}^2Sp(0); \quad {}^4O(1 \ -1) = {}^2Sp(0) \times {}^2Sp(2);$$

$$(47) \quad {}^3O\left(\frac{1}{2}\right) = {}^2Sp(1);$$

$$(48) \quad {}^3O(1) = {}^2Sp(2).$$

5. Die Eigenwertsätze der adjungierten Darstellung sind die Wurzeln selbst (Ziff. 1). Die maximale Wurzel ist kennzeichnender Eigenwertsatz.

Die adjungierten Darstellungen der behandelten Lie-Algebren haben also folgende Bezifferungen:

bei der linearen Gruppe:

$${}^2SL(1 \ -1)$$

$${}^3SL(10 \ -1) \quad \text{oder} \quad {}^3SL(210)$$

$${}^4SL(100 \ -1) \quad \text{oder} \quad {}^4SL(2110) \quad \text{usw.,}$$

bei der orthogonalen Gruppe:

$${}^3O(1)$$

$${}^4O(11) \dot{+} {}^4O(1 \ -1) \equiv {}^4O(1\underline{1})$$

$${}^5O(11)$$

$${}^6O(110) \quad \text{usw.}$$

bei der symplektischen Gruppe:

$${}^2Sp(2)$$

$${}^4Sp(20)$$

$${}^6Sp(200) \quad \text{usw.,}$$

bei Killings Gruppe:

$${}^{II}G(21)$$

Die adjungierte Darstellung der  ${}^4O$  zerfällt in die Darstellungen  ${}^4O(11)$  und  ${}^4O(1 \ -1)$ , im Einklang damit, daß die Algebra nicht einfach ist.

6. Das einleitend angeschnittene Problem ist damit zu folgender Fassung gelangt:

Es ist eine Algebra zu suchen, derart, daß ihre adjungierte Darstellung sowohl die Darstellungen  ${}^4O(11)$  und  ${}^4O(1 \ -1)$  ent-

hält wie auch eine Darstellung, deren Matrizen „sich wie ein Vektor verhalten“.

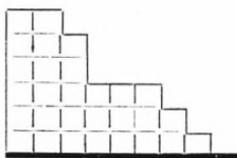
Als nächste Aufgabe ergibt sich somit insbesondere zu klären, welche Bezifferung eine Darstellung der  ${}^4O$  trägt, die sich „wie ein Vektor verhält“. Die notwendigen Beziehungen zur Invariantentheorie, die im folgenden Abschnitt entwickelt werden, geben gleichzeitig eine Illustrierung der bisher abstrakten Darstellungsbezifferung.

### § 4. Beziehungen zur Invariantentheorie

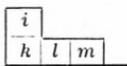
1. Die Invariantentheorie der kontinuierlichen geometrischen Transformationsgruppen („klassischen Gruppen“) ist ein Korollar der Darstellungstheorie der entsprechenden halbeinfachen Lie-Algebren, gebildet aus den infinitesimalen Transformationen dieser Gruppen. Wir referieren in diesem Paragraphen den Zusammenhang und beziehen uns durchwegs auf Weyls Buch „The Classical Groups, Their Invariants and Representations“ (Weyl 1939).

2. Der allgemeine Tensor  $N$ -ter Stufe ist reduzibel. Er zerfällt in Bestandteile, deren Symmetrieeigenschaften festgelegt sind durch die Anordnung der Indizes in einem ebenen Verband von Kolonnen, die nach ihrer Höhe geordnet sind. Man nennt ein solches Schema ein Tableau (siehe nebenstehendes Beispiel). Der solchermaßen gekennzeichnete irreduzible Tensor hat dann die Eigenschaft, daß er durch Linearkombination seiner Elemente höchstens in den Indizes, die jeweils in einer Kolonne stehen, symmetrisch gemacht werden kann; schiefsymmetrisch höchstens in den Indizes, die jeweils in einer Zeile stehen.

Beispiel eines Tableaus



Z. B. kann der Tensor  $f_{ihlm}$  mit dem Tableau



höchstens in den zwei Indizes  $i$  und  $h$  symmetrisiert und höchstens in den drei Indizes  $h$ ,  $l$  und  $m$  schiefsymmetrisiert werden.

Die Anzahl der Kolonnen und damit die Länge der Zeilen ist durch die Dimensionszahl  $n$  begrenzt, da ein Tensor der Stufe  $N > n$ , der in mehr als  $n$  Indizes schiefsymmetrisch ist, identisch verschwindet („leer“ ist). Sind  $f_i$  die Anzahlen der Indizes in den  $i \leq n$  Kolonnen, so wird die Zerlegung (Partition) von  $N$  in

$$(49) \quad N = f_1 + f_2 + \dots + f_n,$$

im physikalischen Sprachgebrauch auch symmetrische Normalform genannt, zur eindeutigen Kennzeichnung des Tableaus dienen.

Denkt man sich die Komponenten des Tensors in einer Spalte geordnet, so resultiert aus einer infinitesimalen Ortstransformation eine Änderung der Tensorkomponenten, die man beschreiben kann durch die Wirkung einer Matrix auf diese Spalte. Zu jedem Element der Lie-Algebra  ${}^n\text{SL}$  von infinitesimalen Transformationen der unimodularen linearen Gruppe gibt es auf diese Weise eine Matrixdarstellung, der Tensor ist dabei Darstellungsmodul. Man nennt deshalb die Tensoren das Substrat der  ${}^n\text{SL}$ .

Eine elementare Rechnung zeigt, daß ein Tensor mit einer Partition  $f_1 + f_2 + \dots + f_h$  gerade eine Darstellung ergibt, deren maximaler Eigenwertsatz  $(f_1, f_2, \dots, f_h, 0, \dots, 0)$  ist und die damit als

$$(50) \quad {}^n\text{SL}(f_1, f_2, \dots, f_h, 0, \dots, 0)$$

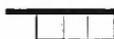
zu bezeichnen ist.

Äußerlich verschiedene Tensoren können dabei zu denselben Darstellungen führen; so z. B. einerseits der vierdimensionale Tensor VII. Stufe mit der Partition  $3 + 2 + 1 + 1$  und andererseits der Tensor III. Stufe mit der Partition  $2 + 1$  (vgl. § 3 Ziff. 3). Dies läßt sich offensichtlich auch mit einer Reduktion durch den schiefsymmetrischen Fundamentaltensor  $\varepsilon_j$  erklären. Jedenfalls erhält man aber alle wesentlich verschiedenen Darstellungen der  ${}^n\text{SL}$  auf die angegebene Weise. Die Eigenwerte und die Komponenten der Bezifferung ergeben sich so allerdings immer ganzzahlig positiv. Negative Komponenten der Darstellungsbezifferung lassen sich verstehen, wenn man Tensoren mit kontravarianten Indizes betrachtet. Im Tableau hat man die Kolonnen kontravarianter Indizes nach unten aufzutragen, die Anzahlen  $f$

solcher Indizes sind in Formel (50) negativ zu nehmen; z. B. gehört zum gemischten Tensor II. Stufe im Dreidimensionalen das Tableau



und man erhält aus ihm eine Darstellung mit der Bezifferung  ${}^3\text{SL}(1\ 0\ -1)$  (die identisch ist mit  ${}^3\text{SL}(210)$ ). Der dreifach schiefsymmetrische kontravariante Tensor III. Stufe im Vierdimensionalen hat das Tableau



und führt zur Darstellung  ${}^4\text{SL}(0\ -1\ -1\ -1)$  (identisch mit  ${}^4\text{SL}(1000)$ ). Von wesentlicher Bedeutung ist also nur die Bezeichnung des Tableaus ohne Rücksicht auf die Lage der Grundlinie, z. B.



Die erwähnte Vorschrift, im Tableau kovariante Indizes nach oben, kontravariante nach unten anzutragen, trägt offenbar gerade dem Umstand Rechnung, daß zwischen ko- und kontravarianten Indizes nur eine Ausreduktion vermittelt des schiefsymmetrischen Fundamentaltensors  $\varepsilon_J$ , aber keine invariante Zerfällung durch Symmetriebedingungen statthaft ist.

Wir erwähnen noch, daß die volle lineare Gruppe direktes Produkt aus der unimodularen Gruppe und der einparametrischen Raumdilatationsgruppe ist. Ihr Substrat sind die Tensordichten, diese führen auf Bezifferungen mit beliebigen Zahlen, deren Differenz nur immer ganzzahlig sein muß. Alle diese Darstellungen sind jetzt inäquivalent; in der infinitesimalen Lie-Algebra, die mit  ${}^n\text{GL}$  bezeichnet wird, fehlt nämlich die Nebenbedingung

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 \dots + \lambda_n = 0.$$

In dem Maße, wie in der unimodularen Gruppe gewisse Tensordichten zusammenfallen, werden auch die zugehörigen Darstellungen identisch (vgl. § 3 Ziff. 3).

3. Die orthogonale Gruppe läßt im Gegensatz zur linearen die Spurbildung als invariante Operation zu. Die irreduziblen

Substrate der  ${}^n\mathcal{O}$  sind dementsprechend die Tensoren, deren sämtliche Spuren verschwinden, die aber im übrigen durch Tableaus in ihrem Symmetrieverhalten festgelegt sind.

Es ergibt sich, daß ein Tensor mit verschwindenden Spuren und der Partition  $f_1 + f_2 + \dots + f_k$  ( $k \leq n$ ) die Darstellung

$$(51) \quad {}^n\mathcal{O}(f_1 - f_n, f_2 - f_{n-1}, \dots, f_\nu - f_{n+1-\nu})$$

erzeugt. Dabei soll  $f_i = 0$  verstanden werden für  $i > k$ ,  $\nu$  habe die bisher gebrauchte Bedeutung.

Eine Einschränkung ist jedoch zu machen: Tensoren mit verschwindenden Spuren, deren Tableau in den untersten zwei Zeilen insgesamt mehr als  $n$  Indizes enthält, sind „leer“ (vgl. Weyl 1939 p. 154) und ergeben überhaupt keine Darstellung. Man spricht in diesem Fall von verbotenen Tableaus. Man schließt sie praktisch recht einfach aus durch die Regel: Bei Bildung der Differenzen in der vorstehenden Formel (51) darf von einer größeren Zahl als 1 keine andere Zahl als Null subtrahiert werden (im Falle  $n = 2\nu + 1$  darf außerdem  $f_{\nu+1}$  nur 0 oder 1 sein).<sup>1</sup>

Aus dieser letzten Bemerkung ergibt sich, daß, abgesehen von Tableaus, die auch in der  ${}^n\mathcal{SL}$  schon dieselben Darstellungen ergeben, i. a. jeweils nur zwei Tableaus zu derselben Darstellung der  ${}^n\mathcal{O}$  führen. Man nennt diese beiden Tableaus zueinander assoziiert. Die betreffenden Tensoren werden als zueinander dual bezeichnet, wie z. B. Vektor und Pseudovektor; im Vierdimensionalen mit den Tableaus

$$\begin{array}{|c|} \hline \square \\ \hline \end{array} \quad \text{und} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline \square & \square & \square \\ \hline \end{array}.$$

Eine Ausnahme machen im Falle  $n = 2\nu$  die Tableaus, die gerade  $\nu$  Kolonnen haben. Sie sind im vorstehenden Sinn selbst assoziiert. Die betreffenden Tensoren, selbstdual genannt, sind irreduzibel gegenüber der vollen orthogonalen Gruppe. Gegenüber der Untergruppe eigentlicher Drehungen (Determinante = +1) – und nur diese wird mit den infinitesimalen Transformationen der Lie-Algebra erfaßt – zerfallen sie in zwei Hälften, wie dies etwa vom selbstdualen schiefsymmetrischen

<sup>1</sup> Formel (51) gibt auf jeden Fall die Partition des größten nicht-leeren Tensors verschwindender Spur an, der beim Übergang von der linearen Gruppe zur orthogonalen Gruppe entsteht.

Tensor II. Stufe im Vierdimensionalen ( $F_{ik} + F_{ik}^*$ ) bekannt ist. Demgemäß ergeben sich auch zwei Darstellungen der  ${}^2\text{O}$ , nämlich die in § 3 Ziff. 3 als konjugiert bezeichneten:

$${}^2\text{O}(f_1 f_2 \dots f_v) \quad \text{und} \quad {}^2\text{O}(f_1 f_2 \dots f_{v-1}, -f_v),$$

die wir gelegentlich zweckmäßig unter der Bezeichnung

$$(52) \quad {}^2\text{O}(f_1 f_2 \dots \underline{f_v})$$

zusammenfassen.

Aufschlußreich ist auch die folgende Beziehung:

Wenn zu  ${}^6\text{O}(m_1 m_2 m_3)$  isomorph ist  ${}^4\text{SL}(f_1 f_2 f_3 f_4)$ , so ist zu

$$(53) \quad {}^6\text{O}(m_1 m_2 -m_3) \text{ isomorph } {}^4\text{SL}(-f_4 -f_3 -f_2 -f_1);$$

sowie:

$$(54) \quad \text{Wenn zu } {}^4\text{O}(m_1 m_2) \text{ isomorph ist } {}^2\text{Sp}(n_1) \times {}^2\text{Sp}(n_2), \text{ so ist}$$

$$\text{zu } {}^4\text{O}(m_1 -m_2) \text{ isomorph } {}^2\text{Sp}(n_2) \times {}^2\text{Sp}(n_1).$$

Im ersteren Fall entsprechen also konjugierten Darstellungen der  ${}^6\text{O}$  kontragrediente Substrate der  ${}^4\text{SL}$ .

Es ist unmöglich, mittels Ausreduktion von Tensoren durch Spurbildung halbzahlige Darstellungen (d. h. solche mit halbzahligen Eigenwerten und Komponenten der Bezifferung) zu erhalten. Diese Darstellungen sind ihrem Wesen nach nicht-tensoriell; daß sie in der orthogonalen Gruppe auftreten, verdanken sie nur der sonderbaren Untergruppenbeziehung (21). Vgl. die spätere Anm. p. 154.

Auch bei halbzahligen Darstellungen müssen jeweils zwei konjugierte Darstellungen zusammengefaßt werden, um die volle orthogonale Gruppe zu beschreiben. Der Spiegelung entspricht immer der vollständige Austausch der Darstellungsräume der beiden konjugierten Darstellungen.

3. Die symplektische Gruppe läßt eine schiefsymmetrische Bilinearform

$$(55) \quad x_1 y_2 - x_2 y_1 + x_3 y_4 - x_4 y_3 + \dots x_{2v-1} y_{2v} - x_{2v} y_{2v-1}$$

invariant. Den entsprechend gebildeten Ausdruck

$$a_{12klm} - a_{21klm} + a_{34klm} - a_{43klm} + \dots$$

bezeichnet man als Schiefspur ((12)-Spur). Während die Spur eine Einschränkung nur bei symmetrischen Indexpaaren bedeutet, bringt die Schiefspur eine solche nur bei schiefsymmetrischen Indexpaaren. (Man vgl. daraufhin die spätere Formel (64).) Die Substrate der symplektischen Gruppe sind die Tensoren, deren sämtliche Schiefspuren verschwinden. Hat ein solcher die Partition  $f_1 + f_2 + \dots + f_k$  ( $k \leq n$ ), so führt er auf die Darstellung

$$(56) \quad {}^2\text{Sp}(f_1 - f_n, f_2 - f_{n-1}, \dots, f_v - f_{v+1}),$$

wie bei der orthogonalen Gruppe. Weitere Komplikationen, wie bei dieser, entstehen jedoch nicht.

