Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1952

München 1953

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Bemerkung zu einem Satz von A. Moessner

Von Hans Salié in Leipzig

Vorgelegt von Herrn O. Perron am 1. Februar 1952

Geht man von der Reihe beliebiger Zahlen

$$(a) \qquad a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots$$

aus, streicht jede k-te Zahl ($k \geqq 2$), bildet von der übrigbleibenden Reihe die Summenreihe, streicht dann aus dieser jede $(k-1)$-te Zahl, bildet wieder die Summenreihe, streicht dann jede $(k-2)$-te Zahl, bildet abermals die Summenreihe und setzt diesen Prozeß fort, bis man schließlich beim $(k-1)$-ten Schritt jede zweite Zahl streicht, und bildet schließlich die Summenreihe, so entsteht auf diese Weise aus (a) die neue Reihe

$$(a^{(k)}) \qquad a_1^{(k)},\ a_2^{(k)},\ a_3^{(k)},\ \ldots.$$

Werden für (a) die natürlichen Zahlen

$$1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

genommen, so hat Herr A. Moessner[1] gefunden, daß $(a^{(k)})$ die Reihe

$$1^k,\ 2^k,\ 3^k,\ \ldots$$

ergibt. Herr O. Perron[2] gab einen einfachen Beweis dieses Satzes.

Sind die a_ν Unbestimmte, so sind die $a_n^{(k)}$ offenbar lineare Polynome von ihnen, und man kann nach dem Bildungsgesetz der Koeffizienten fragen. Im folgenden wird gezeigt:

$$(1) \quad a_n^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} a_{\rho k+\nu} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1}, \qquad \begin{matrix} k \geq 2, \\ n = 1, 2, \ldots. \end{matrix}$$

Der Moessnersche Satz ergibt sich hieraus durch die Spezialisierung

[1] Diese Sitzgsber. *1951*, Nr. 3, S. 29.

[2] Ebda *1951*, Nr. 4, S. 31–34.

$$\text{(A)}\qquad a_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n > 1. \end{cases}$$

Man erhält dann aus (1) ohne Rechnung

$$a_n^{(k)} = n^{k-2},$$

und dieses Ergebnis enthält zugleich die Formel

$$\text{(B)}\qquad b_n^{(k-1)} = n^{k-2} \quad \text{für} \quad b_n = 1, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

und

$$\text{(C)}\qquad c_n^{(k-2)} = n^{k-2} \quad \text{für} \quad c_n = n,$$

da der eingangs der Note gegebene Prozeß, auf die Folge (A) angewendet, über die Reihen (B) und (C) führt. Mit (C):

$$c_n^{(k)} = n^k$$

ist der Satz von Moessner gewonnen.

Der Beweis von (1) wird durch vollständige Induktion nach k (Schluß von k auf $k+1$) geführt. Um $(a^{(k+1)})$ zu erhalten, streiche man zuerst aus (a) die Glieder

$$a_{k+1},\ a_{2(k+1)},\ a_{3(k+1)},\ \ldots.$$

In der dann entstehenden Reihe

$$(\alpha)\qquad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$$

ist

$$(2)\qquad \alpha_{\rho k+\nu} = a_{\rho(k+1)+\nu}, \qquad \begin{array}{l} 1 \leqq \nu \leqq k, \\ \rho = 0, 1, 2, \ldots. \end{array}$$

Bezeichnet

$$(s)\qquad s_1, s_2, s_3, \ldots$$

die Summenreihe von (α), so gilt

$$(3)\qquad a_n^{(k+1)} = s_n^{(k)}.$$

Macht man die Voraussetzung, daß Formel (1) für

$$a_n^{(2)}, a_n^{(3)}, \ldots, a_n^{(k)} \qquad k \geq 2$$

und alle Folgen (a) gültig ist, so darf man in (1)

$$s_m = \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu$$

an Stelle von a_m einsetzen. Es entsteht dann aus

$$s_n^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu-1}^{k-1} s_{\rho k+\nu} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1}$$

der Ausdruck

$$a_n^{(k+1)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k} \alpha_{\rho k+\nu}\, \delta_{\rho\nu}^{(k)}, \tag{4}$$

wobei offenbar

$$\delta_{\rho\nu}^{(k)} = \sum_{j=\nu}^{k-1} (n-\rho)^{k-j-1} (n-\rho-1)^{j-1} + \tag{5}$$
$$+ \sum_{i=\rho+1}^{n-1} \sum_{j=1}^{k-1} (n-i)^{k-j-1} (n-i-1)^{j-1}, \quad 1 \leqq \nu \leqq k$$

bedeutet. Benutzt man die Zerlegung

$$(n-\rho)^{k-j-1}(n-\rho-1)^{j-1} = (n-\rho)^{k-j}(n-\rho-1)^{j-1} - (n-\rho)^{k-j-1}(n-\rho-1)^{j}$$

so wird aus der ersten Summe in (5)

$$\sum_{j=\nu}^{k-1} [(n-\rho)^{k-j} (n-\rho-1)^{j-1} - (n-\rho)^{k-(j+1)} (n-\rho-1)^{(j+1)-1}] \tag{6}$$
$$= (n-\rho)^{k-\nu} (n-\rho-1)^{\nu-1} - (n-\rho-1)^{k-1}.$$

