

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Ähnlichkeit im Großen bei konformen Abbildungen

Von Walter Buckel in Nördlingen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 16. November 1951

§ 1. Einleitung

1. 1. In der klassischen Differentialgeometrie tritt neben den elementargeometrischen Begriff der Ähnlichkeit im Großen der der Ähnlichkeit im unendlich Kleinen (Konformität). Wir sagen von einer Abbildung $w = f(z)$ einer Menge M der komplexen Zahlenebene E in E , sie sei ähnlich im Großen für diese Menge M , wenn M mindestens 3 verschiedene Punkte enthält und eine Konstante $d \neq 0$ existiert, derart, daß für irgend 2 verschiedene Punkte z_1 und z_2 von M gilt:

$$\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|} = d.$$

Die Konstante d nennen wir den Ähnlichkeitsfaktor oder die Dehnung dieser Abbildung. Von einer Abbildung $w = f(z)$ eines Gebietes G der komplexen Zahlenebene sagen wir, sie sei ähnlich im unendlich Kleinen für dieses Gebiet G , wenn es zu jedem Punkt z_0 von G eine Konstante $d(z_0) \neq 0$ gibt, so daß gilt:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|f(z) - f(z_0)|}{|z - z_0|} = d(z_0).^1$$

Die Konstante $d(z_0)$ nennen wir den (punktalen) Ähnlichkeitsfaktor oder die (punktale) Dehnung dieser Abbildung im Punkte z_0 . Angesichts dieser beiden Ähnlichkeitsbegriffe ergibt sich die Frage nach den zwischen ihnen bestehenden Beziehungen. Es ist evident, daß jede im Großen ähnliche Abbildung eines Gebietes G in diesem Gebiet auch im unendlich Kleinen ähnlich

¹ Daß diese Forderung für die (gleich- oder gegensinnige) Konformität im üblichen Sinne ausreichend ist, hat D. Menchoff gezeigt. Vgl. etwa: Les conditions de monogénéité (Actualités sci. et industr. Nr. 329, Paris 1936).

ist, während umgekehrt eine konforme Abbildung von G im allgemeinen (das heißt abgesehen von den Abbildungen $w = az + b$ und $w = a\bar{z} + b$) nicht das ganze Gebiet G im Großen ähnlich abbildet. Daher ist nicht trivial die Frage nach der Existenz und Struktur echter Teilmengen von G , die auch bei einer konformen, aber nicht für das ganze Gebiet G im Großen ähnlichen Abbildung ihrerseits ähnlich im Großen abgebildet werden.

1. 2. Bei der Inangriffnahme dieses Problems wird man sich zunächst auf die Betrachtung in sich dichter Teilmengen von G beschränken, um in jedem Punkt dieser Teilmengen die Dehnung im Bezug auf eben diese Menge zur Verfügung und damit einen Ansatz zu haben für die Heranziehung rechnerischer Methoden. Es ergibt sich sogleich, daß eine in sich dichte Teilmenge von G , die ähnlich im Großen abgebildet wird, eine Menge konstanter Dehnung ist.²

Nun sind grundsätzlich drei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1. Es existiert keine in sich dichte Teilmenge von G , die durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet wird.

2. Es existieren in sich dichte Teilmengen von G , deren jede für sich durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet wird, deren Vereinigungsmenge aber noch eine echte Teilmenge von G ist.

3. Es existieren in sich dichte Teilmengen von G , deren jede für sich durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet wird und deren Vereinigungsmenge mit G identisch ist.

In diesem Falle kann man also das Gebiet G in in sich dichte (fremde) Punktmengen zerlegen, deren jede für sich ähnlich im Großen abgebildet wird.

² Nicht in sich dichte Mengen, die bei einer konformen Abbildung ähnlich im Großen abgebildet werden, brauchen nicht Mengen konstanter Dehnung zu sein. Beispiel: $w = z^2$. Es sei τ die einzige, zwischen 0 und $\frac{1}{2}$ gelegene, reelle Wurzel der Gleichung $t^4 - t^2 + t - \frac{1}{4} = 0$. Die Menge M der drei Punkte $1, i, \tau(1+i)$ geht durch $w = z^2$ über in die Menge der drei Punkte $1, -1, 2\tau^2 i$. Diese Abbildung ist, wie man sich durch Berechnung von $\frac{|f(z_1) - f(z_2)|}{|z_1 - z_2|}$ für jedes Punktepaar von M überzeugt, ähnlich im Großen für die Menge M mit dem Ähnlichkeitsfaktor $\sqrt{2}$. Für die punktale Dehnung in den drei Punkten von M gilt aber: $d(1) = 2, d(i) = 2, d(\tau(1+i)) = 2\tau \cdot \sqrt{2} < \sqrt{2}$. Also ist M keine Menge konstanter Dehnung.

1.3. Bei dieser Beschränkung auf in sich dichte Teilmengen T von G ergibt sich, daß „im allgemeinen“ (wobei dieser Begriff noch näher zu erklären sein wird) bei einer nicht im Großen ähnlichen konformen Abbildung des Gebietes G der Fall 1 vorliegt.

Für die Existenz eines in sich dichten T , das ähnlich im Großen abgebildet wird, wird eine notwendige und hinreichende Bedingung aufgestellt und eine Punktmenge angegeben, die alle in sich dichten, ähnlich im Großen abgebildeten Teilmengen T von G enthält. Weiter wird gezeigt, daß jede in sich dichte Teilmenge T von G , die ähnlich im Großen abgebildet wird, Teilmenge einer Vereinigung analytischer Bogen ist und umgekehrt, daß es zu jedem offenen analytischen Bogen B mit Ausnahme der Strecken ein diesen enthaltendes Gebiet G und eine konforme Abbildung $w = f(z)$ von G gibt, bei der B ähnlich im Großen abgebildet wird, ohne daß die Abbildung für das ganze Gebiet G ähnlich im Großen ist. Die Abbildung $w = f(z)$ ist dabei durch B bis auf eine im Großen ähnliche Abbildung von G eindeutig bestimmt.