Man kann Schiefspuren formal mit Einsteinscher Summierung behandeln, wenn man eine Hoch-Tief-Indizierung einführt von der Art

$$(57) \quad u_1 = -u^2, u_2 = u^1, u_3 = -u^4, u_4 = u^3 \quad \text{usw.}$$

Offensichtlich ist die bekannte Hoch-Tief-Schreibweise bei Spinoren Ausdruck dafür, daß sie nicht nur (wofür sie gewöhnlich angesehen werden) Substrate der  ${}^2\text{SL}$ , sondern auch der damit isomorphen  ${}^2\text{Sp}$  sind. Die gepunkteten und die ungepunkteten Indizes der Spinoren beziehen sich auf die beiden Kronecker-Teilräume der  ${}^2\text{Sp} \times {}^2\text{Sp} (\cong {}^4\text{O})$ .

*Insofern sie mittels der Isomorphismen (10) bis (13) mit der orthogonalen Gruppe im gewöhnlichen Ortsraum zusammenhängen,* schlagen wir für die Substrate der  ${}^2\text{Sp} \cong {}^2\text{SL}$  die Bezeichnung Spinoren, für die Substrate der  ${}^2\text{Sp} \times {}^2\text{Sp} \cong {}^2\text{SL} \times {}^2\text{SL}$  die schärfere Bezeichnung Doppelspinoren, für die Substrate der  ${}^4\text{SL}$  oder  ${}^4\text{Sp}$  die Bezeichnung Undoren vor.<sup>1</sup>

4. Die adjungierte Darstellung ist die Darstellung im Raum der Algebrenelemente selbst (vgl. Anhang I). Die einzelnen Elemente der Algebra sind also das Substrat der adjungierten Darstellung. Die Bezifferung der adjungierten Darstellung ergibt somit das Transformationsverhalten der Darstellungsmatrizen untereinander. Z. B. hat die adjungierte Darstellung der  ${}^n\text{O}$  ( $n \geq 4$ ) die Bezifferung (1100 . .), (wo allenfalls nur Nullen folgen), im Einklang damit, daß die infinitesimalen Drehungen einen schief-symmetrischen Tensor II. Stufe bilden ( $\tau_{ih} = -\tau_{hi}$ !).

<sup>1</sup> Letzterer Ausdruck ist übernommen von Belinfante 1939.

Sollen sich die Matrizen „wie ein Vierervektor“ verhalten, so müssen sie sich im Raum der Algebrenelemente nach einer Darstellung  ${}^4O(10)$  transformieren, d. h. die adjungierte Darstellung muß bei Beschränkung auf die Unteralgebra  ${}^4O$  die Darstellung  ${}^4O(10)$  enthalten. Somit lautet unser Problem: Welche Algebren haben adjungierte Darstellungen, die bei Beschränkung auf die  ${}^4O$  die Darstellungen  ${}^4O(11)$  und  ${}^4O(10)$  (und womöglich keine weiteren, überflüssigen) enthalten?

Es bleibt uns im nächsten Abschnitt nur noch zu untersuchen, in welche Teildarstellungen eine Darstellung zerfällt, wenn man zu einer Unteralgebra übergeht, oder anders betrachtet, welche Darstellungen zusammengefaßt werden müssen, damit sie eine Darstellung einer Oberalgebra ergeben.

### § 5. Verzweigungssätze. Charakteristiken. Lösung des Problems

1. Eine irreduzible Darstellung einer Lie-Algebra kann zerfallen, wenn man sich auf die Darstellung einer Unteralgebra beschränkt. Für unsere Untersuchungen grundlegend ist der Zerfall von Darstellungen bei schrittweiser Dimensionszahlerniedrigung. Insbesondere interessiert der Abbau

$${}^nSL \rightarrow {}^{n-1}SL \quad \text{und} \quad {}^nO \rightarrow {}^{n-1}O.$$

Es gilt der Verzweigungssatz für die lineare unimodulare Gruppe: (vgl. Weyl 1928 p. 256).<sup>1</sup>

Die Darstellung  ${}^nSL(F_1 F_2 \dots F_n)$  zerfällt in diejenigen Darstellungen  ${}^{n-1}SL(f_1 f_2 \dots f_{n-1})$ , deren Bezifferung den Bedingungen

$$(58) \quad F_1 \geq f_1 \geq F_2 \geq f_2 \geq F_3 \geq \dots \geq f_{n-1} \geq F_n$$

genügt. Jede dieser Darstellungen kommt genau einmal vor.

---

<sup>1</sup> Wir deuten in Anhang III einen direkten Beweis an für die Verzweigungssätze, die sonst mittels der Charakteristiken hergeleitet werden müssen. Wir sind der Ansicht, daß die Verzweigungssätze in einer algebraischen Theorie Liescher Gruppen das angemessene Werkzeug zum Aufbau der Darstellungen und zur Gewinnung des wichtigen Hilfsmittels der Charakteristiken sind. Dabei werden die üblichen transzendenten Integrationsmethoden mit ihren Komplikationen topologischer Art vermieden.

Ferner gilt der Verzweigungssatz für die orthogonale Gruppe:

Die Darstellung  ${}^{2\nu+1}\text{O}(M_1 M_2 \dots M_\nu)$  zerfällt in diejenigen Darstellungen  ${}^{2\nu}\text{O}(m_1 m_2 \dots m_\nu)$ , deren Bezifferung den Bedingungen

$$(59) \quad M_1 \geq m_1 \geq M_2 \geq m_2 \geq M_3 \geq \dots \geq M_{\nu-1} \geq m_{\nu-1} \\ \geq M_\nu \geq m_\nu \geq -M_\nu$$

genügt.

Die Darstellung  ${}^{2\nu}\text{O}(M_1 M_2 \dots M_\nu)$  zerfällt in diejenigen Darstellungen  ${}^{2\nu-1}\text{O}(m_1 m_2 \dots m_{\nu-1})$ , deren Bezifferung den Bedingungen

$$(60) \quad M_1 \geq m_1 \geq M_2 \geq m_2 \geq M_3 \dots \geq M_{\nu-1} \geq m_{\nu-1} \geq |M_\nu|$$

genügt. Jede dieser Darstellungen kommt genau einmal vor.

Praktisch gut verwendbar sind die folgenden Rekursionsformeln für den Abbau  ${}^6\text{O} \rightarrow {}^5\text{O} \rightarrow {}^4\text{O} \rightarrow {}^3\text{O}$  (in abkürzender Symbolik)

$$(61) \quad {}^6\text{O}(m_1 m_2 m_3) \supset {}^5\text{O}(m_1 m_2) \dot{+} {}^5\text{O}(m_1 m_2 - 1) \dot{+} \dots \dot{+} {}^5\text{O}(m_1 | m_3|) \\ \dot{+} {}^6\text{O}(m_1 - 1, m_2, m_3)$$

$$(62) \quad {}^5\text{O}(m_1 m_2) \supset {}^4\text{O}(m_1 m_2) \dot{+} {}^4\text{O}(m_1 m_2 - 1) \dot{+} \dots \dot{+} {}^4\text{O}(m_1, -m_2) \\ \dot{+} {}^5\text{O}(m_1 - 1, m_2)$$

$$(63) \quad {}^4\text{O}(m_1 m_2) \supset {}^3\text{O}(m_1) \dot{+} {}^3\text{O}(m_1 - 1) \dot{+} \dots \dot{+} {}^3\text{O}(|m_2|).$$

Der Inhalt dieser Formeln ist zusammengefaßt in zwei Tabellen in Bopp und Bauer 1949.

Für die symplektische Gruppe und den Abbau

$${}^{2\nu}\text{Sp} \rightarrow {}^{2\nu-2}\text{Sp} \times {}^2\text{Sp} \rightarrow {}^{2\nu-2}\text{Sp}$$

gilt ebenfalls ein allgemeiner Verzweigungssatz, den wir hier nicht benötigen.

Vermöge der Isomorphismen (10) bis (13) läßt sich nämlich sofort auch der Abbau  ${}^4\text{SL} \rightarrow {}^4\text{Sp} \rightarrow {}^2\text{Sp} \times {}^2\text{Sp} \rightarrow {}^2\text{Sp}$  behandeln. Er geschieht rekursiv nach den Formeln

$$(64) \quad {}^4\text{SL}(f_1 f_2 f_3 f_4) \supset {}^4\text{Sp}(f_1 - f_4, f_2 - f_3) \dot{+} {}^4\text{Sp}(f_1 - f_4 - 1, \\ f_2 - f_3 + 1) \dot{+} \dots \dot{+} {}^4\text{Sp}(f_1 - f_3, f_2 - f_4) \dot{+} \\ \dot{+} {}^4\text{SL}(f_1 - 1, f_2 - 1, f_3, f_4)$$

$$(65) \quad {}^4\text{Sp}(n_1 n_2) \supset {}^2\text{Sp}(n_1) \times {}^2\text{Sp}(n_2) + {}^2\text{Sp}(n_1 - 1) \times {}^2\text{Sp}(n_2 + 1) \\ + \dots + {}^2\text{Sp}(n_2) \times {}^2\text{Sp}(n_1) + {}^4\text{Sp}(n_1 - 1, n_2 - 1)$$

$$(66) \quad {}^2\text{Sp}(n_1) \times {}^2\text{Sp}(n_2) \supset {}^2\text{Sp}(n_1 + n_2) + \dots + {}^2\text{Sp}(|n_1 - n_2|).$$

Von dem Abbau  ${}^4\text{SL} \rightarrow {}^2\text{SL} \times {}^2\text{SL}$  nach den vorstehenden Formeln ist völlig verschieden die Ausreduktion von Welttensoren durch Verjüngung, symbolisch  ${}^4\text{SL} \rightarrow {}^4\text{O}$ , die vor kurzem von Racah (Racah 1949) mit gruppentheoretischen Mitteln aufgenommen wurde. Man benützt am besten den korrespondierenden Abbau  ${}^6\text{O} \rightarrow {}^3\text{O} \times {}^3\text{O}$  (vgl. Anm. p. 147). Mit dieser Methode behandelt man zweckmäßig die Reduktion der Wignerschen Supermultipletts bei der Separation von Spin und Isotopenspin.

2. Die Verzweigungssätze ergeben rekursiv den Grad  $N$  einer Darstellung (d. h. die Reihenzahl der Darstellungsmatrizen) als Summe von Gradzahlen der Teildarstellungen. Die Form der Bedingungen (58), die für die Bezifferungen der zusammenzufassenden Darstellungen gelten, läßt erhoffen, daß die schrittweise Aufsummierung mittels des Summensatzes der Determinantenrechnung zu einer allgemeinen Formel führt. In der Tat ist die Formel mit Vandermondeschen Determinanten gebildet. Es gilt der Satz:

Der Grad  $N$  einer Darstellung  ${}^n\text{SL}(f_1 \dots f_n)$  ist

$$(67) \quad N = \frac{D_n(l_1 l_2 \dots l_n)}{D_n(n-1, \dots, 1, 0)},$$

wo

$$(68) \quad l_i = f_i + (n - i) \quad \text{ist}$$

sowie

$$(69) \quad D_n(l_1 l_2 \dots l_n) = \prod_{i < k} (l_i - l_k), \quad i, k = 1 \dots n.$$

Ferner gilt der Satz:

Der Grad  $N$  einer Darstellung  ${}^n\text{O}(m_1 \dots m_\nu)$  ist

$$(70) \quad N = \frac{P(l_1 l_2 \dots l_\nu)}{P\left(\frac{n}{2} - 1, \dots, \frac{n}{2} - \nu\right)},$$

wo

$$(71) \quad l_i = m_i + \left(\frac{n}{2} - i\right) \quad \text{ist}$$

sowie

$$(72) \quad P = \prod_{i < h} (l_i - l_h) (l_i + l_h) \quad \text{falls } n = 2\nu;$$

$$(73) \quad P = \prod_{i < h} (l_i - l_h) (l_i + l_h) \cdot \prod_m l_m \quad \text{falls } n = 2\nu + 1.$$

Zum Beweis siehe Anhang III.

Offensichtlich ist die Funktion  $D$  bzw.  $P$  in allen drei Fällen invariant gegenüber den Substitutionen der zugehörigen Gruppen  $\mathfrak{S}_n, \mathfrak{D}_\nu$ , wie man es zu erwarten hat.

Ausgewertet lauten die Formeln für die Gradzahlen  $N$  (vgl. Bopp und Bauer 1949, Tab. 1, sowie auch Tabelle 2 am Schluß der Arbeit).

$$\begin{aligned} {}^2\text{SL}(f_1 f_2) & : N = f_1 - f_2 + 1 \\ (74) \quad {}^3\text{SL}(f_1 f_2 f_3) & : 2N = (f_1 - f_2 + 1)(f_1 - f_3 + 2) \cdot \\ & \quad \cdot (f_2 - f_3 + 1) \\ {}^4\text{SL}(f_1 f_2 f_3 f_4) & : 12N = (f_1 - f_2 + 1)(f_1 - f_3 + 2) \cdot \\ & \quad \cdot (f_1 - f_4 + 3)(f_2 - f_3 + 1) \cdot \\ & \quad \cdot (f_2 - f_4 + 2)(f_3 - f_4 + 1) \\ {}^3\text{O}(m) & : N = 2m + 1 \\ {}^4\text{O}(m_1 m_2) & : N = (m_1 + m_2 + 1)(m_1 - m_2 + 1) \\ (75) \quad {}^5\text{O}(m_1 m_2) & : 6N = (2m_1 + 3)(2m_2 + 1) \cdot \\ & \quad \cdot (m_1 + m_2 + 2)(m_1 - m_2 + 1) \\ {}^6\text{O}(m_1 m_2 m_3) & : 12N = (m_1 + m_2 + 3)(m_1 + m_3 + 2) \cdot \\ & \quad \cdot (m_2 + m_3 + 1)(m_1 - m_2 + 1) \cdot \\ & \quad \cdot (m_1 - m_3 + 2)(m_2 - m_3 + 1) \\ (76) \quad {}^2\text{Sp}(n) & : N = n + 1 \\ {}^4\text{Sp}(n_1 n_2) & : 6N = (n_1 + n_2 + 3)(n_1 - n_2 + 1) \cdot \\ & \quad \cdot (n_1 + 2)(n_2 + 1). \end{aligned}$$

Wie es sein muß, stimmen die Darstellungsgrade von korrespondierenden Darstellungen isomorpher Algebren überein. Konjugierte Darstellungen  ${}^{2\nu}\text{O}(m_1 \dots m_{\nu-1}, \pm m_\nu)$  haben nach Formel (72), da  $l_\nu = m_\nu$  ist, denselben Darstellungsgrad.

Insbesondere hat man nach (59), (60) folgende Beziehungen:

$$(77) \quad \begin{aligned} & 2^{\nu+2}O(1/2 \ 1/2 \dots 1/2) \supset 2^{\nu+1}O(1/2 \ 1/2 \dots 1/2) \supset \\ & \supset 2^{\nu}O(1/2 \ 1/2 \dots + 1/2) + 2^{\nu}O(1/2 \ 1/2 \dots - 1/2) = 2^{\nu}O(1/2 \dots 1/2). \end{aligned}$$

Da  ${}^3O(1/2)$  den Darstellungsgrad 2 hat, ergibt sich direkt

$$(78) \quad \begin{aligned} & \text{für } 2^{\nu+1}O(1/2 \dots 1/2) \quad : N = 2^{\nu} \\ & \text{für } 2^{\nu}O(1/2 : \dots \pm 1/2) : N = 2^{\nu-1}. \end{aligned}$$

3. Ein wichtiges Hilfsmittel ist die Charakteristik einer Darstellung, deren Begriff und Anwendung erläutert werden soll, ohne daß ihre geometrische Bedeutung in den Vordergrund gestellt wird.

Man kann jedem Eigenwertsatz eindeutig ein Potenzprodukt zuordnen

$$(79) \quad Q = (q_1 \dots q_{\nu}) = \sum_1^{\nu} q_i \lambda^i \leftrightarrow \chi(Q) = \varepsilon_1^{q_1} \cdot \varepsilon_2^{q_2} \dots \varepsilon_{\nu}^{q_{\nu}}.$$

Der formale Vorteil besteht zunächst darin, daß man das ganze System von Eigenwertsätzen einer Darstellung durch die Summe solcher Potenzprodukte kennzeichnen kann:

$$(80) \quad (Q) = \mathfrak{H} = \sum \mathfrak{H}_i \lambda^i \leftrightarrow \chi = \varepsilon_1^{q_1} \cdot \varepsilon_2^{q_2} \dots \varepsilon_{\nu}^{q_{\nu}} + \dots = \text{Spur}(\exp \mathfrak{H})$$

wo  $\varepsilon_i = e^{\lambda_i}$ .

