

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Ein Grenzwertsatz

Von Herbert Forster in München

Vorgelegt von Herrn O. Perron am 6. Juni 1952

Satz:

Die Reihen

$$(1) \quad F(x) = \sum_{v=0}^{\infty} f_v(x); \quad G(x) = \sum_{v=0}^{\infty} g_v(x)$$

seien für $x \geq x_0 \geq 0$ konvergent. Dabei sei

$$(2) \quad \text{I. } f_v(x) = a_v x^{b+c \cdot v} \quad (c > 0)$$

mit

$$(3) \quad 1. a_v > 0;$$

$$(4) \quad 2. \frac{a_{v+1}}{a_v} \geq \frac{a_{v+2}}{a_{v+1}} \quad \text{für } v > v_0, \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{a_{v+1}}{a_v} = 0;$$

$$(5) \quad 3. \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{a_{\mu+\lambda+1}}{a_{\mu+\lambda}} \cdot \frac{a_{\mu-1}}{a_{\mu}} = 1 \quad \text{für jedes feste } \lambda \geq 0.$$

$$(6) \quad \text{II. } g_v(x) > 0 \text{ für } v > v_0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|g_{v+1}(x)|}{|g_v(x)|} = \infty \text{ für } v = 0, 1, 2 \dots$$

Ferner sei für jedes v ein τ_v vorhanden, ($0 \leq \tau_v \leq 1$) derart, daß der Grenzwert

$$(7) \quad \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{f_v(x)^{\tau_v} \cdot f_{v+1}(x)^{1-\tau_v}}{g_v(x)} = K \quad (\text{unabhängig von } x)$$

gleichmäßig für alle $x > x_0$ existiert.

Dann ist auch

$$(8) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = K.$$

Dabei kann K auch ∞ bedeuten.

Bevor wir zum Beweis übergehen, sei ein Beispiel gebracht.

Beispiel:

Gegeben sei

$$F(x) = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{x^{2v}}{v! \Gamma(v+n+1) \Gamma(2v+n+1)},$$

wobei n irgendeine konstante positive Zahl bedeutet.

Es ist

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x \cdot F'(x)}}$$

gesucht.

Im Anschluß an obige Bezeichnungen setzen wir:

$$\frac{x^{2v}}{v! \Gamma(v+n+1) \Gamma(2v+n+1)} = f_v(x),$$

$$\sqrt{x \cdot F'(x)} = \sum_{v=0}^{\infty} \frac{2x^{2v+3/2}}{v! \Gamma(v+n+2) \Gamma(2v+n+3)} = \sum_{v=0}^{\infty} g_v(x).$$

Daß die beiden Reihen die Voraussetzungen unseres Satzes erfüllen, ist leicht zu bestätigen.

Setzen wir nun $\tau_v = \frac{1}{4}$, so wird

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \frac{f_v^{1/4} f_{v+1}^{3/4}}{g_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} \frac{(v+n+1)(2v+n+1)(2v+n+2)}{2[(v+1)(v+n+1)(2v+n+1)(2v+n+2)]^{3/4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Also ist nach unserem Satz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x \cdot F'(x)}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Beweis:

a) Aus (2) und (3) folgt

$$(9) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{v+1}(x)}{f_v(x)} = \infty.$$

b) Wegen (4) gibt es für jedes große x ($x > x_0$) einen und nur einen Wert $M(x)$, so daß

$$(10) \quad \frac{a_{M(x)}}{a_{M(x)-1}} \geq \frac{1}{x^c} > \frac{a_{M(x)+1}}{a_{M(x)}}$$

ist.

Dann ist für $\mu \geq M(x)$

$$\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} < \frac{1}{x^c}; \text{ also } f_{\mu+1} = a_{\mu+1} \cdot x^{b+c(\mu+1)} < a_\mu x^{b+c \cdot \mu} = f_\mu(x);$$

für $\mu < M(x)$ ist

$$\frac{a_{\mu+1}}{a_\mu} \geq \frac{1}{x^c}; \text{ also } f_{\mu+1}(x) = a_{\mu+1} \cdot x^{b+c(\mu+1)} \geq a_\mu \cdot x^{b+c \cdot \mu} = f_\mu(x).$$

$M(x)$ hat also die Eigenschaft, daß für $\nu > \nu_0$

$$(11) \quad f_\nu(x) \leq f_{\nu+1}(x) \leq \dots \leq f_{M(x)-1}(x) \leq f_{M(x)}(x) \quad \text{und} \\ f_{M(x)}(x) > f_{M(x)+1}(x) > f_{M(x)+2}(x) > \dots$$

Aus (10) und (4) ersieht man, daß

$$(12) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} M(x) = \infty.$$

c) Ist ε eine beliebige kleine positive Zahl, so wählen wir die ganze Zahl λ so, daß

$$(13) \quad \frac{1}{\lambda} < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Zu λ wird ein $\delta > 0$ so bestimmt, daß

$$(14) \quad (1 - \delta)^\lambda > \frac{1}{2}$$

wird. Nach (5) können wir dann μ_0 so bestimmen, daß für $\mu > \mu_0$

$$1 - \delta < \frac{a_{\mu+\lambda+1}}{a_{\mu+\lambda}} \cdot \frac{a_{\mu-1}}{a_\mu} \leq 1,$$

also

$$\frac{a_{\mu+\lambda+1}}{a_{\mu+\lambda}} > (1 - \delta) \cdot \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}}$$

ist.