Schließlich wird gezeigt, daß auch der Fall 3 wirklich vorkommt. In diesem Falle ist $f(z)$ von folgender Gestalt: $f(z) = g(z)$ oder $f(z) = g(\bar{z})$ mit $g(z) = (az + b)^{\frac{1-ti}{1+ti}} + c$, wobei die Konstanten a, b, c bzw. t komplex bzw. reell sind und lediglich der Einschränkung $a \neq 0$ zu genügen brauchen. Die in sich dichten Teilmengen T , deren jede für sich ähnlich im Großen abgebildet wird, sind Teilmengen logarithmischer Spiralen.

1.4. Eine Reihe von naheliegenden Fragestellungen mußten vorerst noch unbeantwortet gelassen werden. Ihre Erledigung soll, soweit möglich, einer späteren Note vorbehalten bleiben. Ist eine konforme Abbildung $f(z)$ eines Gebietes G gegeben, die nicht für das ganze Gebiet G im Großen ähnlich ist, so verstehen wir unter G^* das unter Berücksichtigung mehrfacher Überdeckungen aufgefaßte, größte Gebiet, das von der Abbildung $f(z)$ mit allen ihren konformen Fortsetzungen abgebildet wird. Eine größte zusammenhängende Teilmenge T von G^* , die durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet wird, nennen wir einen ähnlichen Kern von $f(z)$. Besitzt $f(z)$ wenigstens einen ähnlichen Kern, so kann man sich die Aufgabe stellen, die Gesamtheit aller ähnlichen Kerne von $f(z)$ anzugeben. Diese Gesamtheit aller ähnlichen

Kerne nennen wir das Gerüst von $f(z)$. Jeder ähnliche Kern einer konformen Abbildung ist eine Punktmenge konstanter Dehnung. Man kann sich fragen wann ein Gerüst ähnliche Kerne mit verschiedener Dehnung enthalten kann. Man kann sich weiter fragen, welche Eigenschaften für eine konforme Abbildung aus der Existenz und den Eigenschaften eines Gerüsts (etwa seiner Algebraizität) folgen. Und schließlich kann man fragen, ob es unter den elementaren konformen Abbildungen, außer denen des Falles 3, bei denen das Gerüst den ganzen Definitionsbereich überdeckt, noch weitere gibt, die ein Gerüst besitzen.

§ 2. Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz einer in sich dichten Punktmenge, die durch eine konforme Abbildung im Großen ähnlich abgebildet wird

2.1. Eine konforme Abbildung eines Gebietes G ist entweder analytisch oder zu einer analytischen konjugiert komplex. Wir können uns daher bei der Aufstellung unserer notwendigen und hinreichenden Bedingung auf die Betrachtung analytischer Abbildungen beschränken.³ Es gilt folgender Satz:

Vor.: $w = f(z)$ sei in G analytisch und von $az + b$ verschieden. In G sei $f'(z) \neq 0$. Wir bilden die Funktion $h(z) = \frac{f''(z)}{f'(z)}$; es sei $\bar{u}(x, y)$ bzw. $\bar{v}(x, y)$ der Realteil bzw. der Imaginärteil von $h(z)$.

Beh.: Notwendig und hinreichend für die Existenz einer in sich dichten Teilmenge T von G , die durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet wird, ist die Existenz eines analytischen Bogens $x(t), y(t)$ mit $x'^2 + y'^2 \neq 0$ in G , für den gilt:

$$\bar{u}(x(t), y(t)) = -2 \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^2} \cdot y'(t),$$

$$\bar{v}(x(t), y(t)) = -2 \frac{y''(t)x'(t) - x''(t)y'(t)}{((x'(t))^2 + (y'(t))^2)^2} \cdot x'(t).$$

Im Falle seiner Existenz wird dieser Bogen selbst durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet.

³ Im folgenden sei $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ stets die Zerlegung der analytischen Funktion $f(z)$ in Real- und Imaginärteil.

Zum Beweise dieses Satzes betrachten wir zu der analytischen Abbildung $w = f(z)$ die Punktmengen konstanter Dehnung und die krümmungsähnlich abgebildeten Bogen.

2.2. Die Punktmengen konstanter Dehnung.

Definition: Unter einer Punktmenge konstanter Dehnung von $f(z)$ in G verstehen wir eine Teilmenge von G , für die gilt: $|f'(z)| = \text{const.} > 0$. Eine Punktmenge konstanter Dehnung heiße vollständig in G , wenn sie alle in G vorkommenden Punkte enthält, in denen diese Dehnung herrscht.

2.2.1. Über die Punktmengen konstanter Dehnung gilt folgender Satz:

Vor: Ein stetig differenzierbarer Bogen B in G sei gegeben durch $x(t), y(t)$ mit $x'^2 + y'^2 \neq 0$.

Beh.: Der Bogen B ist dann und nur dann Teilmenge einer Punktmenge konstanter Dehnung, wenn er der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$x'(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x) + y'(u_{xx}v_x - v_{xx}u_x) = 0. \quad (1)$$

2.2.1.1. Die Bedingung ist notwendig. Es sei

$$z(t) = x(t) + iy(t) \text{ und } |f'(z(t))|^2 = u_x^2 + v_x^2 = \text{const.}$$

Dann gilt:

$$2u_x(u_{xx}x' + u_{xy}y') + 2v_x(v_{xx}x' + v_{xy}y') = 0,$$

also:

$$(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x)x' + (u_{xy}v_x + u_{xy}u_x)y' = 0.$$

Auf Grund der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen gilt aber: $v_{xy} = u_{xx}$ und $u_{xy} = -v_{xx}$, so daß wir haben

$$(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x)x' + (u_{xx}v_x - v_{xx}u_x)y' = 0.$$

2.2.1.2. Die Bedingung ist hinreichend. Gilt für einen (zusammenhängenden) differenzierbaren Bogen $x(t), y(t)$ in G die Differentialgleichung (1), so gilt auch $2u_x(u_{xx}x' + u_{xy}y') + 2v_x(v_{xx}x' + v_{xy}y') = 0$. Daraus folgt aber durch Integration: $u_x^2 + v_x^2 = \text{const.}$, also ist der Bogen ein Teilbogen von einer Punktmenge konstanter Dehnung.