Die derartig gebildete Potenzproduktsomme bezeichnet man als Charakteristik der Darstellung.

Offensichtlich wird die Charakteristik beim Untergruppenzerfall additiv zerlegt.

Die Invarianz des Systems von Eigenwertsätzen einer irreduziblen Darstellung gegen die Substitutionsgruppe  $S$  drückt sich in einer ebensolchen Invarianz der Charakteristik bei den Prozessen der Vertauschung (und Inversion) von Variablen  $\varepsilon_i$  aus. Die  ${}^nSL$  wird von der Permutationsgruppe (symmetrischen Gruppe)  $\mathfrak{S}_n$  beherrscht (vgl. § 3 Ziff. 2). Potenzproduktsommen, die gegen die symmetrische Gruppe von  $n$  Elementen alternierend sind, kennt man in der Form  $n$ -reihiger Vandermondischer Determinanten. Ein Quotient zweier solcher ist invariant gegen die ganze Gruppe.

Beim Abbau  ${}^n\text{SL} \rightarrow {}^{n-1}\text{SL}$  ist formal  $\varepsilon_n = 1$  zu setzen. Der additive Zerfall der Charakteristik muß dann dem Verzweigungssatz gehorchen; d. h. die Exponenten der Vandermondeschen Determinante müssen so angesetzt werden, daß der Sumsensatz für Determinanten gerade das richtige Ergebnis liefert. Eine Rechnung, die mit der für die Darstellungsgrade durchgeführten viel Ähnlichkeit hat (vgl. Anhang III), zeigt, daß für alle Dimensionszahlen die gestellten Bedingungen erfüllt sind durch den Ansatz

$$(81) \quad \chi = \frac{\xi(f_1, f_2, \dots, f_n)}{\xi(0, 0, \dots, 0)},$$

wo

$$(82) \quad \xi(f_1, f_2, \dots, f_n) = \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1} & \varepsilon_2^{l_1} & \dots & \varepsilon_n^{l_1} \\ \varepsilon_1^{l_2} & \varepsilon_2^{l_2} & \dots & \varepsilon_n^{l_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{l_n} & \varepsilon_2^{l_n} & \dots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix}$$

und

$$(68) \quad l_i = f_i + (n-i) \text{ ist.}$$

Die Anzahl der Summanden einer Charakteristik muß mit dem Darstellungsgrad übereinstimmen. Man überzeugt sich, daß die angegebenen Ausdrücke tatsächlich auch diese Forderung erfüllen.

Die Nebenbedingung  $\sum_1^n \lambda^i = 0$  drückt sich nunmehr darin aus, daß das Produkt aller  $\varepsilon_i$  identisch Eins ist:

$$(83) \quad \varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2 \cdot \dots \cdot \varepsilon_n = 1.$$

(Diese Einschränkung entfällt für die volle lineare Gruppe.) Ein ähnliches Vorgehen ist bei der orthogonalen Gruppe möglich. Gegen die dort maßgebende „Oktaedergruppe“ ist eine entsprechend gebildete Determinante, die mit den Elementen  $c_i = \varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}$  und  $s_i = \varepsilon_i - \frac{1}{\varepsilon_i}$  gebildet ist, von alternierendem Charakter. Doch benötigen wir die expliziten Formeln nicht, auch nicht für die symplektische Gruppe, da wir alle uns interessie-

renden Charakteristiken aus denen der  ${}^4\text{SL}$  herleiten können. Die Isomorphie  ${}^4\text{SL} \cong {}^6\text{O}$  drückt sich aus in der Umrechnung (vgl. (36))

$$\begin{aligned}
 \varepsilon_1 &\leftrightarrow \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sqrt{\varepsilon_3} \\
 \varepsilon_2 &\leftrightarrow \sqrt{\varepsilon_1} / \sqrt{\varepsilon_2} \cdot \sqrt{\varepsilon_3} \\
 \varepsilon_3 &\leftrightarrow \sqrt{\varepsilon_2} / \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sqrt{\varepsilon_3} \\
 \varepsilon_4 &\leftrightarrow \sqrt{\varepsilon_3} / \sqrt{\varepsilon_1} \cdot \sqrt{\varepsilon_2}.
 \end{aligned}
 \tag{84}$$

Sodann beherrscht man mit dem Verzweigungssatz den Abbau der  ${}^6\text{O}$  und erhält auch die Charakteristiken der  ${}^5\text{O}$  und  ${}^4\text{Sp}$  sowie der  ${}^4\text{O}$ . Hier ist zu beachten, daß das direkte Produkt zweier Algebren als Charakteristik das gewöhnliche Produkt von Charakteristiken der Teilalgebren hat.<sup>1</sup> Zur Illustration und für praktische Zwecke haben wir in Tabelle 3 einige Charakteristiken explizit angegeben.

4. Das Problem, das uns bisher begleitet hat: „Welche invarianten Wellengleichungen gibt es?“ kann nunmehr gelöst werden. Wir untersuchen die adjungierten Darstellungen aller Oberalgebren der  ${}^4\text{O}$  daraufhin, ob unter ihren Zerfallsdarstellungen neben  ${}^4\text{O}(11)$  auch  ${}^4\text{O}(10)$  vorkommt. Es ergibt sich zunächst, daß die unmittelbare Oberalgebra  ${}^{\text{II}}\text{G}$ , von der man am ehesten Überraschungen erwarten würde, ebensowenig wie  ${}^4\text{SL}$  und  ${}^4\text{O} \times {}^3\text{O}$  imstande ist, einen Vierervektor von Basismatrizen der Wellengleichung zu liefern. Es herrscht nämlich folgender Zerfall:

$$(85) \quad {}^{\text{II}}\text{G}(21) \rightarrow {}^4\text{O}(11) \dot{+} {}^4\text{O}(21)$$

$$(86) \quad {}^4\text{SL}(100-1) \rightarrow {}^4\text{O}(11) \dot{+} {}^4\text{O}(20)$$

$$(87) \quad {}^4\text{O} \times {}^3\text{O}(11; 1) \rightarrow {}^4\text{O}(11) \dot{+} 3 \cdot {}^4\text{O}(00),$$

der mit Hilfe der Charakteristiken ohne weiteres verifiziert werden kann. (Die Charakteristiken der adjungierten Darstellungen erhält man direkt aus den in § 2 angegebenen Wurzelsystemen.)

---

<sup>1</sup> Die Ausreduktion  ${}^6\text{O} \rightarrow {}^3\text{O} \times {}^3\text{O}$  kann nun geschehen, in dem man in der Charakteristik der  ${}^6\text{O}$   $\varepsilon_3 = 1$  setzt und alle Charakteristiken der  ${}^3\text{O} \times {}^3\text{O}$  herausgreift.

Dagegen erfüllt die Algebra  ${}^5\mathcal{O}$  gerade die gestellten Bedingungen. Man hat nach dem Verzweigungssatz ja

$$(88) \quad {}^5\mathcal{O}(11) \rightarrow {}^4\mathcal{O}(\underline{11}) \dot{+} {}^4\mathcal{O}(10).$$

Die  ${}^5\mathcal{O}$  ist also auch die kleinste zulässige Algebra. Lubanski hat erstmals erkannt, daß die üblichen Wellengleichungen diesen Fall betreffen (Lubanski 1942). Im übrigen sind alle Oberalgebren der  ${}^5\mathcal{O}$  zulässig. Diese liefern jedoch nichts wesentlich Neues mehr. Soweit unter den Zerfallsdarstellungen auch die Darstellung  ${}^4\mathcal{O}(00)$  mit dem Substrat Skalar vorkommt, kann zwar im skalaren Massenglied  $\kappa$  die dazugehörige Matrix auftreten. Die Basismatrizen sind aber auf jeden Fall für sich allein nach den Darstellungen der  ${}^4\mathcal{O}$  ausreduzierbar. Das Massenglied bewirkt dann nichts weiter als eine Verkopplung verschiedener Wellengleichungen des Lubanski-Falles.

Ein Beispiel für eine solche Verkopplung bringt bereits die Algebra  ${}^6\mathcal{O}$  mit sich. Die adjungierte Darstellung  ${}^6\mathcal{O}(110)$  ergibt neben  ${}^4\mathcal{O}(\underline{11})$  und zweimal  ${}^4\mathcal{O}(10)$  auch die Darstellung  ${}^4\mathcal{O}(00)$ . Aus der Feldmechanik ist von Bopp gerade ein solcher Fall mit einer gegen Lorentztransformationen invarianten Matrix im Massenglied hergeleitet worden (Bopp und Bauer 1949). Verwandte Ansätze stammen von van Isacker 1947 und Green 1948 sowie Hönl.<sup>1</sup> Eine noch willkürliche Matrizenfunktion im Massenglied bestimmt das Massenspektrum. Man erkennt, daß sich im Rahmen unserer Voraussetzungen mit gruppentheoretischen Methoden nichts über das Massenspektrum aussagen läßt.

Unser Ergebnis lautet also: Von Verkopplungen abgesehen, beherrscht man mit dem von Lubanski formulierten Fall von Basismatrizen aus der Lie-Algebra infinitesimaler fünfdimensionaler Drehungen alle möglichen lorentzinvarianten<sup>2</sup> Wellengleichungen erster Ordnung. Ausartungen und Nebenbedingungen sind möglich, wie das Beispiel der Maxwellschen Gleichungen zeigt.

<sup>1</sup> Unveröffentlicht. Wir danken Hrn. Prof. Hönl herzlich für ein überlassenes Manuskript, das uns bereits für unsere Note Bauer 1949b wertvolle Anregung gab.

<sup>2</sup> Bei einer eventuellen Erweiterung der Lorentzgruppe (vgl. Anm. p. 113) sind die angestellten Untersuchungen unschwer abzuändern.

Der folgende Teil II wird die explizite Angabe der Wellengleichungen des Lubanski-Falles anstreben. Zu diesem Zweck hauptsächlich haben wir auch den gruppentheoretischen Apparat aufgebaut.

## II. Ausreduzierte Wellengleichungen

Die umfangreichen mathematischen Ergebnisse des vorausgehenden Teils I werden nunmehr zur systematischen Gewinnung aller Wellengleichungen des Lubanski-Falles in übersichtlicher Komponentenschreibweise benützt.

### § 6. Verschmelzung.

#### Ausreduktion durch Symmetrie- und Spurbedingungen

1. Das *Kroneckerprodukt*  $\mathfrak{A} \times \mathfrak{B}$  zweier Matrizen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  von nicht notwendig gleichem Grad ist so definiert, daß die vorausgehende Matrix als Übermatrix aufgefaßt wird, in deren sämtlichen Komponenten die folgende Matrix multiplikativ einzusetzen ist.

Es ist  $(1 \times \mathfrak{A}) \cdot (\mathfrak{B} \times 1) = (\mathfrak{B} \times 1) \cdot (1 \times \mathfrak{A}) = (\mathfrak{B} \times \mathfrak{A})$ , was als vollständige Vertauschbarkeit der beiden Kronecker-Teilräume bezeichnet wird.

Es folgt sofort, daß mit zwei Darstellungen  $x_i^{(1)}$  und  $x_i^{(2)}$  ( $i = 1 \dots p$ ) einer Algebra  $\mathbf{A} \{X_i\}$  auch die *Verschmelzung*

$$(89) \quad x_i^{(1)} \times 1 + 1 \times x_i^{(2)}$$

wieder Darstellung ist. Als Eigenwertsätze erhält man dabei alle additiven Kombinationen von Eigenwertsätzen der ursprünglichen Darstellungen  $D^{(1)}$  und  $D^{(2)}$ . Somit liegt ein direktes Produkt im mengentheoretischen Sinn vor. Demgemäß spricht man auch vom *direkten Produkt* der beiden ursprünglichen Darstellungen.<sup>1</sup> Den additiven Kombinationen der Eigenwertsätze entspricht ein gewöhnliches Produkt der zugehörigen Charakteristiken. Diese erweisen also hier ihre besondere praktische Brauchbarkeit.

---

<sup>1</sup> Das direkte Produkt von Algebren (wie z. B. bei der <sup>4</sup>O) ist ein verwandter, aber doch wohl zu unterscheidender Begriff.

Das direkte Produkt zweier irreduzibler Darstellungen ist nicht notwendig irreduzibel. Welche irreduziblen Teildarstellungen entstehen, untersucht man im Einzelfall in einfacher Weise dadurch, daß man der Reihe nach alle vorkommenden Charakteristiken, geordnet nach der Größe ihrer Bezifferung, herausgreift. Z. B. ergibt  ${}^5\text{O} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right)$  mit der Charakteristik  $\varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}}$  und  ${}^5\text{O} (10)$  mit der Charakteristik  $\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2 + \varepsilon_2^{-1} + 1$  bei Verschmelzung das Produkt

$$\begin{aligned} & (\varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}}) (\varepsilon_1 + \varepsilon_1^{-1} + \varepsilon_2 + \varepsilon_2^{-1}) + \\ & + (\varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{\frac{1}{2}} + \varepsilon_1^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_2^{-\frac{1}{2}}) \end{aligned}$$

bereits geordnet nach den darin enthaltenen Charakteristiken (vgl. Tabelle 3). Mithin ist

$${}^5\text{O} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) \times {}^5\text{O} (10) = {}^5\text{O} \left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right) \dot{+} {}^5\text{O} \left(\frac{1}{2} \frac{1}{2}\right).$$

2. Eine allgemeine Gesetzmäßigkeit ist leicht zu überschauen im Spezialfall der Verschmelzung mit der Vektordarstellung  ${}^n\text{SL}(100 \dots 00)$  bzw.  ${}^n\text{O}(100 \dots 00)$ . Es gilt in symbolischer Abkürzung

$$\begin{aligned} (90) \quad {}^n\text{SL}(f_1 f_2 \dots f_n) \times {}^n\text{SL}(1000 \dots 0) &= {}^n\text{SL}(f_1+1, f_2 f_3 \dots f_n) \\ &\dot{+} {}^n\text{SL}(f_1, f_2+1, f_3 \dots f_n) \\ &\dot{+} \dots \\ &\dot{+} {}^n\text{SL}(f_1 f_2 \dots f_{n-1}, f_n+1), \end{aligned}$$

wobei aber gerade jene Darstellungen ausfallen, deren Bezifferung gegen die Konvention (29) einer nicht-aufsteigenden Reihenfolge verstoßen würde. Der Beweis (Anhang IV) benutzt eine einfache Umordnung der Charakteristiken-Determinanten.

Ferner gilt der Satz

$$\begin{aligned} (91) \quad {}^n\text{O}(m_1 m_2 \dots m_v) \times {}^n\text{O}(100 \dots 0) &= {}^n\text{O}(m_1+1, m_2 \dots m_v) \\ &\dot{+} {}^n\text{O}(m_1-1, m_2 \dots m_v) \\ &\dot{+} {}^n\text{O}(m_1, m_2+1, m_3 \dots m_v) \\ &\dot{+} {}^n\text{O}(m_1, m_2-1, m_3 \dots m_v) \\ &\dot{+} {}^n\text{O}(m_1 m_2, m_3+1, m_4 \dots m_v) \dot{+} \dots \\ &\dot{+} {}^n\text{O}(m_1 m_2 \dots m_{v-1}, m_v-1) \\ &(\dot{+} {}^n\text{O}(m_1 m_2 m_3 \dots m_{v-1} m_v)), \end{aligned}$$

wobei die letzte, eingeklammerte Darstellung nur auftritt, falls  $n = 2\nu + 1$  und  $m_\nu \neq 0$  ist.