Unter Verwendung von (6) erhält man für die Doppelsumme in (5):

$$\sum_{i=\rho+1}^{n-1} [(n-i)^{k-1} - (n-i-1)^{k-1}] = (n-\rho-1)^{k-1} \tag{7}$$

und damit durch (6) und (7) aus (5)

$$\delta_{\rho\nu}^{(k)} = (n-\rho)^{k-\nu} (n-\rho-1)^{\nu-1}. \tag{8}$$

Der Ausdruck (4) geht schließlich durch Einsetzen von (2) und (8) über in

$$a_n^{(k+1)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k} a_{\rho(k+1)+\nu} (n-\rho)^{k-\nu} (n-\rho-1)^{\nu-1},$$

d. i. Gleichung (1), wenn darin k durch $k+1$ ersetzt wird. Somit ist Gleichung (1) allgemein bewiesen, da sie für $k = 2$

$$a_n^{(2)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} a_{2\rho+1}$$

richtig ist.

Zum Schluß wird noch ein **Beispiel** gegeben. Zur Folge

$$\text{(Q)} \qquad q_n = q^{n-1}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

q eine Unbestimmte, gehört nach (1) der Ausdruck

$$q_n^{(k)} = \sum_{\rho=0}^{n-1} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\rho k+\nu-1} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1},$$

der für $n \geq 2$ in

$$(9) \quad q_n^{(k)} = \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\nu-1} n^{k-\nu-1} (n-1)^{\nu-1} + \sum_{\rho=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{(\rho+1)k+\nu-1} (n-\rho-1)^{k-\nu-1} (n-\rho-2)^{\nu-1}$$

übergeht, wenn man den Summationsbuchstaben ρ durch $\rho+1$ ersetzt. Andererseits ist für $n \geq 2$

$$(10) \quad q^k q_n^{(k)} = q^{nk} + \sum_{\rho=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{(\rho+1)k+\nu-1} (n-\rho)^{k-\nu-1} (n-\rho-1)^{\nu-1}.$$

Durch Subtraktion von (9) und (10) und Division durch n^{k-2} erhält man:

$$(11) \quad \left\{ \begin{aligned} &(1-q^k) \frac{q_n^{(k)}}{n^{k-2}} = \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\nu-1} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{\nu-1} - \frac{q^{nk}}{n^{k-2}} - \\ &\quad - \sum_{\rho=0}^{n-2} \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{(\rho+1)k+\nu-1} \left[\left(1-\frac{\rho}{n}\right)^{k-\nu-1} \left(1-\frac{\rho+1}{n}\right)^{\nu-1} - \right. \\ &\quad \left. - \left(1-\frac{\rho+1}{n}\right)^{k-\nu-1} \left(1-\frac{\rho+2}{n}\right)^{\nu-1}\right]. \end{aligned} \right.$$

Wenn q als Zahl mit $|q| < 1$ vorausgesetzt wird, ist die Doppelsumme in (11) dem Betrage nach kleiner als

$$\sum_{\rho=0}^{\infty} |q^k|^{\rho+1} \cdot \sum_{\nu=1}^{k-1} |q|^{\nu-1} \cdot \frac{2(k-2)}{n} < \frac{K}{n}$$

mit von n unabhängigem Werte $K = K(q, k)$, da die eckige Klammer in (11) unterhalb

$$\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^{k-2} - \left(1 - \frac{\rho + 2}{n}\right)^{k-2} \leqq \frac{2(k-2)}{n}$$

liegt. Geht man nun bei festem k und $|q| < 1$ zur Grenze $n \to \infty$, so entsteht aus (11)

$$\lim_{n \to \infty} (1 - q^k) \frac{q_n^{(k)}}{n^{k-2}} = \sum_{\nu=1}^{k-1} q^{\nu-1}, \quad |q| < 1,$$

d. h.

$$\lim_{n \to \infty} \frac{q_n^{(k)}}{n^{k-2}} = \frac{1-q^{k-1}}{(1-q)(1-q^k)}, \quad |q| < 1, k \geqq 2. \tag{12}$$