2.2.2. Wenn auch $f(z)$ von $az + b$ verschieden ist, so gilt über die Punktmengen konstanter Dehnung dennoch der folgende weitere Satz:

Jede in G vollständige Punktmenge konstanter Dehnung enthält einen analytischen Bogen.

Beweis: Die in G vollständige Punktmenge konstanter Dehnung heiße M . berall in M gilt: $u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 = \text{const.} \neq 0$. (Nach 2.1., Vor.). Nun bilden wir:

$$\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x} = 2(u_x u_{xx} + v_x v_{xx})$$

und:

$$\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y} = 2(u_x u_{xy} + v_x v_{xy})$$

und beweisen zunächst: Es gibt wenigstens einen Punkt z in M für den gilt:

$$\left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y} \right)^2 \neq 0.$$

Es ist:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y} \right)^2 = \\ &= 4((u_x u_{xx} + v_x v_{xx})^2 + (u_x u_{xy} + v_x v_{xy})^2) \\ &= 4((u_x u_{xx} + v_x v_{xx})^2 + (-u_x v_{xx} + v_x u_{xx})^2) \\ &= 4(u_x^2 u_{xx}^2 + 2u_x u_{xx} v_x v_{xx} + v_x^2 v_{xx}^2 + u_x^2 v_{xx}^2 \\ & \quad - 2u_x v_{xx} v_x u_{xx} + v_x^2 u_{xx}^2) \\ &= 4(u_x^2 + v_x^2)(u_{xx}^2 + v_{xx}^2). \end{aligned}$$

Wäre nun

$$\left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y} \right)^2 = 0$$

berall in M , so wäre, da $u_x^2 + v_x^2$ überall in M von Null verschieden ist, $u_{xx}^2 + v_{xx}^2 = 0$ überall in M . Es wäre also überall in M $f''(z) = 0$ und, weil M in sich dicht ist,⁴ damit $f(z) = az + b$.

⁴ Daß M in sich dicht ist, sieht man auf folgende Weise: Es sei z_0 ein Punkt von M und K ein Kreis um z_0 mit beliebig kleinem Radius. Da $f'(z)$

Die Abbildung wäre also im Großen ähnlich für G , im Widerspruch zur Voraussetzung. Es gibt also mindestens einen Punkt $z_0 = x_0 + i y_0$ in G , für den gilt:

$$\left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y} \right)^2 \neq 0.$$

Wir betrachten zunächst den Fall, daß $\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y}$ in z_0 von Null verschieden ist. In diesem Falle gibt es nach dem Satz über implizite Funktionen ein $\delta > 0$ mit folgenden Eigenschaften:

Im Intervall $|x - x_0| < \delta$ ist durch die Forderungen:

$$u_x(x, g(x))^2 + v_x(x, g(x))^2 = u_x(x_0, y_0)^2 + v_x(x_0, y_0)^2 \text{ und} \\ g(x_0) = y_0$$

eindeutig eine Funktion $y = g(x)$ erklärt, für die gilt:

$$g'(x) = - \frac{\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x}}{\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y}} = - \frac{2(u_x u_{xx} + v_x v_{xx})}{2(u_x u_{xy} + v_x v_{xy})} \\ = - \frac{u_x v_{xy} - v_x u_{xy}}{u_x u_{xy} + v_x v_{xy}}.$$

Der Bogen mit der Gleichung $y = g(x)$ über dem Intervall $|x - x_0| < \delta$ ist also Teilmenge der (vollständigen) Punktmenge konstanter Dehnung M der Abbildung $w = f(z)$. Da die Funktionen u bzw. v Realteil bzw. Imaginärteil einer analytischen Funktion sind, ist $y = g(x)$ im Intervall $|x - x_0| < \delta$ nicht nur beliebig oft stetig differenzierbar, sondern sogar analytisch.

Verschwindet in z_0 $\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial y}$, so ist in z_0 $\frac{\partial (u_x^2 + v_x^2)}{\partial x}$ von Null verschieden und der Beweis verläuft entsprechend. Wir bezeichnen einen solchen in M enthaltenen analytischen Bogen mit B .

in dem abgeschlossenen Kreis K nullstellenfrei und nicht konstant ist, erreicht $|f'(z)|$ seinen größten bzw. kleinsten Wert nur auf dem Rande von K und zwar in z_1 bzw. z_2 . Es gilt also: $|f'(z_1)| > |f'(z_0)| > |f'(z_2)|$. Nun sei C ein Bogen in K , der z_1 und z_2 verbindet und z_0 nicht enthält. Dann gibt es auf C einen Punkt z^* , für den gilt: $|f'(z^*)| = |f'(z_0)|$. z^* ist damit ein von z_0 verschiedener Punkt von M in K .

2.2.3. Für einen Punkt z eines solchen in einer in G vollständigen Punktmenge gleicher Dehnung enthaltenen, analytischen Bogens B benötigen wir später die Krümmung $k(z)$ von B in z und die Krümmung $k^*(z)$ des Bildbogens im Bildpunkte von z . Wir wollen diese beiden Krümmungen gleich berechnen. Dabei beschränken wir uns auf den Fall, daß der Bogen B in der Form $y = g(x)$ gegeben ist.