Außerdem ist (Lubanski 1942)

$$(92) \quad {}^n\text{O}(m_1 m_2 \dots m_\nu) \times {}^n\text{O}(1/2 \ 1/2 \dots 1/2) = {}^n\text{O}(m_1 \pm 1/2, m_2 \pm 1/2, \dots m_\nu \pm 1/2).$$

Dabei treten alle Vorzeichenkombinationen auf, falls  $n = 2\nu + 1$  ist. Andernfalls kommt nur diejenige Hälfte der Vorzeichenkombinationen in Betracht, die das Vorzeichenprodukt  $+1$  haben. Die übrige Hälfte der Darstellungen entsteht genau bei der Verschmelzung mit der konjugierten Darstellung

$${}^{2\nu}\text{O}(1/2 \ 1/2 \dots 1/2, -1/2).$$

Darstellungen, deren Bezifferung unzulässig wäre, treten in (91) und (92) wiederum nicht auf.

Der Beweis kann ähnlich wie oben angegeben geführt werden. Auf einem anderen Weg beweist Weyl (Weyl 1939. p. 229) ein ganz allgemeines Verschmelzungstheorem.

Man überzeugt sich, daß die Formeln für die  ${}^6\text{O}$  und die  ${}^4\text{SL}$  sowie für die  ${}^3\text{O}$  und die  ${}^2\text{SL}$  zusammenfallen. Wegen der Isomorphien (11) und (12) brauchen wir die symplektischen Gruppen nicht gesondert zu behandeln.

2. Die Verschmelzung bekannter, einfacher Darstellungen ist offenbar eine Möglichkeit zur Erzielung beliebig hoher Darstellungen. Man kann alle Darstellungen der  ${}^n\text{SL}$  durch fortgesetzte Verschmelzung aus der Vektordarstellung  ${}^n\text{SL}(100 \dots 0)$  erhalten, alle Darstellungen der  ${}^n\text{O}$  aus der Cliffordschen Darstellung  ${}^n\text{O}(1/2 \ 1/2 \dots 1/2)$ .<sup>1</sup>

Für die  $N$ -fache Verschmelzung von  ${}^n\text{SL}(100 \dots 0)$  mit sich selbst erhält man folgendes Schema (93), wobei das Zeichen  ${}^n\text{SL}$  und Nullen jeweils weggelassen sind. Die Zahlen vor den Bezifferungen geben die Vielfachheit des Auftretens der betreffenden Darstellung an. Abhängig von dem jeweiligen  $n$  sind diejeni-

<sup>1</sup> Die Möglichkeit einer solchen Erzeugung hat zuerst Cartan in seiner Thèse angegeben, der damit eigentlich die Spinorrechnung erfunden hat. Vorläufer sind die Cayleyschen Quaternionenformeln für Drehungen. Das der Darstellung  ${}^n\text{O}(1/2 \ 1/2 \dots 1/2)$  zugrunde liegende hyperkomplexe System hat jedoch bereits Clifford (Clifford 1878) eingeführt.

gen Darstellungen zu streichen, deren Bezifferung verboten ist, weil sie mehr als  $n$  Ziffern haben würde (§ 4 Ziff. 1).<sup>1</sup>

	$N = 1$								(1)
	$N = 2$								(2) (11)
(93)	$N = 3$								(3) 2(21) (111)
	$N = 4$								(4) 3(31) 2(22) 3(211) (1111)
	$N = 5$	(5)	4(41)	5(32)	6(311)	5(221)	4(2111)		(11111)
	$N = 6$	(6)	5(51)	9(42)	10(411)	5(33)	10(321)	9(2211)	5(21111) (111111)

Alle Darstellungen in einer Zeile haben als Substrat einen Tensor von gleicher Stufe  $N$ . Nicht nur das: dem direkten Produkt von Darstellungen entspricht das Tensorprodukt ihrer Substrate, in einer Zeile stehen also jeweils alle irreduziblen Bestandteile des allgemeinen Tensors  $N$ -ter Stufe. Die Formel (90) und das Schema (93) runden die in § 4 begonnenen invariantentheoretischen Betrachtungen ab. Man hat hier mit den bequemsten Zugang zur Invariantentheorie und zum allgemeinen Symmetrisierungsproblem; das Schema (93) ist identisch etwa mit dem von Hund angegebenen Schema für die Symmetrisierungsmöglichkeiten der Wellenfunktion eines  $N$ -Teilchen-Systems (Hund 1927 p. 797). Über die näheren Beziehungen zur Darstellungstheorie der Permutationsgruppe vgl. Weyl 1928 und Weyl 1939.

In gleicher Weise gibt ein nach Formel (91) gebildetes Schema die Ausreduktion des allgemeinen Tensors nach den irreduziblen Substraten der orthogonalen Gruppe, d. h. nach den symmetrisierten Tensoren der Spur Null an. Hier wird die Ausreduktion der Verschmelzung durch die „Oktaedergruppe“ (28) gesteuert.

4. Bei der numerischen Ausreduktion verschmolzener Matrixdarstellungen ist das mühselige Aufsuchen der einzelnen ausreduzierenden Vektoren (Hönl und Boerner 1950) entbehrlich, wenn man die ausreduzierende Matrix der durchzuführenden Symmetrie- und Spuroperationen anschreibt. Dieser Gedanke der

---

<sup>1</sup> Nach dem Satz von Burnside ist die Summe der Quadrate der Darstellungsgrade von inäquivalenten Darstellungen einer Verschmelzungsstufe  $N$  (die Vielfachheit des Auftretens also ungerechnet) gleich der Dimension  $(n^{N-1} + N)$  der Matrixalgebra der  $N$ -ten Verschmelzungsstufe. Daraus ergibt sich eine einfache Verprobungsmöglichkeit für das Schema (93).

Ausreduktion durch Symmetrie- und Spurbedingungen wird seine besondere Nützlichkeit in den nächsten Paragraphen erweisen, wo wir uns von den Matrizen der Wellengleichung frei machen.

§ 7. Cliffordsche Algebra. „Methode de fusion“.

Wellengleichungen, deren Wellenfunktionen einen Undor bilden

1. Besonders wichtig erscheint die Möglichkeit, alle Darstellungen der orthogonalen Gruppe, die nach dem Ergebnis des Teils I vornehmlich interessiert, durch Verschmelzung aus *Cliffordschen Darstellungen*  ${}^n\text{O}(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  zu gewinnen; um so mehr, als diese Darstellungen auch im allgemeinen Fall leicht angebar sind.

Die übliche Definition der Lie-Algebra  ${}^n\text{O} \equiv \text{B} \{ \beta_{ik} \}$  infinitesimaler orthogonaler Transformationen  $\beta_{ik} (i, k = 1 \dots n)$  ist

$$(94) \quad [\beta_{ik} \beta_{lm}] = -i \{ \beta_{kl} \delta_{im} + \beta_{im} \delta_{kl} - \beta_{km} \delta_{il} - \beta_{il} \delta_{km} \}.$$

Die Elemente  $\beta_{ik}$  bilden bei dieser Wahl der Algebrenbasis kein normales System im Sinne von Anhang II, Ziff. 1; wohl aber bilden sie gerade einen schief-symmetrischen Tensor II. Stufe, das Substrat der adjungierten Darstellung  ${}^n\text{O}(1100 \dots 0)$ .

Man verifiziert, daß die Kommutatoren

$$(95) \quad \gamma_{ik} = \frac{i}{2} \{ \Gamma_i \Gamma_k \}$$

gebildet aus den Elementen  $\Gamma_i$  einer *Cliffordschen* Matrixalgebra, welche definiert ist durch

$$(96) \quad \Gamma_i \Gamma_k + \Gamma_k \Gamma_i = 2 \delta_{ik}$$

die Definitionsgleichungen (94) erfüllen. Die Eigenwerte sind wegen  $\gamma_{ik}^2 = \frac{1}{4}$  nur  $\pm \frac{1}{2}$ , es kann sich also um keine andere als die Darstellung  ${}^n\text{O}(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  handeln.

Eine Realisierung („Repräsentation“) vom Grad  $2^n$  erhält man mit

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 &= s \times s \times s \times \dots \times s \times s \times s \\
 \Gamma_2 &= s \times s \times s \times \dots \times s \times s \times isc \\
 \Gamma_3 &= s \times s \times s \times \dots \times s \times s \times c \\
 \Gamma_4 &= s \times s \times s \times \dots \times s \times isc \times 1 \\
 \Gamma_5 &= s \times s \times s \times \dots \times s \times c \times 1 \\
 (97) \Gamma_6 &= s \times s \times s \times \dots \times isc \times 1 \times 1 \\
 \Gamma_7 &= s \times s \times s \times \dots \times c \times 1 \times 1 \\
 &\dots\dots\dots \\
 \Gamma_{2\nu-2} &= s \times isc \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \times 1 \\
 \Gamma_{2\nu-1} &= s \times c \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \times 1 \\
 \Gamma_{2\nu} &= isc \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \times 1 \\
 \Gamma_{2\nu+1} &= c \times 1 \times 1 \times \dots \times 1 \times 1 \times 1
 \end{aligned}
 \quad
 \begin{aligned}
 s &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 c &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\
 isc &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\
 1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Die mit der Basis (97) gebildeten Kommutatoren (95) ergeben die Darstellung  $^{2\nu+1}O(\frac{1}{2}\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  und, wenn man  $\Gamma_{2\nu+1}$  wegläßt, die Darstellung  $^{2\nu}O(\frac{1}{2}\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$ , welche *explizit* in die beiden konjugierten Darstellungen  $^{2\nu}O(\frac{1}{2}\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  und  $^{2\nu}O(\frac{1}{2}\frac{1}{2} \dots -\frac{1}{2})$  zerfällt. Man beachte, daß die Produkte der  $\Gamma_i (i = 1 \dots 2\nu)$  im ersten Kroneckerteilraum entweder  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$  oder  $\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}$  ergeben.

Unter den möglichen äquivalenten Repräsentationen ist das Basissystem (97) dadurch ausgezeichnet, daß es den sukzessiven Unteralgebrenaufbau äußerlich erkennen läßt. Die Übereinstimmung der Gradzahl mit der Formel (78) ist offensichtlich.<sup>1</sup>  $\Upsilon_{12}, \Upsilon_{34}, \dots, \Upsilon_{2\nu-1, 2\nu}$  werden diagonal und liefern unmittelbar die Eigenwertsätze der Darstellung.

Man kann aber auch direkt die algebraische Definition (96) der Darstellung  $^nO(\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  herleiten. Nach dem in § 4 Ziff. 4 Gesagten bilden die Elemente  $\gamma_i = \gamma_{i\rho} (i = 1 \dots n-1, \rho = n)$  einen  $((n-1)$ -dimensionalen) Vektor. Der Tensor  $b_{ik} = \gamma_i \gamma_k$  ist

<sup>1</sup> Daß die  $^{2\nu}SL$  Oberalgebra der  $^{2\nu+2}O$  ist (Formel 21), erkennt man daraus, daß die Darstellungen  $^{2\nu}O(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  und  $^{2\nu+1}O(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$  bzw.  $^{2\nu+2}O(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \dots \pm \frac{1}{2})$  gleichzeitig die Darstellung  $^{2\nu}SL(100 \dots 0)$  sind. Die dazugehörige Umrechnung der Charakteristiken lautet ( $i = 1 \dots 2\nu$ )

$$\epsilon_i \leftrightarrow \epsilon_1^{\pm \frac{1}{2}} \epsilon_2^{\pm \frac{1}{2}} \epsilon_3^{\pm \frac{1}{2}} \dots \epsilon_\nu^{\pm \frac{1}{2}} \quad (\text{alle Vorzeichenkombinationen})$$

bzw.  $\epsilon_i \leftrightarrow \epsilon_1^{\pm \frac{1}{2}} \epsilon_2^{\pm \frac{1}{2}} \epsilon_3^{\pm \frac{1}{2}} \dots \epsilon_\nu^{\pm \frac{1}{2}} \epsilon_{\nu+1}^{\pm \frac{1}{2}}$  (nur gerade oder ungerade Vorzeichenkombinationen). Vgl. den Spezialfall (84)!

dann das Substrat von  ${}^n\text{O}(\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2}) \times {}^n\text{O}(\frac{1}{2} \dots \frac{1}{2})$ . Die irreduziblen Teildarstellungen dieser Verschmelzung sind

$${}^n\text{O}(\infty \dots 0), ({}^n\text{O}(100 \dots 0)), {}^n\text{O}(110 \dots 0), ({}^n\text{O}(1110 \dots 0)), \dots$$

(wobei die eingeklammerten Darstellungen nicht auftreten für  $n = 2\nu$ ). Die Substrate dieser Darstellungen sind jedenfalls total schiefssymmetrisch, also ist notwendig

$$(98) \quad \gamma_i \gamma_k + \gamma_k \gamma_i = 0 \quad (i \neq k).$$

Da die Eigenwerte nur  $\pm \frac{1}{2}$  sind, gilt die Hamilton-Cayleysche Gleichung

$$(99) \quad \gamma_i^2 = \frac{1}{4}.$$

(98) und (99) zusammen sind aber mit (96) gleichbedeutend  $(\gamma_i = \frac{1}{2} \Gamma_i)$ .

Für  $\nu = 1$  erhält man aus (97) die Darstellung  ${}^3\text{O}(\frac{1}{2})$  durch die Paulimatrizen  $\sigma_x = s$ ,  $\sigma_y = isc$ ,  $\sigma_z = c$ ; für  $\nu = 2$  die Darstellungen  ${}^5\text{O}(\frac{1}{2}\frac{1}{2})$ ,  ${}^6\text{O}(\frac{1}{2}\frac{1}{2})$  und  ${}^6\text{O}(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$  durch Diracmatrizen.

2. Die Gewinnung höherer Darstellungen der  ${}^5\text{O}$  durch Verschmelzung von Diracmatrizen liegt auch der „méthode de fusion“ von de Broglie (de Broglie 1939) zugrunde. Offensichtlich deckt de Broglies Methode gerade den von Lubanski behandelten Fall.

Für die Darstellung  ${}^6\text{O}(\frac{1}{2}\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2})$  erhält man aus (97) die folgende Repräsentation durch Diracmatrizen

$$(100) \quad \begin{aligned} 2 \gamma_1 &= 2 \gamma_{15} = isc \times s \\ 2 \gamma_2 &= 2 \gamma_{25} = isc \times isc \\ 2 \gamma_3 &= 2 \gamma_{35} = isc \times c \\ 2 \gamma_4 &= 2 \gamma_{45} = s \times 1 \\ 2 \gamma_6 &= 2 \gamma_{65} = \pm c \times 1. \end{aligned}$$

Wir betrachten die im Sinn von § 5 Ziff. 4 verallgemeinerte Wellengleichung mit Basismatrizen aus der  ${}^6\text{O}$

$$(101) \quad (\beta_\mu \partial_\mu + \kappa F(\beta_6)) \psi = 0 \quad (\mu = 1 \dots 4).$$

Im Massenglied kann eine noch unbestimmte Funktion der Matrix  $\beta_6$  auftreten. Ist speziell  $\beta_i = \gamma_i$ , so ergibt sich wegen (99)<sup>1</sup>

$$(102) \quad (\gamma_\mu \partial_\mu + \gamma_6 \partial_6 + \kappa_0) \psi = 0.$$

Die Massenkongstante bei  $\gamma_6$  ist aus formalem Grund mit  $\partial_6$  bezeichnet, sie ist selbstverständlich eine c-Zahl. Für  $\partial_6 = 0$  ergibt sich ohne Zerfall die Diracgleichung.