Wegen (4) ist dann für $0 \leq \sigma \leq \lambda$ und $\mu > \mu_0$

$$(15) \quad (1 - \delta) \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}} < \frac{a_{\mu+\sigma+1}}{a_{\mu+\sigma}} \leq \frac{a_\mu}{a_{\mu-1}}.$$

Wählen wir nun noch x_0 so groß, daß $M(x) > \mu_0$ ist für $x > x_0$,

dann gilt für $x > x_0$ auch, wenn für $M(x)$ kürzer M geschrieben wird,

$$\begin{aligned}
 \frac{f_M(x)}{F(x)} &= \frac{a_M \cdot x^{b+c \cdot M}}{\sum_{v=0}^{\infty} a_v x^{b+c \cdot v}} < \frac{a_M x^{cM}}{\sum_{v=0}^{\lambda} a_{M+v} x^{c(M+v)}} = \frac{1}{\sum_{v=0}^{\lambda} \frac{a_{M+v}}{a_M} \cdot x^{cv}} \\
 (16) \quad &= \frac{1}{1 + \sum_{v=1}^{\lambda} \left(\prod_{\sigma=0}^{v-1} \frac{a_{M+\sigma+1}}{a_{M+\sigma}} x^c \right)} \leq \frac{1}{1 + \sum_{c=1}^{\lambda} \left((1-\delta) \frac{a_M}{a_{M-1}} \cdot x^c \right)^v} \\
 &\leq \frac{1}{1 + \sum_{v=1}^{\lambda} (1-\delta)^v} < \frac{1}{1 + \lambda(1-\delta)^\lambda} < \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{2}} < \frac{2}{\lambda} < \varepsilon;
 \end{aligned}$$

also

$$(16a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f_{M(x)}(x)}{F(x)} = 0.$$

d) Nach (7) wählen wir nun $N > v_0$ so groß, daß für $x > x_0$ und $v \geq N$

$$(17) \quad \left| \frac{f_v^{\tau_v} \cdot f_{v+1}^{1-\tau_v}}{g_v} - K \right| < \varepsilon$$

ist; dann bestimmen wir $\xi > x_0$ so, daß für $x \geq \xi$

$$\begin{aligned}
 (18) \quad & \begin{aligned}
 1. \quad & \frac{\sum_{v=1}^{N+1} f_v(x)}{F(x)} < \varepsilon \quad (\text{nach (9)}), \\
 2. \quad & \frac{\left| \sum_{v=1}^{N+1} g_v(x) \right|}{G(x)} < \varepsilon \quad (\text{nach (6)}), \\
 3. \quad & \frac{f_{M(x)}(x)}{F(x)} < \varepsilon \quad (\text{nach (16a)}) \\
 4. \quad & M(x) > N \quad (\text{nach (12)} \text{ ist}).
 \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Bezeichnen wir

$$F(x) - \sum_{v=1}^N f_v(x) = f_{M(x)}(x) \quad \text{mit} \quad \sum' f_v(x),$$

so ist für $x \geq \xi$ nach (18)

$$(19) \quad \sum' f_v(x) > F(x) \cdot (1 - 2\varepsilon).$$

(17) und (11) ergeben dann für $x \geq \xi$

(20)

$$\begin{aligned} F(x) &< \frac{1}{1-2\varepsilon} \sum' f_v \\ &\leq \frac{1}{1-2\varepsilon} \left(\sum_{v=N+1}^{M(x)-1} f_v^{\tau_v}(x) \cdot f_{v+1}^{1-\tau_v}(x) + \sum_{M(x)+1}^{\infty} f_v^{1-\tau_{v-1}}(x) \cdot f_{v-1}^{\tau_{v-1}}(x) \right) \\ &< \frac{1}{1-2\varepsilon} \sum_{v=N+1}^{\infty} (\varepsilon + K) g_v(x) < \frac{1+\varepsilon}{1-2\varepsilon} (\varepsilon + K) \cdot G(x). \end{aligned}$$

Wenn $K = 0$, bedeutet dies, daß $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = 0$ ist.

Für $K > 0$ erhalten wir für $x \geq \xi$ aus (18), (17), (11) und (16a)

(21)

$$\begin{aligned} F(x) &> \frac{F(x) + f_{M(x)}(x)}{1 + \varepsilon} > \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(\sum_{v=N+1}^{M(x)} f_v(x) + \sum_{v=M(x)}^{\infty} f_v(x) \right) \\ &\geq \frac{1}{1 + \varepsilon} \left(\sum_{v=N+1}^{M(x)} f_v^{1-\tau_{v-1}}(x) \cdot f_{v-1}^{\tau_{v-1}}(x) + \sum_{v=M(x)}^{\infty} f_v^{\tau_v}(x) \cdot f_{v+1}^{1-\tau_v}(x) \right) \\ &\geq \frac{K-\varepsilon}{1 + \varepsilon} \sum_{v=N+1}^{\infty} g_v(x) > \frac{1-\varepsilon}{1 + \varepsilon} (K - \varepsilon) \cdot G(x). \end{aligned}$$

Also

$$\frac{1-\varepsilon}{1 + \varepsilon} (K - \varepsilon) < \frac{F(x)}{G(x)} < \frac{(\varepsilon + K)(1 + \varepsilon)}{1 - 2\varepsilon} \quad \text{für } x > \xi.$$

Dies bedeutet aber, daß

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = K.$$

e) Wenn $K = \infty$ ist, so hat man nur in (21) statt $K - \varepsilon$ eine beliebige große Zahl Z einzusetzen und erhält schließlich

$$\frac{F(x)}{G(x)} > Z \cdot \frac{1-\varepsilon}{1 + \varepsilon};$$

also

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{F(x)}{G(x)} = \infty.$$