2.2.3.1. Wir berechnen zunächst die Krümmung $k(z)$ des Urbildbogens B im Punkte $z = x + ig(x)$.

Es gilt:

$$k = \frac{g''(x)}{(1 + (g'(x))^2)^{3/2}}.$$

Dabei ist

$$g'(x) = - \frac{u_x v_{xy} - v_x u_{xy}}{u_x u_{xy} + v_x v_{xy}},$$

und damit:

$$g''(x) = - \frac{m}{(u_x u_{xy} + v_x v_{xy})^2},$$

wobei für den Zähler m gilt:

$$\begin{aligned} m &= (u_x v_{xy} - v_x u_{xy})' (u_x u_{xy} + v_x v_{xy}) - (u_x u_{xy} + v_x v_{xy})' (u_x v_{xy} - v_x u_{xy}) \\ &= ((u_{xx} + u_{xy} g') v_{xy} + u_x (v_{xxy} + v_{xyy} g') - (v_{xx} + v_{xy} g') u_{xy} \\ &\quad - v_x (u_{xxy} + u_{xyy} g')) (u_x u_{xy} + v_x v_{xy}) \\ &\quad - ((u_{xx} + u_{xy} g') u_{xy} + u_x (u_{xxy} + u_{xyy} g') + (v_{xx} + v_{xy} g') v_{xy} \\ &\quad + v_x (v_{xxy} + v_{xyy} g')) (u_x v_{xy} - v_x u_{xy}) \\ &= (u_{xx} + u_{xy} g') u_x u_{xy} v_{xy} + (v_{xxy} + v_{xyy} g') u_x^2 u_{xy} \\ &\quad - (v_{xx} + v_{xy} g') u_x u_{xy}^2 - (u_{xxy} + u_{xyy} g') u_x v_x u_{xy} \\ &\quad + (u_{xx} + u_{xy} g') v_x v_{xy}^2 + (v_{xxy} + v_{xyy} g') u_x v_x v_{xy} \\ &\quad - (v_{xx} + v_{xy} g') v_x u_{xy} v_{xy} - (u_{xxy} + u_{xyy} g') v_x^2 v_{xy} \\ &\quad - (u_{xx} + u_{xy} g') u_x u_{xy} v_{xy} - (u_{xxy} + u_{xyy} g') u_x^2 v_{xy} \\ &\quad - (v_{xx} + v_{xy} g') u_x v_{xy}^2 - (v_{xxy} + v_{xyy} g') u_x v_x v_{xy} \\ &\quad + (u_{xx} + u_{xy} g') v_x u_{xy}^2 + (u_{xxy} + u_{xyy} g') u_x v_x u_{xy} \\ &\quad + (v_{xx} + v_{xy} g') v_x u_{xy} v_{xy} + (v_{xxy} + v_{xyy} g') v_x^2 u_{xy} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (u_{xx} + u_{xy}g') (u_{xy}^2 + v_{xy}^2) v_x - (v_{xx} + v_{xy}g') (u_{xy}^2 + v_{xy}^2) u_x \\
&+ (v_{xxy} + v_{xyy}g') (u_x^2 + v_x^2) u_{xy} - (u_{xxy} + u_{xyy}g') (u_x^2 + v_x^2) v_{xy} \\
&= (u_{xy}^2 + v_{xy}^2) ((u_{xx}v_x - v_{xx}u_x) + (u_{xy}v_x - v_{xy}u_x)g') \\
&+ (u_x^2 + v_x^2) ((v_{xxy}u_{xy} - u_{xxy}v_{xy}) + (v_{xyy}u_{xy} - u_{xyy}v_{xy})g') \\
&= (u_{xy}^2 + v_{xy}^2) ((u_xu_{xy} + v_xv_{xy}) - (u_xv_{xy} - v_xu_{xy})g') \\
&+ (u_x^2 + v_x^2) ((u_{xy}v_{xxy} - v_{xy}u_{xxy}) + (u_{xy}u_{xxy} + v_{xy}v_{xxy})g') \\
&= \frac{1}{u_xu_{xy} + v_xv_{xy}} \cdot ((u_{xy}^2 + v_{xy}^2) ((u_xu_{xy} + v_xv_{xy})^2 \\
&+ (u_xv_{xy} - v_xu_{xy})^2) + (u_x^2 + v_x^2) ((u_{xy}v_{xxy} - v_{xy}u_{xxy}) \\
&\cdot (u_xu_{xy} + v_xv_{xy}) - (u_{xy}u_{xxy} + v_{xy}v_{xxy})(u_xv_{xy} - v_xu_{xy}))).
\end{aligned}$$

Wir schalten eine Nebenrechnung ein:

$$\begin{aligned}
&(u_xu_{xy} + v_xv_{xy})^2 + (u_xv_{xy} - v_xu_{xy})^2 \\
&= u_x^2u_{xy}^2 + 2u_xu_{xy}v_xv_{xy} + v_x^2v_{xy}^2 + u_x^2v_{xy}^2 \\
&\quad - 2u_xv_{xy}v_xu_{xy} + v_x^2u_{xy}^2 \\
&= (u_x^2 + v_x^2) (u_{xy}^2 + v_{xy}^2) \\
&(u_{xy}v_{xxy} - v_{xy}u_{xxy})(u_xu_{xy} + v_xv_{xy}) - (u_{xy}u_{xxy} + v_{xy}v_{xxy}) \\
&\quad \cdot (u_xv_{xy} - v_xu_{xy}) \\
&= u_xu_{xy}^2v_{xxy} - u_xu_{xy}v_{xy}u_{xxy} + v_xu_{xy}v_{xy}v_{xxy} \\
&\quad - v_xv_{xy}^2u_{xxy} \\
&- u_xu_{xy}v_{xy}u_{xxy} - u_xv_{xy}^2v_{xxy} + v_xu_{xy}^2u_{xxy} \\
&\quad + v_xu_{xy}v_{xy}v_{xxy} \\
&= u_{xy}^2(u_xv_{xxy} + v_xu_{xxy}) - v_{xy}^2(u_xv_{xxy} + v_xu_{xxy}) \\
&- 2u_{xy}v_{xy}u_xu_{xxy} + 2u_{xy}v_{xy}v_xv_{xxy} \\
&= (u_{xy}^2 - v_{xy}^2)(u_xv_{xxy} + v_xu_{xxy}) \\
&\quad - 2u_{xy}v_{xy}(u_xu_{xxy} - v_xv_{xxy}).
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir:

$$m = \frac{1}{u_x u_{xy} + v_x v_{xy}} \left((u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 (u_x^2 + v_x^2) + (u_x^2 + v_x^2) \cdot ((u_{xy}^2 - v_{xy}^2)(u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy}) - 2 u_{xy} v_{xy} (u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy})) \right).$$