Wird die Wellenfunktionen-Spalte mit

$$(103) \quad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix}$$

durchnumeriert, so erhält man in Komponenten aufgelöst

$$(104) \quad \partial_\alpha^\mu \psi_\mu + \kappa_0 \psi_\alpha = 0,$$

wobei

$$(105) \quad \begin{aligned} \partial_1^2 &= \partial_2^1 = \partial_3^4 = \partial_4^3 = 0 \\ \partial_1^1 &= \partial_2^2 = -\partial_3^3 = -\partial_4^4 = \partial_6 \\ \partial_1^3 &= \partial_4^2 = \frac{1}{i} (\partial_3 + i \partial_4) \\ \partial_1^4 &= -\partial_3^2 = \frac{1}{i} (\partial_1 - i \partial_2) \\ \partial_2^3 &= -\partial_4^1 = \frac{1}{i} (\partial_1 + i \partial_2) \\ -\partial_2^4 &= -\partial_3^1 = \frac{1}{i} (\partial_3 - i \partial_4). \end{aligned}$$

Die Wellenkomponenten  $\psi_1 \dots \psi_4$  sind nach § 4 wegen der Isomorphie  ${}^6O(1/2, 1/2, 1/2) \cong {}^4SL(1000)$  bzw.  ${}^5O(1/2, 1/2) \cong {}^4Sp(10)$  als Undor I. Stufe aufzufassen. Nach der Isomorphie  ${}^5O(10) \cong {}^4Sp(11)$  ist  $\partial_i^h$  ein schiefsymmetrischer Undor II. Stufe mit der Schiefspur Null. Tatsächlich ergibt sich mit der Konvention (57)

$$\begin{aligned} \partial_1^3 &= \partial_{14}; \quad \partial_4^2 = -\partial_{41}; \quad \text{also } \partial_{14} = -\partial_{41} \\ \partial_1^4 &= -\partial_{13}; \quad -\partial_3^2 = +\partial_{31}; \quad \text{also } \partial_{13} = -\partial_{31} \text{ usw.} \\ \partial_2^2 &= \partial_{11}; \quad \text{also } \partial_{11} = 0 \text{ usw.} \\ \partial_1^1 &= \partial_{12} = \partial_6; \quad \partial_2^2 = -\partial_{21} = \partial_6; \quad \partial_3^3 = \partial_{34} = -\partial_6 \text{ usw., also} \\ &\quad \partial_{12} - \partial_{21} + \partial_{34} - \partial_{43} = 0. \end{aligned}$$

<sup>1</sup>  $F(\beta_6)$  ist stets ein Polynom höchstens vom Grad  $2m_1$  in  $\beta_6$  (vgl. Bopp und Bauer 1949).

Ist  $\partial_6 = 0$ , so hat man sogar  $\partial_{12} - \partial_{21} = 0$  und  $\partial_{34} - \partial_{43} = 0$ , entsprechend dem Zerfall von  ${}^4\text{Sp}$  in  ${}^2\text{Sp} \times {}^2\text{Sp}$ . Die Undorindizes 3 und 4 werden zu den gepunkteten Indizes  $\dot{1}$  und  $\dot{2}$  der Spinorrechnung.

Ist nun  $\beta_i$  durch  $N$ -fache Verschmelzung aus  $\gamma_i$  hervorgegangen,  $\beta_i = \gamma_i \times 1 \times 1 \dots \times 1 + 1 \times \gamma_i \times 1 \dots \times 1 + \dots + 1 \times 1 \times \gamma_i$ , so ergibt sich aus (102)

$$(106) \quad \begin{aligned} & \times \psi_{\alpha\beta\gamma\delta\dots\kappa\lambda} + \partial_\alpha^\mu \psi_{\mu\beta\gamma\delta\dots\kappa\lambda} + \partial_\beta^\mu \psi_{\alpha\mu\gamma\delta\dots\kappa\lambda} + \dots \\ & \dots + \partial_\lambda^\mu \psi_{\alpha\beta\gamma\delta\dots\kappa\mu} = 0. \end{aligned}$$

$\psi_{\alpha\beta\gamma\delta\dots\kappa\lambda}$  ist ein Undor  $N$ -ter Stufe. Die Ausreduktion der Verschmelzung kann nunmehr an den Undorkomponenten selbst geschehen. Eine nicht weiter zerlegbare (irreduzible) Wellengleichung der Form (106) ist vollständig definiert durch Angabe des Symmetrietableaus, dem der Undor unterliegt. Dabei ist die Massenkongstante  $\partial_6 = \partial_1^1 = \partial_2^2 = -\partial_3^3 = -\partial_4^4$  formal genau so zu behandeln wie die echten Ableitungssymbole. Ist  $\partial_6 = 0$ , so tritt eine weitere Reduzibilität ein. In der irreduziblen Wellengleichung ist dann  $\psi_{\alpha\beta\gamma\dots}$  ein Undor, dessen sämtliche Schiefspuren verschwinden und der im übrigen wie vorhin durch ein Tableau festgelegt ist.

Eine Spinorschreibweise der Undorwellengleichung (106), d. h. eine Zerlegung des Undors in zwei Doppelspinoren (§ 4 Ziff. 3) ist möglich, verbessert jedoch die Übersichtlichkeit nicht.

Wir behandeln ein einfaches Beispiel: Der schiefsymmetrische Undor II. Stufe (er gehört zur Darstellung  ${}^4\text{SL} (1100)$ ) ergibt in (106) folgendes Wellengleichungssystem:

$$(107) \quad \left\{ \begin{aligned} & (\kappa + 2 \partial_6) \psi_{12} - \partial_1^3 \psi_{23} - \partial_1^4 \psi_{24} + \partial_2^3 \psi_{13} + \partial_2^4 \psi_{14} = 0 \\ & (\kappa - 2 \partial_6) \psi_{34} - \partial_4^2 \psi_{23} + \partial_3^2 \psi_{24} - \partial_4^1 \psi_{13} + \partial_3^1 \psi_{14} = 0 \\ & \kappa \psi_{13} - \partial_1^4 \psi_{34} + \partial_3^2 \psi_{12} = 0 \\ & \kappa \psi_{24} + \partial_2^3 \psi_{34} - \partial_4^1 \psi_{12} = 0 \quad \text{usw.} \end{aligned} \right.$$

Ist im Lubanski-Fall  $\partial_6 = 0$ , so werden die beiden ersten Gleichungen identisch und es ergibt sich von selbst die Nebenbedingung  $\psi_{12} - \psi_{34} = 0$ .

Das Gleichungssystem wird also auf ein fünfkomponentiges reduziert. Man sollte erwarten, daß es wegen der Isomorphie

${}^4\text{Sp}(11) = {}^5\text{O}(10)$  mit dem Kemmer-Gleichungssystem der „skalaren“ Mesonentheorie (vgl. Bopp und Bauer 1949) übereinstimmt. In der Tat ergeben sich mit

$$(108) \quad \psi_{12} = \psi_{34} = \psi_0;$$

$$(109) \quad \psi_{13} - \psi_{24} = i\psi_1 \text{ usw.}$$

die bekannten Gleichungen (Kemmer 1939)

$$(110) \quad \kappa\psi_0 + \partial_\mu\psi_\mu = 0$$

$$\kappa\psi_\alpha + \partial_\alpha\psi_0 = 0.$$

In einer vorangehenden Arbeit wurde bemerkt, daß die Darstellung  ${}^6\text{O}(110)$  eine Verkopplung von skalarer und vektorieller Mesonentheorie, wie sie dem Ansatz von Møller und Rosenfeld 1940 entspricht, mit sich bringt (Lubanski und Rosenfeld 1942). Die zugehörige Wellengleichung benötigt in der Undorschreibweise, der Isomorphie  ${}^6\text{O}(110) \cong {}^4\text{SL}(2110)$  entsprechend, einen Undor IV. Stufe (sie würde sich also erst in der vierten Broglieschen Verschmelzungsstufe finden). Hier ist jedoch zu beachten, daß die  ${}^4\text{SL}(2110)$  sich ebensogut als  ${}^4\text{SL}(100-1)$  schreiben läßt und als Substrat den gemischten Tensor II. Stufe hat, entsprechend der Verschmelzung

$${}^4\text{SL}(000-1) \times {}^4\text{SL}(1000) = {}^4\text{SL}(100-1) \dot{+} {}^4\text{SL}(0000).$$

Der Vorteil geringerer Tensorstufenhöhe, den man im allgemeinen bei Verwendung gemischter Undoren genießt, wird jedoch meist durch kompliziertere ausreduzierende Bedingungen wieder aufgehoben.

Nach den Isomorphismen (37) entspricht der ebenerwähnten Mischung ko- und kontravarianter Undoren die „gemischte“ Verschmelzung der zueinander konjugierten Darstellungen  ${}^6\text{O}(\frac{1}{2} \frac{1}{2} \frac{1}{2})$  und  ${}^6\text{O}(\frac{1}{2} \frac{1}{2} -\frac{1}{2})$ . In Spezialfällen, wie in dem vorangehenden Beispiel, wird man diese Möglichkeit der Gewinnung höherer Darstellungen mit Vorteil benützen. Für die allgemeine Behandlung kommt man jedoch ohne gemischte Undoren aus.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> In der Repräsentation (101) unterscheiden sich die beiden konjugierten Darstellungen nur im Vorzeichen der Basismatrix  $\gamma_5$ . In der elementaren Fu-

### § 8. Wellengleichungen, deren Wellenfunktionen einen Tensor bilden

1. Durch fortgesetzte Verschmelzung von Darstellungen  ${}^5O(10)$  erhält man zufolge Formel (91) alle ganzzahlig bezifferten Darstellungen der  ${}^5O$ , d. h. alle Darstellungen mit ganzzahligen Eigenwerten. Eine für unseren Zweck brauchbare Matrizenrepräsentation der  ${}^5O(10)$  ergibt sich, wenn man sich, dem Zerfall  ${}^6O(11) \rightarrow {}^5O(11) \dagger {}^5O(10)$  entsprechend, innerhalb der adjungierten Darstellung der  ${}^6O$  auf die zerfallende Darstellung der Elemente  $\beta_{ik}$  ( $i, k = 1 \dots 5$ ) im Raum der Elemente  $\beta_{l6}$  beschränkt. Man erhält durch eine einfache Diagonaltransformation die bekannten fünfreihegen Kemmerschen Matrizen und daraus die schon notierten Kemmerschen Gleichungen (Gl. 110).

Die  $M$ -fache Verschmelzung der Kemmermatrizen mit sich selbst ergibt aus Gl. (102) (mit  $\partial_6 = 0$ ) das Wellengleichungssystem

$$\begin{aligned}
 (111) \quad & \times \psi_{ikh l \dots n} + \partial_i \psi_{0k l \dots n} + \partial_k \psi_{i0 l \dots n} + \dots + \partial_n \psi_{ikh l \dots 0} = 0 \\
 & \times \psi_{0k l \dots n} + \sum_{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\mu k l \dots n} + \partial_k \psi_{00 l \dots n} + \dots + \partial_n \psi_{0k l \dots 0} = 0 \\
 & \times \psi_{00 l \dots n} + \sum_{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\mu 0 l \dots n} + \sum_{\nu} \partial_{\nu} \psi_{0\nu l \dots n} + \partial_n \psi_{00 l \dots 0} = 0 \\
 & \text{usw.}
 \end{aligned}$$

$\psi_{ikh l \dots n}$  ist ein Tensor  $M$ -ter Stufe. Die Indizes 0 sind im geometrischen Transformationsverhalten bedeutungslos, sie dienen nur zur Erleichterung der Schreibweise. Die allgemeine Regel zur Bildung des Systems (111) kann so gefaßt werden: Jeder einzelne von Null verschiedene Index des Tensors ist durch Null zu ersetzen, der betreffende Index tritt an ein vorgesetztes Differentiationssymbol. Jeder einzelne Index Null aber ist durch den Laufindex einer Faltung mit  $\partial$  zu ersetzen.

sionsmethode aus Diracmatrizen wird also die gemischte Verschmelzung dadurch erzielt, daß man eine subtraktive Verschmelzung von der Form  $1 \times \gamma_5 - \gamma_5 \times 1$  durchführt. Innerhalb des Lubanski-Falles ist eine solche (vgl. Hönl und Boerner 1950 Anm. 2) jedoch überflüssig.

Es ergibt sich algebraisch aus dem ersten und dritten System, daß

$$(112) \quad -\psi_{00lm\dots n} + \sum_i \psi_{iilm\dots n} = 0 \text{ ist.}$$

Der Index Null spielt formal die Rolle einer fünften Koordinatennummer, alle Spuren des  $M$ -stufigen *fünfdimensionalen* Tensors  $\psi_{ikhlm\dots n}$  verschwinden, wie man es zu erwarten hat. Ausreduziert wird das System (111) ferner durch die Symmetriebedingungen eines Tableaus, die auf die fünf Koordinatennummern der Indizes anzuwenden sind.

Beispielsweise erhält man die Kemmerschen zehnkomponentigen Wellengleichungen des vektoriiellen Mesons sofort, wenn man als Wellenfunktionen die Komponenten eines schiefssymmetrischen Tensors II. Stufe im Fünfdimensionalen (entsprechend der Darstellung  ${}^5O(11)$ ) vorschreibt. Ein anderes Beispiel ist das folgende vierzehnkomponentige Wellengleichungssystem, das zum Maximalspin Zwei gehört (vgl. § 9), und lautet

$$(113) \quad \begin{aligned} \kappa \psi_{ih} + \partial_i \psi_h + \partial_h \psi_i &= 0 \\ \kappa \psi_l + \sum_{\mu} \partial_{\mu} \psi_{\mu l} + \partial_l \sum_{\nu} \psi_{\nu \nu} &= 0. \end{aligned}$$

$\psi_{ih}$  ist dabei ein symmetrischer Tensor II. Stufe, die dazugehörige Darstellung ist die als  ${}^5O(20)$  bezeichnete. Die angeführten Überlegungen kann man ohne weiteres auf den von Bopp eingeführten Fall übertragen, wo Basismatrizen aus der  ${}^6O$  verwendet werden (vgl. § 5 Ziff. 4). Spezialfälle solcher Gleichungen, in denen Verkopplungen der eben diskutierten Systeme (111) auftreten, wurden schon früher angegeben (Bopp und Bauer 1949).

2. Mit dem Tensor-Wellengleichungssystem (111) umfaßt man nur die Hälfte aller möglichen, durch das Undorsystem (106) beschriebenen Wellengleichungen; diejenigen nämlich, die aus ganzzahlig bezifferten Darstellungen entspringen. Es ist nun möglich, die restlichen Wellengleichungen von halbzahlgiger Bezifferung ebenfalls in tensorieller Form anzuschreiben, wenn man in den einzelnen Tensorkomponenten quaternionische Elemente zuläßt.

Jede halbzahlrig bezifferte Darstellung  ${}^5O(m_1 m_2)$  kann zunächst aufgefaßt werden als der maximale Bestandteil einer Verschmelzung der ganzzahlrig bezifferten Darstellung  ${}^5O(m_1 - 1/2, m_2 - 1/2)$  und der Darstellung durch Diracmatrizen:

$$(114) \quad {}^5O(m_1 - 1/2, m_2 - 1/2) \times {}^5O(1/2, 1/2) = {}^5O(m_1 m_2) + \dots\dots$$

Aus den Wellengleichungen des vorigen Abschnitts mit Tensoren als Wellenfunktionen erhält man somit sofort neue Wellengleichungen, wenn man, der Verschmelzung

$$(115) \quad \beta_\mu = \beta_\mu^{(\text{ganzzahlrig})} \times 1 + 1 \times \gamma_\mu$$

entsprechend, in (111) überall

$$(116) \quad \kappa \rightarrow (\kappa + \gamma_\mu \partial_\mu)$$

ersetzt. Das Gleichungssystem ist dann aufzufassen als Tensorwellengleichungssystem über der Dirac-Algebra oder, was auf das gleiche hinauskommt, über einem Quaternionenring.

Dem Zerfall (114) entsprechend, wird eine Reduzibilität des neuentstandenen Systems stets eintreten (außer im trivialen Fall  $m_1 = m_2 = 1/2$ ). Offensichtlich hängt das damit zusammen, daß durch die Adjunktion des Vierervektors  $\gamma_i$  die Bildung neuer Invarianten ermöglicht wird.

Wir haben in einer kurzen Note (Bauer 1949b) an einigen Beispielen zeigen können, von welcher Art die neu auftretenden, ausreduzierenden Bedingungen sind. Wir erhielten aus den fünfkomponentigen Kemmergleichungen das dortige System (4)

$$(117) \quad \begin{aligned} \partial_\mu \psi_\mu + (\kappa + \gamma_\mu \partial_\mu) \psi_0 &= 0 \\ \partial_\alpha \psi_0 + (\kappa + \gamma_\mu \partial_\mu) \psi_\alpha &= 0 \end{aligned}$$

mit der Nebenbedingung (4a)

$$(118) \quad \psi_0 = \gamma_\mu \psi_\mu,$$

also mit viermal vier wesentlichen Komponenten.

Aus der zehnkomponentigen Kemmergleichung ergab sich das System (9)

$$(119) \quad \begin{aligned} \partial_\mu \psi_{\mu\alpha} + (\kappa + \gamma_\mu \partial_\mu) \psi_{0\alpha} &= 0 \\ \partial_\alpha \psi_{0\beta} - \partial_\beta \psi_{0\alpha} + (\kappa + \gamma_\mu \partial_\mu) \psi_{\alpha\beta} &= 0 \end{aligned}$$

mit den Nebenbedingungen (9b') und (9b''):

$$(120) \quad \sum_{\mu, \nu} \gamma_{\mu\nu} \psi_{\mu\nu} = 0$$

$$(121) \quad \psi_{0\alpha} = \gamma_{\mu} \psi_{\mu\alpha}$$

nebst der Bedingung der schiefen Symmetrie, also mit viermal fünf wesentlichen Komponenten.

Es fällt nun auf, daß die Bedingung (120) schiefspurartig ist (vgl. § 4 Ziff. 3) insofern, als sie ebenfalls nur bei schiefsymmetrischen Indexpaaren eine Einschränkung bedeutet. Es deutet sich also an, daß die symplektische Gruppe hier in sonderbarer Weise eine Rolle spielt.

Eine nähere Untersuchung dieses Umstandes ergibt das überraschende Ergebnis, daß die Anzahl der wesentlichen Tensor-Komponenten des Systems (abgesehen also vom Raum der Diracmatrizen) durch die Gradzahl der Darstellung  ${}^4\text{Sp}(m_1 - \frac{1}{2}, m_2 - \frac{1}{2})$  gegeben ist. Formel (76) ergibt nämlich dafür  $6N = (m_1 + m_2 + 2) \cdot (m_1 - m_2 + 1) \cdot \left(m_1 + \frac{3}{2}\right) \cdot \left(m_2 + \frac{1}{2}\right)$ ; multipliziert mit 4 (wegen der jeweiligen vier Komponenten der Diracmatrizen) ergibt dies aber gerade die Formel (75) für den Darstellungsgrad der  ${}^5\text{O}(m_1 m_2)$ . Die Anzahl der wesentlichen Tensor-Komponenten des Systems stimmt also überein mit der Anzahl von Komponenten eines irreduziblen Substrats der symplektischen Gruppe.<sup>1</sup> Eine andere symplektische Invariante als die schiefspurartige vom Typus (120) steht nicht zur Verfügung. Eine irreduzible Wellengleichung von der eben behandelten *quaternionisch-tensoriellen* Form hat also als Wellenfunktionen die Komponenten eines nach (120) *symplektisch* verjüngten vierdimensionalen *Tensors*. Diejenigen vierdimensionalen Tensoren, die im Ausgangssystem (111) einen Index Null tragen, sind durch Bedingungen von der Art (118), (121) usw. eliminiert.

---

<sup>1</sup> Auch die Charakteristiken der  ${}^5\text{O}$  lassen multiplikativ die Charakteristik der  ${}^5\text{O}(\frac{1}{2} \frac{1}{2})$  abtrennen. Dies hat jedoch nichts zu tun mit der in Bopp und Bauer 1949, Gl. 80 erwähnten sog. Abspaltung. Auch die früher diskutierte Isomorphie  ${}^5\text{O} \cong {}^4\text{Sp}$  hat mit dem hier auftretenden Umstand keine direkte Beziehung.

### § 9. Schlußdiskussion

1. Wir kehren zurück zur ursprünglichen Matrixwellengleichung (1).<sup>1</sup> Die Basismatrizen  $\beta_i$  der Wellengleichung sind nach dem Ergebnis des Teils I vier Matrizen  $\beta_i \equiv \beta_{i5}$ , die der Lie-Algebra (94) gehorchen, oder sie zerfallen in solche. Man rechnet unmittelbar nach, daß der Operator

$$(122) \quad J_{ih} = \beta_{ih} + (x_i \partial_h - x_h \partial_i)$$

mit dem Wellengleichungsoperator  $K$  vertauschbar ist. Der in nicht-relativistischer Näherung vornehmlich interessierende räumliche Anteil  $\vec{J} \equiv (J_{23} J_{31} J_{12})$  ist der Gesamtdrehimpuls-Operator,  $\vec{\beta} \equiv (\beta_{23} \beta_{31} \beta_{12})$  ist dann der innere Drehimpuls, der Spin in der Einheit  $\hbar$ .

Lorentzinvariante Wellengleichungen erster Ordnung, wie wir sie betrachten wollten, sind also notwendig Wellengleichungen für Spinpartikel. Die Matrizen  $\beta_{ih}$  hängen andererseits (vgl. § 4) eng mit dem Transformationsverhalten der Wellenfunktionskomponenten zusammen. Innerhalb unserer Voraussetzungen ist der Spin also nur eine Begleiterscheinung zum Undor- oder Tensorcharakter der Wellenfunktionen. Das schließt allerdings nicht aus, daß sein dynamisches Wesen tiefer liegt.

Da es bei halbeinfachen Algebren nach den Untersuchungen von van der Waerden und Weyl (a. a. O.) keine anderen Eigenwerte als Multipla von  $\frac{1}{2}$  gibt, würde auch eine geometrische Erweiterung der Lorentzgruppe außer ganzem und halb ganzem Spin nichts Neues bringen können, wenigstens solange man die Allgemeingültigkeit *einer* Spinkonstanten  $\hbar$  nicht anzweifelt.

Das Spin- und Massenspektrum einer Wellengleichung vom Lubanski-Typus ist bei Lubanski 1942 ziemlich erschöpfend diskutiert. Es ergibt sich als Wichtigstes, daß eine Darstellung  ${}^5O(m_1 m_2)$  zu einer Wellengleichung führt, die mitunter mehrere Spin-Anregungszustände des kräftefreien Teilchens (der ebenen Welle) ergibt, alle ganz oder halbganz bis höchstens zum Spin-

---

<sup>1</sup> Durch Rückübersetzung der in Komponenten aufgelösten, ausreduzierten Systeme.

betrag  $m_1$ . Jedoch muß dieser „Maximalspin“ nicht immer vorkommen. Die Gründe für die möglichen Ausnahmen zeigen sich schon bei den Darstellungen  ${}^5\text{O}(10)$  und  ${}^5\text{O}\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$ .

Erstere führt auf die skalare Kemmergleichung. Ebene Wellen vom Spin 1 würden zu Teilchen „von unendlicher Masse“ gehören (vgl. Lubanski 1942 p. 316), sind also physikalisch auszuschließen.

Bhabha (Bhabha 1945) hat darauf hingewiesen, daß bei der Darstellung  ${}^5\text{O}\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$  und allgemeiner bei jeder Darstellung  ${}^5\text{O}\left(\frac{s}{2} \frac{1}{2}\right)$  zur kleinsten Masse (dem Grundzustand der Massenanregung) nur der Spin  $\frac{1}{2}$  gehört. Das bedeutet insbesondere, daß nichtrelativistisch die Wellengleichung von Bhabha zur Darstellung  ${}^5\text{O}\left(\frac{3}{2} \frac{1}{2}\right)$  mit der Diracgleichung in erster Näherung übereinstimmt. Da auch der Spin nur nicht-relativistisch einer experimentellen Messung direkt zugänglich ist, glaubt Bhabha, seine Gleichung dem Proton zuschreiben zu können. Nach Hönl und Boerner 1950 ist allerdings das magnetische Moment des Protons damit allein sowenig verständlich wie mit der Diracgleichung. Dies ist weiter nicht verwunderlich, da das magnetische Moment des Protons und des Neutrons weitgehend von Mesonenmissions- und -reabsorptions-Prozessen bestimmt wird. Es erhebt sich aber die Frage, ob nicht Bhabhas Gleichung eine bessere Anpassung der Konstanten der Mesonentheorie erlaubt.

Sicherer als der Spin einiger in neuester Zeit entdeckter Elementarteilchen ist deren Masse bekannt. Für den Lubanski-Fall ergibt sich theoretisch, daß die Massen in den möglichen Anregungsstufen in einfachen rationalen Verhältnissen (wie 1:3 bei Bhabhas Gleichung) stehen sollen. Der experimentelle Befund gibt dem immer deutlicher Unrecht. Verkopplungen von Wellengleichungen, wie sie Möller und Rosenfeld in der kombinierten Mesonentheorie eingeführt haben und wie sie von Bopp aus der Feldmechanik her legalisiert worden sind, könnten möglicherweise auch die anscheinend nicht einfach-rationalen Massenverhältnisse bei den Elementarteilchen erklären. Zu einer einigermaßen eindeutigen Bestimmung einer das Massenspektrum regelnden Funktion (wie  $F(\beta_6)$  in Gl. (101)) oder der daraus folgen-

den Wechselwirkungsglieder ist weder das experimentelle Material ausreichend noch ein theoretischer Ansatz bekannt.

Während man es einerseits für eine gewisse Bestätigung der bisherigen Theorie der Spinwellengleichungen halten kann, daß sie die bewährte Diracgleichung und die brauchbaren Kemmergleichungen einschließt und die Erfahrung über die Halb- oder Ganzzahligkeit des Spins richtig wiedergibt, ist es andererseits anscheinend noch nicht möglich, höhere Spinwellengleichungen der von uns behandelten Art mit der Erfahrung zu konfrontieren. Insbesondere ist schwer zu sehen, wie für die Vielzahl von Teilchen mit dem Spin  $\frac{1}{2}$  (Elektron, Proton, Neutron,  $\mu$ -Meson, Neutrino) eigene Wellengleichungen auswählbar sein sollen.

2. Die Wellenquantelung der behandelten Spinwellengleichungen erfordert zunächst, wie gewöhnlich, die Angabe von Lagrangefunktion und symmetrisiertem Energie-Impuls-Tensor. Die Herleitung kann dem Vorgehen bei der Kemmergleichung (vgl. den Bericht Pauli 1941) nachgebildet werden. Die Symmetrisierung des Energie-Impuls-Tensors hat Belinfante vollends aufgeklärt (vgl. die zusammenfassende Arbeit Kramers, Belinfante und Lubanski 1941). Man wird bei der Definition der adjungierten Wellengleichung und der adjungierten Wellenfunktion auf die Aufgabe geführt, eine Matrix  $\eta_4$  zu bestimmen, die die Raumspiegelung liefert, d. h. die involutorisch ist:  $\eta_4^2 = 1$  und mit  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  schiefvertauschbar, mit  $\beta_4$  jedoch vertauschbar ist,

$$(123) \quad \begin{aligned} \beta_i \eta_4 &= -\eta_4 \beta_i & (i = 1, 2, 3) \\ \beta_4 \eta_4 &= +\eta_4 \beta_4. \end{aligned}$$

$\psi^+ \equiv \psi^* \eta_4$  ist dann die adjungierte Wellenfunktion, der Erwartungswert des Operators  $O$  wird  $\psi^+ O \psi = \psi^* \eta_4 O \psi$ . Offensichtlich trägt man mit dieser Kovariantenbildung der indefiniten Metrik der Lorentzgruppe Rechnung. Madhava Rao und Mitarbb. 1946 haben die allgemeinere Algebra von (vier) Elementen  $\eta_i$  untersucht, die den Bedingungen

$$(124) \quad \begin{aligned} \eta_i^2 &= 1 \\ \eta_i \beta_k + \beta_k \eta_i &= 0 & (i \neq k) \\ \eta_i \beta_k - \beta_k \eta_i &= 0 & (i = k) \end{aligned}$$

genügen. Es ergibt sich, daß  $\eta_i$  ein Polynom vom Grad  $2m_1$  ist:  $\eta_i = P(\beta_i)$ , wo  $P(x)$  durch die Interpolationsaufgabe

$$(125) \quad \begin{aligned} P(m_1) &= -P(m_1 - 1) = P(m_1 - 2) = \\ &= -P(m_1 - 3) = \dots = 1 \end{aligned}$$

definiert ist.

Insbesondere erhält man

$$\begin{aligned} \text{für } m_1 &= \frac{1}{2} \quad (\text{Diracgleichung}) & \eta_4 &= \gamma_4 \\ m_1 &= 1 \quad (\text{Kemmergleichungen}) & \eta_4 &= 2\beta_4^2 - 1 \\ m_1 &= \frac{3}{2} \quad (\text{Bhabhas Gleichung}) & \eta_4 &= \frac{4}{3}\beta_4^3 - \frac{7}{3}\beta_4. \end{aligned}$$

Die Durchführung des kanonischen Formalismus und der Wellenquantelung bieten somit auch im allgemeinen Fall keine besonderen Schwierigkeiten. In der algebraischen Behandlung mag es noch Vereinfachungen geben.

Die grundsätzliche Diskussion durch die Arbeiten von Belinfante und Kramers (a. a. O.) sowie neuerdings Bhabha 1945 und Harish-Chandra 1948 läßt jedoch eine ernste Schwierigkeit erkennen. Die physikalisch selbstverständlich erscheinende Forderung, daß die Feldenergie, d. h. die Komponente  $\Theta_{44}$  des symmetrisierten Energie-Impuls-Tensors, positiv sein müsse, ist nicht ohne weiteres erfüllt. Man kann sie umgehen durch eine Löchertheorie wie bei der Diracgleichung, wenn wenigstens die Ladung dann positiv-definit ist. Auch dies ist nicht mehr möglich, sobald der Spin  $\geq 3/2$  ist, wie bekanntlich schon Kemmer bemerkt hat.

Man kann allerdings durch Einschränkungen und zusätzliche Annahmen diese Schwierigkeiten ausschalten, wie z. B. in der ursprünglichen Theorie von Dirac, Fierz und Pauli (Dirac 1936, Fierz 1939, Pauli und Fierz 1939, Fierz und Pauli 1939). Innerhalb unserer allgemeinen Wellengleichungen betrifft diese den Spezialfall vollständig symmetrischer Undoren, d. h. von Matrizen der Darstellung  ${}^5\text{O}(m, m)$ . Außerdem sind durch eine Klein-Gordon-Gleichung  $(\partial_\mu \partial^\mu + \kappa^2) \psi = 0$  nur Lösungen von der kleinsten Masse zugelassen.<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Einen völlig anderen Weg hat Le Couteur eingeschlagen (Le Couteur 1949) unter Verwendung der Diracschen indefiniten Metrik im Hilbertraum (Dirac 1942).

Zusammenfassend ist zu sagen: Man hat nicht nur vorerst noch Schwierigkeiten bei der konkreten Zuordnung von empirischen Elementarteilchen und höheren Spinwellengleichungen, sondern auch solche, die aus der theoretischen Behandlung der letzteren selbst entstehen. Möglicherweise haben die von uns diskutierten Wellengleichungen nicht ganz die übliche Bedeutung von klassischen Spinpartikel-Wellengleichungen. Eine neue Deutung könnte mit einer Kritik und schärferen Fassung des Begriffs Elementarteilchen einhergehen.