Also ist:

$$g'' = - \frac{u_x^2 + v_x^2}{(u_x u_{xy} + v_x v_{xy})^3} \cdot ((u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 + (u_{xy}^2 - v_{xy}^2) \cdot (u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy}) - 2 u_{xy} v_{xy} (u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy})).$$

2.2.3.2. Nun berechnen wir die Krümmung $k^*(z)$ des Bildbogens von B im Bildpunkte des Punktes $z = x + ig(x)$.

Für den Bildbogen haben wir die Parameterdarstellung:

$$u = u(x, g(x)), \quad v = v(x, g(x)).$$

Wir setzen:

$$\frac{d(u(x, g(x)))}{dx} = u', \quad \frac{d^2(u(x, g(x)))}{dx^2} = u'';$$

$$\frac{d(v(x, g(x)))}{dx} = v', \quad \frac{d^2(v(x, g(x)))}{dx^2} = v''.$$

Dann gilt:

$$k^* = \frac{v'' u' - u'' v'}{(u'^2 + v'^2)^{3/2}}.$$

Nun ist aber:

$$u' = u_x + u_y g' = u_x - v_x g', \quad u'' = u_{xx} + 2 u_{xy} g' + u_{yy} g'^2 + u_y g'' = v_{xy} + 2 u_{xy} g' - v_{xy} g'^2 - v_x g'';$$

$$v' = v_x + v_y g' = v_x + u_x g', \quad v'' = v_{xx} + 2 v_{xy} g' + v_{yy} g'^2 + v_y g'' = -u_{xy} + 2 v_{xy} g' + u_{xy} g'^2 + u_x g''.$$

Also ist

$$u'^2 + v'^2 = u_x^2 - 2 u_x v_x g' + v_x^2 g'^2 + v_x^2 + 2 u_x v_x g' + u_x^2 g'^2 = (u_x^2 + v_x^2) (1 + g'^2)$$

$$v'' u' - u'' v' = (-u_{xy} + 2 v_{xy} g' + u_{xy} g'^2 + u_x g'')(u_x - v_x g') - (v_{xy} + 2 u_{xy} g' - v_{xy} g'^2 - v_x g'')(v_x + u_x g')$$

$$\begin{aligned}
&= -u_{xy}u_x + 2v_{xy}u_xg' + u_{xy}u_xg'^2 + u_x^2g'' \\
&\quad + v_xu_{xy}g' - 2v_xv_{xy}g'^2 - v_xu_{xy}g'^3 - u_xv_xg'g'' \\
&\quad - v_xv_{xy} - 2v_xu_{xy}g' + v_xv_{xy}g'^2 + v_x^2g'' \\
&\quad - u_xv_{xy}g' - 2u_xu_{xy}g'^2 + u_xv_{xy}g'^3 + u_xv_xg'g'' \\
&= -(u_xu_{xy} + v_xv_{xy}) + (u_xv_{xy} - v_xu_{xy})g' \\
&\quad - (u_xu_{xy} + v_xv_{xy})g'^2 + (u_xv_{xy} - v_xu_{xy})g'^3 \\
&\quad + (u_x^2 + v_x^2)g'' \\
&= \frac{1}{(u_xu_{xy} + v_xv_{xy})^3} \left(-(u_xu_{xy} + v_xv_{xy})^4 \right. \\
&\quad - 2(u_xu_{xy} + v_xv_{xy})^2(u_xv_{xy} - v_xu_{xy})^2 \\
&\quad \left. - (u_xv_{xy} - v_xu_{xy})^4 \right) + (u_x^2 + v_x^2)g'' \\
&= -\frac{(u_x^2 + v_x^2)^2(u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2}{(u_xu_{xy} + v_xv_{xy})^3} + (u_x^2 + v_x^2)g''.
\end{aligned}$$

Wir werden auf diese Beziehungen später zurückgreifen.

2.3. Die krümmungsähnlich abgebildeten Bogen. Durch $x(t)$, $y(t)$ (mit $x'^2 + y'^2 \neq 0$) sei in G ein zweimal stetig differenzierbarer Bogen B gegeben. Dann ist auch der Bildbogen zweimal stetig differenzierbar. $k(t)$ sei die Krümmung des Urbildbogens im Punkte $z(t) = x(t) + iy(t)$; $k^*(t)$ sei die Krümmung des Bildbogens im Bildpunkte von $z(t)$. $|f'(z)|$ ist die Dehnung der Abbildung $f(z)$ im Punkte $z = z(t)$.

Definition: Wir sagen der Punkt $z(t)$ unseres Urbildbogens B werde durch $f(z)$ gleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet, wenn gilt: $k^*(t) |f'(z(t))| = k(t)$; wir sagen, er werde durch $f(z)$ ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet, wenn gilt: $k^*(t) |f'(z(t))| = -k(t)$.

Werden alle Punkte des Urbildbogens B gleichsinnig (ungleichsinnig) krümmungsähnlich abgebildet, so sagen wir, der Urbildbogen selbst werde gleichsinnig (ungleichsinnig) krümmungsähnlich abgebildet.

2.3.1. Über gleichsinnig krümmungsähnlich abgebildete Punkte von Bögen gilt folgender Satz:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Punkt $z(t)$ eines in G gelegenen zweimal stetig differenzierbaren Bogens $x(t), y(t)$ mit $x'^2 + y'^2 \neq 0$ durch $f(z)$ gleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet wird, ist, daß der Bogen in diesem Punkt der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$x'(u_{xx}v_x - v_{xx}u_x) + y'(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x) = 0. \quad (2)$$

2.3.1.1. Die Bedingung ist notwendig.

Für die Krümmung $k(t)$ des Urbildbogens im Punkte $z(t)$ gilt:

$$k(t) = \frac{y''x' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

wobei:

$$u' = \frac{d}{dt}(u(x(t), y(t))), \quad v' = \frac{d}{dt}(v(x(t), y(t)))$$

$$u'' = \frac{d^2}{dt^2}(u(x(t), y(t))), \quad v'' = \frac{d^2}{dt^2}(v(x(t), y(t))).$$