Herrn Prof. Bopp darf ich für sein unermüdliches Interesse an der vorliegenden Arbeit, für manche Anregung und zahlreiche nützliche Diskussionen danken. Herrn Prof. Weyl in Zürich bin ich für wertvollen Literaturhinweis Dank schuldig.

### Anhang I. Lie-Algebren

Sei  $K$  ein Körper und  $A$  ein Vektorraum (endlicher Dimension) über  $K$ . Durch eine mit  $[ ]$  bezeichnete Verknüpfung der Elemente  $X \in A$  entsteht ein hyperkomplexes System. Es wird Lie-Algebra genannt, wenn folgende Gesetze erfüllt sind:

$$(L) \quad [a_1 X_1 + a_2 X_2, Y] = a_1 [X_1 Y] + a_2 [X_2 Y],$$

desgl. von rechts (Axiom der Linearität)

$$(S') \quad [XX] = 0 \quad (\text{Axiom der Nilpotenz})$$

$$(S'') \quad [XY + YX] = 0 \quad (\text{Axiom der Schiefkommutativität})$$

$$(J) \quad [[XY]Z] + [[YZ]X] + [[ZX]Y] = 0$$

(Jacobisches Axiom).

Die Axiome (S') und (S'') sind gleichwertig.

Lie-Algebren sind: Dreidimensionale Vektoren hinsichtlich des Vektorproduktes, kanonische Variable hinsichtlich der Poissonklammern, quantenmechanische Größen hinsichtlich der Minusvertauschungsklammern, ein System von Dirac- oder Kemmermatrizen hinsichtlich des Kommutatorproduktes.

Zu jeder abstrakten Lie-Algebra gibt es unmittelbar eine Darstellung durch lineare Transformationen (eine Matrizendarstellung). Sei  $\{X_i\}$  eine lineare Basis der Lie-Algebra, so ist für jedes

$Y \in \mathbf{A}$  nach der Verknüpfungstafel  $[YX_i] = \sum_k a_{ik}(Y)X_k$  bekannt. Durch die Zuordnung  $Y \rightarrow a_{ik}(Y)$  bekommt man die sog. adjungierte Darstellung, deren Grad gleich der Dimension der Algebra ist.

Nach den Axiomen (J) und (S'') ist

$$[[YZ]X_i] = [Y[ZX_i]] - [Z[YX_i]].$$

Man sieht, daß der abstrakten Verknüpfung  $[ ]$  zwangsläufig das Kommutatorprodukt der adjungierten Matrizen entspricht. Umgekehrt ist jedes System von quadratischen Matrizen gleichen Grades hinsichtlich des Kommutatorproduktes von selbst eine Lie-Algebra, sobald es nur abgeschlossen ist (sobald also kein Kommutatorprodukt aus dem System herausführt). Die Axiome sind trivialerweise erfüllt.

Z. B. ist jeder volle Matrixring ohne das Einselement Lie-Algebra hinsichtlich des Kommutatorproduktes. Da der Grad  $n$  der Matrizen mit der Dimension  $n^2 - 1$  der Algebra nicht übereinstimmt, handelt es sich nicht um eine adjungierte Darstellung. Es gibt also noch andere Darstellungen als diese.

## Anhang II. Vollreduzible und halbeinfache Algebren

1. Sei  $\{X_i\} = (X_1 X_2 \dots X_p)$  eine willkürliche lineare Basis einer Lie-Algebra  $\mathbf{A}$  von der Dimension  $p$  („von  $p$  Parametern“). Das allgemeine Element  $t$  ist dann mit Hilfe dieser Basis von der Form

$$(i) \quad t \equiv \sum_k \sigma_k X_k.$$

Dem üblichen Vorgehen bei der Diskussion von Vektorräumen entsprechend, sucht man zunächst eine normale Basis auf mittels eines Säkularproblems.

Nach der Verknüpfungstafel kennt man die adjungierte Darstellung  $(T_{ik})$  von  $t$ .

$$(ii) \quad [tX_i] = \sum_h T_{ih} X_h.$$

Die Nullstellen  $\alpha_i$  des Säkularpolynoms

$$(iii) \quad \det (T_{ik} - \alpha \delta_{ik})$$

heißen die Wurzeln des allgemeinen Elements  $t$ . Sie sind von der Basiswahl unabhängig und geben so die inneren Eigenschaften der Algebra wieder. Es gibt dann zur  $\nu_{\alpha_i}$ -fach entarteten Wurzel  $\alpha_i$  einen Raum von der Dimension  $\nu_{\alpha_i}$ , der durch  $(T_{ik})$  in sich abgebildet wird. Es ist zunächst nicht gesagt, daß alle Räume von solcher Art eindimensional sind (daß es lauter „Eigenvektoren“ gibt). Es können die aus der Elementarteilertheorie bekannten nicht-vollreduziblen Fälle auftreten.

Von einem Element, das in einem zur Wurzel  $\alpha_i$  gehörigen invarianten Teilraum liegt, sagen wir, es gehöre zur Wurzel  $\alpha_i$ .

Für das weitere einschneidend ist der Hilfssatz (Weyl 1925 p. 357):

Gehört  $e_\alpha$  zur Wurzel  $\alpha$ ,  $e_\beta$  zur Wurzel  $\beta$ , so gehört  $[e_\alpha e_\beta]$  zur Wurzel  $\alpha + \beta$ . Darunter soll insbesondere auch verstanden sein, daß  $[e_\alpha e_\beta]$  verschwindet, falls  $\alpha + \beta$  keine Wurzel ist.

Der Beweis ist im vollreduziblen Fall nach der Identität

$$[t [e_\alpha e_\beta]] = [[t e_\alpha] e_\beta] + [e_\alpha [t e_\beta]]$$

ersichtlich.

Der Hilfssatz bewirkt:

1) Die zur Wurzel Null gehörigen Elemente bilden eine mit  $H$  bezeichnete Unteralgebra innerhalb  $A$ ;  $H \subset A$ , deren Dimension  $\nu$  gleich der Entartung  $\nu_0$  des Eigenwertes Null ist.  $t$  selbst gehört immer zur Wurzel Null, da  $[tt] = 0$ . Mit Hilfe einer beliebigen Basis  $\{h_i\} = (h_1 \equiv t, h_2 \dots h_\nu)$  wird das allgemeine Element von  $H$

$$(iv) \quad h = \sum_i \lambda^i h_i.$$

$H$  ist i. a. kein Ideal (keine invariante Unteralgebra) von  $A$ :  $h$  ergibt mit einem nicht zur Wurzel Null gehörigen Element stets ein Element aus dem Raum dieser Wurzel, also nur aus  $H$ , wenn es verschwindet. Genauer gilt:

2) Die Abbildung

$$(v) \quad [h e_\alpha^i] = \sum_{k=1}^{\nu_\alpha} H_{ik} e_\alpha^k$$

läßt jeden der zu den verschiedenen Wurzeln gehörigen Teilräume invariant. Die Basis  $\{e_\alpha^i\}$  kann so gewählt werden, daß  $H_{ih}$  Dreiecksmatrix wird, mit lauter gleichen Diagonalelementen  $\alpha$ . Die durch das Säkularproblem gefundene, zu  $t$  gehörige normale Basis ist also gleichzeitig normale Basis für die ganze Unteralgebra  $H$ . Die Auszeichnung des Elements  $t$  ist nicht länger aufrechtzuerhalten. An seine Stelle tritt die Unteralgebra  $H$  der Elemente, die zur identisch verschwindenden Wurzel gehören.

Der klassischen Interpretation folgend, tritt nun auch im Begriff Wurzel eine kleine Bedeutungsverschiebung ein. Es wird darunter fernerhin nicht mehr eine Wurzel des allgemeinen Elements  $t$  allein verstanden, sondern eine *nicht verschwindende* Wurzel des *allgemeinen* Elements  $h$  aus  $H$ . Die Wurzeln sind dementsprechend jetzt als Nullstellen des Säkularpolynoms

$$(vi) \quad \det (H_{ih} - \alpha \delta_{ih})$$

Linearformen in den Variablen  $\lambda^i$  (ihre weitere Abhängigkeit von den Variablen  $\sigma$  ist uninteressant geworden, da sie allein die willkürliche Basiswahl besagt).

2. Die unter 2) genannten Eigenschaften sind nach Lie (vgl. Weyl 1925 p. 358) als notwendige Bedingungen für sogenannte auflösbare Algebren bekannt.

Die übliche Definition einer auflösbaren Algebra benützt den Begriff der abgeleiteten Algebren. Die Ableitung  $\Gamma'$  einer Algebra  $\Gamma$  ist die Unteralgebra aller Elemente, die Ergebnis von Verknüpfungen sind, also von der Form  $[X_i X_k]$  sind. Jede abgeleitete Algebra ist ein Ideal der abzuleitenden, allenfalls diese selbst oder das Nullideal.

Eine Algebra heißt auflösbar, wenn die Reihe fortgesetzter Ableitungen bis zum Nullideal führt und nicht früher die endlose Wiederholung eines Ideals auftritt. Eine andere Kennzeichnung ist die, daß eine Reihe von sukzessiven Idealen existiert, so daß jeweils die Dimension um 1 sinkt (vgl. Weyl 1925 p. 354).

Nach einem Satz von Engel (vgl. Weyl 1925 p. 358) sind die Bedingungen 2) auch hinreichend für die Auflösbarkeit von  $H$ . Insbesondere sind sie aber für nicht zu  $H$  gehörige Elemente aus  $A$  nach dem Hilfssatz verletzt.  $H$  ist also die maximale auflösbare Unteralgebra von  $A$ .

3. Weitgehende Vereinfachungen ergeben sich, wenn das allgemeine Element der adjungierten Darstellung vollreduzibel ist. Es existieren dann  $p$  Eigenvektoren. In diesen Eigenvektoren als Basis ergibt sich für alle Elemente aus  $H$  eine vollreduzible und damit diagonale Darstellung. Sie sind also vollständig untereinander vertauschbar hinsichtlich gewöhnlicher Matrizenmultiplikation und sogar hinsichtlich des Kommutatorproduktes, also ist die Lie-Algebra  $H$  abelsch. Alle Kommutatoren der Form  $[h_i, h_r]$  verschwinden,  $H'$  ist bereits das Nullideal.

Schärfer gilt im Fall vollreduzierbarer adjungierter Darstellung, allenfalls für die Restklassenalgebra nach dem Zentrum, die abstrakte Bedingung:

(H) Es gibt kein auflösbares Ideal.

Das Zentrum, d. h. das Ideal aller Elemente, die mit sämtlichen Algebrenelementen vertauschbar sind, ist, falls vorhanden, trivialerweise auflösbares Ideal; aber die adjungierte Darstellung ist dann verkürzt: Sie ist eine Nulldarstellung im Raum des Zentrums, wobei die Zentrumselemente identisch durch Null dargestellt werden. Sie ist damit im wesentlichen die Darstellung der Restklassenalgebra nach dem Zentrum.

Die Bedingung (H) wurde von der Lieschen Schule als notwendig und hinreichend für Algebren infinitesimaler geometrischer Transformationen erkannt. Lie-Algebren der Eigenschaft (H) werden halbeinfach genannt.

(H) ist auch hinreichend für die volle Reduzibilität aller Darstellungen (van der Waerden und Casimir 1935).

Gibt es überhaupt kein Ideal von  $A$ , so heißt  $A$  einfach. Der Name halbeinfach erklärt sich daraus, daß halbeinfache Algebren und nur diese in eine direkte Summe einfacher Algebren (eindeutig bis auf Reihenfolge) zerlegt werden können.

### Anhang III.

#### Zum Beweis der Verzweigungssätze und der Formeln für Darstellungsgrad und Charakteristiken

1. Zum Beweis der Verzweigungssätze: Beim Abbau  ${}^n\text{SL} \rightarrow {}^{n-1}\text{SL}$  gehen die Wurzeln  $\pm (\lambda^i - \lambda^n)$ ,  $i = 1 \dots n-1$  verloren, in den Eigenwertsätzen entfallen die letzten Kompo-

nenten. Eine Darstellung  ${}^n\text{SL}(F_1 \dots F_n)$  hat den maximalen Eigenwertsatz  $(F_1 \dots F_{n-1} F_n)$ . Beim Zerfall tritt sonach die Darstellung  ${}^{n-1}\text{SL}(F_1 \dots F_{n-1})$  auf und keine mit größerer Bezifferung. Man greife die zu dieser Darstellung gehörigen Eigenwertsätze heraus. Als verbleibender maximaler Eigenwertsatz kommt zunächst ein solcher in Frage, der mittels der verlorenen Wurzel  $\lambda^{n-1} - \lambda^n$  hätte erreicht werden können. Ist  $F_{n-1} > F_n$ , so gibt es den Eigenwertsatz  $(F_1 \dots F_{n-2}, F_{n-1} - 1)$  und die dazugehörige Darstellung, und zwar gerade einmal. Ferner gibt es alle Eigenwertsätze  $(F_1 \dots F_{n-2}, f_{n-1})$  mit  $f_{n-1}$  fallend bis einschließlich  $F_n$  und die entsprechenden Darstellungen.

Allenfalls verbleiben sodann als maximal der Reihe nach die Eigenwertsätze

$$(F_1 \dots F_{n-2} - 1, f_{n-1}), \quad F_{n-1} \geq f_{n-1} \geq F_n,$$

die mittels der verlorenen Wurzel  $\lambda^{n-2} - \lambda^n$  erreicht worden wären. Sie sind nur mehr vorhanden, falls  $F_{n-2} > F_{n-1}$  ist. Andernfalls ist  $(F_1 \dots F_{n-2} - 1, F_{n-1})$  Permutation eines schon aufgezählten Eigenwertsatzes und mit diesem herausgegriffen worden. Nach dieser Bemerkung kann also  $f_{n-2}$  (unabhängig von  $f_{n-1}$ ) auch nur zwischen  $F_{n-2}$  und  $F_{n-1}$  variieren. Die gleiche Argumentation wiederholt sich für alle übrigen Komponenten, dabei entsteht schließlich die Ungleichungsbedingung des Verzweigungssatzes für die lineare Gruppe.

Im Falle der orthogonalen Gruppe ist nur eine leichte Abänderung des vorhergehenden Beweises notwendig. Beim Abbau  ${}^{2\nu+1}\text{O} \rightarrow {}^{2\nu}\text{O}$  entfallen die Wurzeln  $\pm \lambda^i$ . Mittels der Wurzel  $\lambda^\nu$  hätte man die Eigenwertsätze  $(M_1 \dots M_{\nu-1}, m_\nu)$  erhalten, wo  $m_\nu$  von  $M_\nu$  bis  $-M_\nu$  läuft. Im übrigen überträgt sich die Beweisführung.

Beim Abbau  ${}^{2\nu}\text{O} \rightarrow {}^{2\nu-1}\text{O}$  entfallen die  $2\nu - 2$  Wurzelpaare  $\pm(\lambda^i + \lambda^\nu)$  und  $\pm(\lambda^i - \lambda^\nu)$  sowie die letzte Komponente der Eigenwertsätze. Neu treten auf die  $\nu - 1$  Wurzeln  $\pm \lambda^i$  ( $i = 1 \dots \nu$ ). Diese können nur die Hälfte der durch die alten Wurzeln vermittelten Übergänge bringen. Zu jedem Übergang, den sie bewirken, gehört ein gleicher zweiter, den sie nicht mehr vermitteln. Der Zerfall geht damit wie bei der linearen Gruppe vor sich, es resultiert die im Satz angegebene analoge Ungleichungsbedingung.

2. Zur Formel für den Darstellungsgrad: Induktionsbeweis: Die Formel ist richtig für  $n = 2$ , man hat dann offensichtlich  $f_1 - f_2 + 1 = l_1 - l_2$  Schritte, um von dem maximalen Eigenwortsatz  $(f_1, f_2)$  zu dem entgegengesetzten  $(f_2, f_1)$  zu gelangen. Dementsprechend ist der Darstellungsgrad  $l_1 - l_2$ , was übereinstimmt mit

$$\frac{l_1 - l_2}{1 - 0}.$$

Sei (67) richtig für die Dimension  $n$ . Nach dem Verzweigungssatz ist die Summe aller Ausdrücke (67), die der Ungleichungsbedingung genügen, d. h. für die

$$L_1 > l_1 \geq L_2 > l_2 \geq L_3 \dots L_n > l_n \geq L_{n+1}$$

ist, zu bilden. Der Zähler von (67) kann als Vandermondesche Determinante geschrieben werden:

$$\begin{vmatrix} l_1^{n-1} & l_1^{n-2} & \dots & l_1^2 & l_1 & 1 \\ l_2^{n-1} & l_2^{n-2} & \dots & l_2^2 & l_2 & 1 \\ l_3^{n-1} & l_3^{n-2} & \dots & l_3^2 & l_3 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ l_n^{n-1} & l_n^{n-2} & \dots & l_n^2 & l_n & 1 \end{vmatrix}.$$

Die Aufsummierung ergibt nach dem Sumpensatz der Determinantenrechnung, da alle zulässigen Interkombinationen der  $l_i$  genau einmal vorkommen,

$$\begin{vmatrix} (L_1-1)^{n-1} + (L_1-2)^{n-1} + \dots + L_2^{n-1}, & (L_1-1)^{n-2} + (L_1-2)^{n-2} + \dots + L_2^{n-2}, & \dots, & (L_1-1)^0 + \dots + L_2^0 \\ (L_2-1)^{n-1} + (L_2-2)^{n-1} \dots + L_3^{n-1}, & (L_2-1)^{n-2} + (L_2-2)^{n-2} + \dots + L_3^{n-2}, & \dots, & (L_2-1)^0 + \dots + L_3^0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (L_n-1)^{n-1} + (L_n-2)^{n-1} + \dots + L_{n+1}^{n-1}, & (L_n-1)^{n-2} + (L_n-2)^{n-2} + \dots + L_{n+1}^{n-2}, & \dots, & (L_n-1)^0 + \dots + L_{n+1}^0 \end{vmatrix}$$

---


$$D_n(n-1, n-2, \dots, 0).$$

Wir behaupten, daß dies der Ausdruck (67) für  $n^+ = n + 1$  ist. In der Tat: Erweitern wir den Quotienten, indem wir die erste Spalte der Zählerdeterminante mit  $n$ , die zweite mit  $n-1$  usw. multiplizieren, so erhalten wir im Nenner  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot ((n - (n-1)) \cdot D_n(n-1, \dots, 0) = D_{n^+}(n, n-1, \dots, 0)$ . Die Determinante im Zähler wird nunmehr aber unter Verwendung von

$$\rho \cdot \sum_{x=a}^b x^{\rho-1} = (b+1)^{\rho} - a^{\rho} + \alpha \{ (b+1)^{\rho-1} - a^{\rho-1} \} + \beta \{ \dots \} + \dots$$

und nach geeigneter Linearkombination der Spalten

$$\begin{vmatrix} L_1^n - L_2^n, & L_1^{n-1} - L_2^{n-1}, & \dots, & L_1 - L_2 \\ L_2^n - L_3^n, & L_2^{n-1} - L_3^{n-1}, & \dots, & L_2 - L_3 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_n^n - L_{n+1}^n, & L_n^{n-1} - L_{n+1}^{n-1}, & \dots, & L_n - L_{n+1} \end{vmatrix}$$

Wir rändern diese Determinante mit

$$\begin{array}{c|c} & 0 \\ & 0 \\ & \cdot \\ & \cdot \\ & 0 \\ \hline L_{n+1}^n, L_{n+1}^{n-1}, \dots, L_{n+1} & 1 \end{array}$$

und erhalten, indem wir zu jeder Zeile alle folgenden summieren, im Zähler gerade

$$\begin{vmatrix} L_1^{n^+ - 1}, & L_1^{n^+ - 2}, & & L_1, & 1 \\ L_2^{n^+ - 1}, & L_2^{n^+ - 2}, & & L_2, & 1 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ L_{n^+}^{n^+ - 1}, & L_{n^+}^{n^+ - 2}, & \dots & L_{n^+}, & 1 \end{vmatrix}$$

d. h. Zähler und Nenner von der verlangten Form.



Der einzige gegen Permutationen von  $n + 1$  Elementen  $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots \varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}$  invariante Ausdruck, der für  $\varepsilon_{n+1} \equiv 1$  die vorstehende Form annimmt, ist der Ausdruck (81) für die Dimension  $n$ , d. h. (81) gibt auch für  $n^+ = n + 1$  die Charakteristik. Insbesondere ergibt (81) für  $n = 2$  zur Darstellung  ${}^2\text{SL}(f_1, f_2)$  die Charakteristik

$$\varepsilon_1^{f_1} \varepsilon_2^{f_2} + \varepsilon_1^{f_1-1} \varepsilon_2^{f_2+1} + \dots + \varepsilon_1^{f_2} \varepsilon_2^{f_1},$$

deren Richtigkeit man elementar nachweist.

Die Rechnung kann für die  ${}^n\text{O}$  und die  ${}^n\text{Sp}$  in ähnlicher Weise geführt werden.

#### Anhang IV. Zum Beweis des Verschmelzungssatzes

${}^n\text{SL}(\infty \dots \infty)$  hat als Charakteristik  $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n$ . Als Produkt der Charakteristiken ergibt sich zunächst, wenn man jeweils  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$  in die erste, zweite, usw. Spalte multipliziert (Nenner fortgelassen),

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1+1} & \varepsilon_2^{l_1} & \dots & \varepsilon_n^{l_1} \\ \varepsilon_1^{l_2+1} & \varepsilon_2^{l_2} & \dots & \varepsilon_n^{l_2} \\ \varepsilon_1^{l_3+1} & \varepsilon_2^{l_3} & \dots & \varepsilon_n^{l_3} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{l_n+1} & \varepsilon_2^{l_n} & \dots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1} & \varepsilon_2^{l_1+1} & \varepsilon_3^{l_1} & \dots & \varepsilon_n^{l_1} \\ \varepsilon_1^{l_2} & \varepsilon_2^{l_2+1} & \varepsilon_3^{l_2} & \dots & \varepsilon_n^{l_2} \\ \varepsilon_1^{l_3} & \varepsilon_2^{l_3+1} & \varepsilon_3^{l_3} & \dots & \varepsilon_n^{l_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{l_n} & \varepsilon_2^{l_n+1} & \varepsilon_3^{l_n} & \dots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix} + \dots + \begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1} & \varepsilon_2^{l_1} & \dots & \varepsilon_n^{l_1+1} \\ \varepsilon_1^{l_2} & \varepsilon_2^{l_2} & \dots & \varepsilon_n^{l_2+1} \\ \varepsilon_1^{l_3} & \varepsilon_2^{l_3} & \dots & \varepsilon_n^{l_3+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{l_n} & \varepsilon_2^{l_n} & \dots & \varepsilon_n^{l_n+1} \end{vmatrix}.$$

Man greift nunmehr  $\varepsilon_1^{l_1+1}$  und den dazugehörigen Minor aus der ersten Determinante;  $\varepsilon_2^{l_2+1}$  samt Minor aus der zweiten Determinante usw. heraus. So erhält man die Determinante

$$\begin{vmatrix} \varepsilon_1^{l_1+1} & \varepsilon_2^{l_1+1} & \varepsilon_3^{l_1+1} & \dots & \varepsilon_n^{l_1+1} \\ \varepsilon_1^{l_2} & \varepsilon_2^{l_2} & \varepsilon_3^{l_2} & \dots & \varepsilon_n^{l_2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_1^{l_n} & \varepsilon_2^{l_n} & \varepsilon_3^{l_n} & \dots & \varepsilon_n^{l_n} \end{vmatrix},$$

die zu der ersten angegebenen Darstellung gehört. In gleicher Weise werden durch Umordnung die übrigen Charakteristiken-Determinanten hergestellt. Von den entstehenden Determinanten

Tabelle 2  
Isomorphie  ${}^4\text{SL} \cong {}^6\text{O}$

${}^6\text{O}$			${}^4\text{SL}$								$N$			
$m_1$	$m_2$	$m_3$	a)				b)							
			$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$	$f_1$	$f_2$	$f_3$	$f_4$				
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1		
1/2	1/2	1/2	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	4	
1/2	1/2	-1/2	1	1	1	0	0	0	0	0	0	-1	4	
1	0	0	1	1	0	0	0	$\left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 0 \end{array} \right.$	1	1	0	0	6	
1	1	0	2	1	1	0	0		1	0	0	-1		15
1	1	1	2	0	0	0	0	2	0	0	0	0	10	
1	1	-1	2	2	2	0	0	0	0	0	0	-2	10	
3/2	1/2	1/2	2	1	0	0	0	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$	2	1	0	0	20	
3/2	1/2	-1/2	2	2	1	0	0		1	0	-1	-1		20
3/2	3/2	1/2	3	1	1	0	0	2	0	0	-1	0	36	
3/2	3/2	-1/2	3	2	2	0	0	1	0	0	-2	0	36	
3/2	3/2	3/2	3	0	0	0	0	3	0	0	0	0	20	
3/2	3/2	-3/2	3	3	3	0	0	0	0	0	0	-3	20	
2	0	0	2	2	0	0	0	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right.$	2	2	0	0	20	
2	1	0	3	2	1	0	0		1	1	-1	-1		20
2	1	1	3	1	0	0	0		0	0	-2	-2		20
2	1	-1	3	3	2	0	0	$\left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 1 \end{array} \right.$	2	1	0	-1	64	
2	1	1	3	1	0	0	0		1	0	-1	-2		64
2	1	-1	3	3	2	0	0	$\left\{ \begin{array}{l} 3 \\ 2 \end{array} \right.$	3	1	0	0	45	
2	2	0	4	2	2	0	0		2	0	-1	-1		45
2	2	1	4	1	1	0	0	1	1	0	-2	0	45	
2	2	-1	4	3	3	0	0	0	0	-1	-3	0	45	
2	2	2	4	0	0	0	0	2	0	0	-2	0	84	
2	2	-2	4	1	1	0	0	3	0	0	-1	0	70	
2	2	2	4	3	3	0	0	1	0	0	-3	0	70	
2	2	2	4	0	0	0	0	4	0	0	0	0	35	
2	2	-2	4	4	4	0	0	0	0	0	0	-4	35	

a) Rein kovarianter (oder kontravarianter) Tensor bzw. Undor von kleinstmöglicher Stufe,

b) Gemischter Tensor bzw. Undor von kleinstmöglicher Stufe.

sind jedoch diejenigen identisch Null, in denen zwei Spalten übereinstimmen, dies tritt gerade dann auf, wenn  $l_i = l_{i+1} + 1$  bzw.  $m_i = m_{i+1}$ ; die Bezifferung der neuentstehenden Darstellung

${}^n\text{SL}(m_1, m_2, \dots, m_{i-1}, m_i, m_{i+1} + 1, m_{i+2}, \dots, m_n)$ , also gegen die Bedingung (29) verstoßen würde.

Die Charakteristikentheorie hat naturgemäß eine Anzahl schöner Beziehungen zur klassisch-algebraischen Theorie der symmetrischen Funktionen. So ist die Charakteristik der Darstellung  ${}^n\text{SL}(\underbrace{1 \dots 1}_k \ 0 \dots 0)$  die  $k$ -te elementarsymmetrische Funktion in  $n$  Variablen.

Tabelle 3

Einige Charakteristiken der  ${}^5\text{O}$  und  ${}^4\text{Sp}$ 

${}^5\text{O}$		$\chi =$	${}^4\text{Sp}$		$\chi =$
$m_1$	$m_2$		$n_1$	$n_2$	
0	0	1	0	0	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(\sqrt{\varepsilon_1} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}}) (\sqrt{\varepsilon_2} + \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_2}})$	1	0	$\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} = c_1 + c_2$
1	0	$\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2} + 1$	1	1	$\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1 = c_1 c_2 + 1$
1	1	$(\varepsilon_1 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_1}) (\varepsilon_2 + 1 + \frac{1}{\varepsilon_2}) + 1$	2	0	$c_1^2 + c_1 c_2 + c_2^2 - 2$
$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\chi \left( \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right) \cdot (\varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} + \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_2})$	2	1	$c_1 c_2 (c_1 + c_2)$
$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\chi \left( \begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix} \right) \cdot (\varepsilon_1 \varepsilon_2 + \frac{1}{\varepsilon_1 \varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} + 1)$	3	0	$(c_1^2 + c_2^2 - 3) (c_1 + c_2)$
					$c_i = \varepsilon_i + \frac{1}{\varepsilon_i}$

## Literatur

F. L. Bauer: 1949a „Über die Darstellungen der  $\mathfrak{d}_n$ “. Unveröffentlicht. – 1949b Z. Naturforschg. 4a, 720.

F. J. Belinfante: 1939 Physica 6, 849 und 887.

H. J. Bhabha: 1945 Curr. Sci. 14, 89. – Rev. Mod. Phys. 17, 200. – Proc. Ind. Acad. Sci. A 21, 241.

F. Bopp: 1948 Z. Naturforschg. 3a, 564. – 1949 – und F. L. Bauer, Z. Naturforschg. 4a, 611.

L. de Broglie: 1939 Comptes rendus 209, 265.

E. Cartan: 1894 Thèse, Paris 1894.

- C. Chevalley: 1946 „Theory of Lie Groups“, Princeton 1946.  
 W. K. Clifford: 1878 Am. Journ. of Math. **1**, 350.  
 P. A. M. Dirac: 1936 Proc. Roy. Soc. A **155**, 447. – 1942 – Proc. Roy. Soc. A **180**, 1.  
 M. Fierz: 1939 Helv. Phys. Acta **12**, 3. – 1939 – und W. Pauli, Proc. Roy. Soc. A **173**, 211.  
 H. S. Green: 1948 Proc. Cambr. Phil. Soc. **44**, 263.  
 Harish-Chandra: 1948 Proc. Roy. Soc. **192**, 195.  
 H. Hönl: 1950 – und H. Boerner: Z. Naturforschg. **5a**, 353.  
 F. Hund: 1927 Z. Physik **43**, 788.  
 N. Kemmer: 1939 Proc. Roy. Soc. A **173**, 91.  
 H. A. Kramers: 1941 –; F. J. Belinfante und J. K. Lubanski: Physica **8**, 597.  
 K. J. Le Couteur: 1949 Proc. Roy. Soc. A **196**, 251. – 1950 Proc. Roy. Soc. A **202**, 284 und 394.  
 J. K. Lubanski: 1942 Physica **9**, 310. – 1942 – und L. Rosenfeld: Physica **9**, 117.  
 B. S. Madhava Rao: 1946 – et al., Proc. Roy. Soc. A **187**, 385.  
 C. Möller: 1940 Det. Kgl. Danske Vid. **17**, no 8.  
 W. Pauli: 1939 – und M. Fierz: Helv. phys. Acta **12**, 297. – 1941 Rev. Mod. Phys. **13**, 203.  
 R. Potier: 1946 Comptes rendus **222**, 638. – 1948 Comptes rendus **226**, 63.  
 G. Racah: 1949a Phys. Rev. **76**, 1352. – 1949b Rev. Mod. Phys. **21**, 494.  
 B. L. van der Waerden: 1933 Math. Zeitschrift **37**, 446. – 1935 – und H. B. G. Casimir: Math. Ann. **111**.  
 J. van Isacker: 1947 Comptes rendus **224**, 1758.  
 H. Weyl: 1925 Math. Zeitschrift **23**, 271 und **24**, 328. – 1928 „Gruppentheorie und Quantenmechanik“, Leipzig 1928. – 1939 „Classical Groups“, Princeton 1939, 2<sup>d</sup> edition 1946.  
 E. Witt: 1941 Hbg. Abh. **14**, 289.