Für die Krümmung $k^*(t)$ des Bildbogens im Bildpunkte von $z(t)$ gilt:

$$k^*(t) = \frac{v''u' - u''v'}{(u'^2 + v'^2)^{3/2}}.$$

Nun ist aber:

$$u' = u_x x' + u_y y'; \quad u'' = u_{xx} x'^2 + 2u_{xy} x' y' + u_{yy} y'^2 + u_x x'' + u_y y''$$

$$v' = v_x x' + v_y y'; \quad v'' = v_{xx} x'^2 + 2v_{xy} x' y' + v_{yy} y'^2 + v_x x'' + v_y y''.$$

Also ist:

$$\begin{aligned} u'^2 + v'^2 &= u_x^2 x'^2 + 2u_x u_y x' y' + u_y^2 y'^2 + v_x^2 x'^2 + 2v_x v_y x' y' + v_y^2 y'^2 \\ &= (u_x^2 + v_x^2) x'^2 + (u_y^2 + v_y^2) y'^2 + 2(u_x u_y + v_x v_y) x' y' \\ &= (u_x^2 + v_x^2) (x'^2 + y'^2) \end{aligned}$$

und:

$$\begin{aligned} v''u' - u''v' &= (v_{xx} x'^2 + 2v_{xy} x' y' + v_{yy} y'^2 + v_x x'' + v_y y'') \\ &\quad \cdot (u_x x' + u_y y') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - (u_{xx} x'^2 + 2 u_{xy} x' y' + u_{yy} y'^2 + u_x x'' + u_y y'') \cdot (v_x x' + v_y y') \\
& = v_{xx} u_x x'^3 + 2 v_{xy} u_x x'^2 y' + v_{yy} u_x x' y'^2 \\
& \quad + u_x v_x x' x'' + u_x v_y x' y'' \\
& \quad + v_{xx} u_y x'^2 y' + 2 v_{xy} u_y x' y'^2 + v_{yy} u_y y'^3 \\
& \quad + v_x u_y x'' y' + v_y u_y y'' y' \\
& - u_{xx} v_x x'^3 - 2 u_{xy} v_x x'^2 y' - u_{yy} v_x y'^2 x' \\
& \quad - u_x v_x x'' x' - u_y v_x y'' x' \\
& - u_{xx} v_y x'^2 y' - 2 u_{xy} v_y x' y'^2 - u_{yy} v_y y'^3 \\
& \quad - u_x v_y x'' y' - u_y v_y y'' y' \\
& = (v_{xx} u_x - u_{xx} v_x) (x'^3 + x' y'^2) \\
& \quad + (v_{yy} u_y - v_y u_{yy}) (y' x'^2 + y'^3) \\
& \quad + (u_x v_y - v_x u_y) (y'' x' - x'' y') \\
& = (x'^2 + y'^2) [(v_{xx} u_x - u_{xx} v_x) x' \\
& \quad + (u_{xx} u_x + v_{xx} v_x) y'] \\
& \quad + (u_x^2 + v_x^2) (y'' x' - x'' y').
\end{aligned}$$

Aus $k^*(t) |f'(z(t))| = k(t)$ folgt daher:

$$\begin{aligned}
& \frac{(x'^2 + y'^2) [(v_{xx} u_x - u_{xx} v_x) x' + (u_{xx} u_x + v_{xx} v_x) y'] + (u_x^2 + v_x^2) (y'' x' - x'' y')}{[(u_x^2 + v_x^2) (x'^2 + y'^2)]^{3/2}} \cdot \\
& \cdot (u_x^2 + v_x^2)^{1/2} = \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Also gilt: $-(u_{xx} v_x - v_{xx} u_x) x' + (u_{xx} u_x + v_{xx} v_x) y' = 0$,
w. z. b. w.

2.3.1.2. Die Bedingung ist hinreichend.

Dies sieht man sofort aus der Umkehrbarkeit der Schlüsse, die zu dieser Gleichung führten.

2.3.2. Über ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildete Bögen gilt folgender Satz:

Notwendig und hinreichend dafür, daß ein Punkt $z = z(t)$ eines in G gelegenen zweimal stetig differenzierbaren Bogens $x(t), y(t)$

mit $x'^2 + y'^2 \neq 0$ durch $f(z)$ ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet wird, ist, daß der Bogen in diesem Punkt der folgenden Differentialgleichung genügt:

$$\begin{aligned} & -(u_{xx}v_x - v_{xx}u_x)x' + (u_{xx}u_x + v_{xx}v_x)y' \\ & = -2(u_x^2 + v_x^2) \frac{y''x' - x''y'}{x'^2 + y'^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Die Tatsache, daß diese Bedingung notwendig ist, ergibt sich aus der Gleichung $k^*(t) |f'(z(t))| = -k(t)$ unter Benutzung der schon in 2.3.1.1. verwendeten Ausdrücke für $k^*(t)$, $k(t)$ und $|f'(z(t))|$; die Tatsache, daß sie hinreichend ist, folgt aus der Umkehrbarkeit der dabei verwendeten Schlüsse.

2.4.1. Nun beweisen wir, daß die in 2.1. formulierte Bedingung für die Existenz einer ähnlich im Großen abgebildeten, in sich dichten Teilmenge T von G notwendig ist.

2.4.1.1. Die Überlegungen von 2.2.2. zeigen, daß in allen Punkten von T mit Ausnahme von höchstens einer Menge, die keinen Häufungspunkt besitzt, gilt:

$$\left(\frac{\partial(u_x^2 + v_x^2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(u_x^2 + v_x^2)}{\partial y} \right)^2 \neq 0.$$

Sie zeigen weiter, daß zu jedem Punkt $P \in T$, in dem dies gilt, ein analytischer Bogen B existiert, der P enthält und ganz in der in G vollständigen Punktmenge konstanter Dehnung T^* liegt, die P enthält. Da unsere Menge T ähnlich im Großen abgebildet wird und in sich dicht ist, ist sie eine Menge konstanter Dehnung und damit eine Teilmenge von T^* . Nach dem Satz über implizite Funktionen gibt es in der Ebene eine (offene) Umgebung U_P des Punktes P , derart, daß alle Punkte des Durchschnitts $D^* = T^* \cap U_P$ auf dem Bogen B liegen. Dann liegen erst recht alle Punkte des Durchschnitts $D = T \cap U_P$ auf dem Bogen B . Da U_P nur innere Punkte enthält und T in sich dicht ist, ist damit jeder Bogenpunkt, der zu D gehört, ein Häufungspunkt von Bogenpunkten, die zu D gehören. Da weiter die Abbildung für T und damit auch für die Teilmenge D von T ähnlich im Großen ist, folgt daraus, daß die Abbildung für sämtliche Punkte des Bogens B , die zu D gehören, entweder gleichsinnig oder ungleichsinnig

krümmungsähnlich oder beides ist, wobei letzteres nur in Punkten von B möglich ist, in denen die Krümmung verschwindet.

Wir können nun beweisen:

In sämtlichen Punkten von D ist die Abbildung des Bogens B ungleichsinnig krümmungsähnlich.

Dazu nehmen wir an $z(t)$ sei ein Punkt des Bogens B , der zu D gehört und der gleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet werde. Dann genügt der Bogen in diesem Punkte den Differentialgleichungen (1) und (2).

Es gilt also:

$$x'(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x) + y'(u_{xx}v_x - v_{xx}u_x) = 0$$

$$\text{und: } -x'(u_{xx}v_x - v_{xx}u_x) + y'(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x) = 0.$$

Daraus folgt wegen $x'^2 + y'^2 \neq 0$:

$$(u_{xx}u_x + v_{xx}v_x)^2 + (u_{xx}v_x - v_{xx}u_x)^2 = 0$$

Damit ist aber: $u_{xx}u_x + v_{xx}v_x = 0$ und $u_{xx}v_x - v_{xx}u_x = 0$,

woraus wegen $u_x^2 + v_x^2 = |f'(z)|^2 \neq 0$ folgt: $u_{xx} = 0$ und $v_{xx} = 0$.

Also ist in diesem Punkte $f''(z) = u_{xx} + i v_{xx} = 0$.

Dies ist aber wegen $f(z) \neq az + b$ nur in einer Punktmenge möglich, die keinen Häufungspunkt besitzt. Wäre nun die Abbildung in einem Punkt von D gleichsinnig krümmungsähnlich ohne zugleich ungleichsinnig krümmungsähnlich zu sein, so wäre dieser Punkt ein Häufungspunkt von Punkten von D , in denen aus Stetigkeitsgründen dasselbe der Fall ist. Das ist aber nach dem oben gezeigten nicht möglich. Damit ist bewiesen, daß die Abbildung des Bogens B in allen Punkten von D ungleichsinnig krümmungsähnlich ist.

Nun beweisen wir weiter:

Die Abbildung des Bogens B ist in allen seinen Punkten ungleichsinnig krümmungsähnlich.

Wir wissen bereits, daß alle Punkte von B , die zu D gehören, ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet werden. Also genügt der Bogen B nach 2.3.2. in allen Punkten von D der Differentialgleichung (3). Beide Seiten dieser Gleichung sind analytische Funktionen des Parameters t . Die Menge D enthält

unendlich viele Punkte mit mindestens einem Häufungspunkt. Aus der Gültigkeit der Gleichung für die Punkte von D folgt daher ihre Gültigkeit für den ganzen Bogen B . Nach 2.3.2. folgt daraus aber die ungleichsinnige Krümmungsähnlichkeit der Abbildung für den ganzen Bogen B .

2.4.1.2. Der Bogen B genügt also in allen seinen Punkten den beiden Differentialgleichungen (1) und (3), das heißt es gilt überall in B :

$$\begin{aligned} x' (u_{xx} u_x + v_{xx} v_x) + y' (u_{xx} v_x - v_{xx} u_x) &= 0 \\ y' (u_{xx} u_x + v_{xx} v_x) - x' (u_{xx} v_x - v_{xx} u_x) \\ &= -2 (u_x^2 + v_x^2) \frac{y'' x' - x'' y'}{x'^2 + y'^2}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} u_{xx} u_x + v_{xx} v_x &= -2 (u_x^2 + v_x^2) \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} \cdot y' \\ u_{xx} v_x - v_{xx} u_x &= 2 (u_x^2 + v_x^2) \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} \cdot x'. \end{aligned}$$

Und daraus folgt weiter:

$$\begin{aligned} u_{xx} &= -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} (u_x y' - v_x x') \\ v_{xx} &= -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} (u_x x' + v_x y'). \end{aligned}$$

Damit ist aber:

$$\begin{aligned} u_{xx} + i v_{xx} &= -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} ((u_x y' - v_x x') + i (u_x x' + v_x y')) \\ &= -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} (u_x + i v_x) (y' + i x'). \end{aligned}$$

$$\text{Also ist: } f''(z) = -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} \cdot f'(z) \cdot (y' + i x').$$

Bezeichnen wir nun mit $\bar{u}$ den Realteil, mit $\bar{v}$ den Imaginärteil von $\frac{f''(z)}{f'(z)}$, so gilt:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} y' \\ \bar{v} &= -2 \frac{y'' x' - x'' y'}{(x'^2 + y'^2)^2} x'. \end{aligned} \quad (4)$$

Der Bogen B hat also die behaupteten Eigenschaften.

2.4.2. Wir beweisen weiter, daß die in 2.1. formulierte Bedingung für die Existenz einer ähnlich im Großen abgebildeten, in sich dichten Teilmenge T von G auch hinreichend ist.

Gibt es in dem Gebiet G einen Bogen B , der die Bedingungen (4) erfüllt, so erfüllt er in allen seinen Punkten auch die beiden Differentialgleichungen (1) und (3), da sich die vorhin gebildete Schlußkette rückwärts durchlaufen läßt. Dieser Bogen B ist also eine Punktmenge konstanter Dehnung und wird zugleich ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet. Sein Bild bezeichnen wir mit $f(B)$, die in seinen Punkten konstante Dehnung mit d .

Nun betrachten wir das Bild des Bogens B , das durch die für die ganze Ebene im Großen ähnliche, nicht analytische Abbildung $g(z) = d\bar{z}$ hervorgerufen wird und bezeichnen es mit $g(B)$. Wir betrachten die natürlichen Gleichungen von $f(B)$ und $g(B)$. Dazu sei $z_0 = z(t_0)$ ein fester, $z = z(t)$ ein veränderlicher Punkt von B .

Für die Bogenlänge $s(t)$ zwischen $f(z(t))$ und $f(z(t_0))$ auf $f(B)$ gilt nach 2.3.1.1. und da B eine Punktmenge konstanter Dehnung ist:

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{t_0}^t \sqrt{u'^2 + v'^2} dt = \int_{t_0}^t \sqrt{(u_x^2 + v_x^2) (x'^2 + y'^2)} dt \\ &= d \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = d \cdot \varphi(t). \end{aligned}$$

$\varphi(t)$ ist streng monoton und damit umkehrbar. Wir schreiben:

$$t = \psi\left(\frac{s}{d}\right).$$

Die Krümmung von B im Punkt $z(t)$ sei $k = k(t)$. Da B durch $f(z)$ ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet wird, gilt für die Krümmung k_f von $f(B)$ in $f(z(t))$: $k_f = -dk(t)$. Also hat $f(B)$ die natürliche Gleichung: $k_f = -d \cdot k \left(\psi\left(\frac{s}{d}\right) \right)$.

Für die Bogenlänge $\sigma(t)$ zwischen $g(z(t))$ und $g(z(t_0))$ auf $g(B)$ gilt:

$$\sigma(t) = d \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = d \cdot \varphi(t).$$

Die Funktionen $s(t)$ und $\sigma(t)$ sind also identisch. Damit gilt auch: $t = \psi\left(\frac{\sigma}{d}\right)$.

Da B durch $g(z)$ ebenfalls ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet wird, gilt für die Krümmung k_g von $g(B)$ in $g(z(t))$: $k_g = -dk(t)$. Damit bekommt man für die natürliche Gleichung von $g(B)$: $k_g = -d \cdot k\left(\psi\left(\frac{\sigma}{d}\right)\right)$. Also haben $f(B)$ und $g(B)$ dieselbe natürliche Gleichung, gehen also nach dem Fundamentalsatz über die natürliche Gleichung durch eine Bewegungstransformation auseinander hervor. Damit ist aber gezeigt, daß B und $f(B)$ im Großen ähnlich sind. Die Bedingung ist also auch hinreichend und B selbst wird im Großen ähnlich abgebildet.

§ 3. Der Zusammenhang zwischen einer analytischen Funktion und den durch sie im Großen ähnlich abgebildeten, in sich dichten Punktmengen

3.1. Die bisherigen Ergebnisse führen uns auf zwei Aufgaben.

1. Ist $f(z)$ eine gegebene, von $az + b$ verschiedene, analytische Funktion einschließlich aller ihrer möglichen analytischen Fortsetzungen, so ist die Gesamtheit aller in sich dichten Punktmengen anzugeben, deren jede für sich durch $f(z)$ ähnlich im Großen abgebildet wird.

2. Zu einer gegebenen in sich dichten Punktmenge T ist die Gesamtheit aller analytischen Abbildungen von Gebieten, die die Punktmenge T enthalten, anzugeben, bei denen die Punktmenge T im Großen ähnlich abgebildet wird.

3.2. Wir wenden uns zunächst der Aufgabe 1. zu.

3.2.1. Aus den Überlegungen von 2.2.2. zum Beweise des Satzes, daß jede in einem Gebiet G vollständige Punktmenge konstanter Dehnung M einen analytischen Bogen enthält, können wir erschließen, daß alle Punkte von M , mit Ausnahme einer Punktmenge, die keinen Häufungspunkt besitzt, im Innern von analytischen Bögen liegen, die selbst wieder ganz zu M gehören. Daraus folgt, daß die größte in sich dichte Punktmenge, die in M enthalten ist, eine Vereinigung analytischer Bögen ist. Enthält ein solcher analytischer Bogen einen Punkt P einer in sich dichten

Punktmenge, die ähnlich im Großen abgebildet wird, so wird nach 2.4.1.1. der ganze Bogen ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet. Wie in 2.4.2. erschließen wir daraus, daß die Abbildung für diesen Bogen ähnlich im Großen ist. Damit ist aber jede in sich dichte, im Großen ähnlich abgebildete Menge T Teilmenge einer Vereinigung analytischer Bögen. Und *die größte in sich dichte, zu einer bestimmten konstanten Dehnung gehörige Punktmenge, die ähnlich im Großen abgebildet wird, ist selbst eine Vereinigung analytischer Bögen.*

3.2.2. Es gilt folgender Satz:

Vor.: Es sei $f(z) \neq az + b$ und analytisch, $f'(z) \neq 0$ und $\frac{f''(z)}{f'(z)} = \bar{u}(x, y) + i\bar{v}(x, y)$.

Weiter sei $F(x, y) = 2\bar{u}_x(\bar{u}^2 - \bar{v}^2) + 4\bar{v}_x\bar{u}\bar{v} - (\bar{u}^2 + \bar{v}^2)^2$.

Beh.: Notwendig dafür, daß ein Punkt P der Ebene einer in sich dichten Punktmenge T angehört, die durch $f(z)$ im Großen ähnlich abgebildet wird, ist, daß er folgenden beiden Gleichungen genügt: $F = 0$, $F_x\bar{v} + F_y\bar{u} = 0$.⁵

Beweis: P ist Punkt eines analytischen Bogens B , der ähnlich im Großen abgebildet wird. In B gelten aber die beiden Gleichungen (4) von 2.4.1.2. O. B. d. A. sei dabei: $x'^2 + y'^2 = 1$. Daraus folgt dann: $\bar{u}x' - \bar{v}y' = 0$ und daraus durch Differentiation: $\bar{u}_x x'^2 + \bar{u}_y x'y' - \bar{v}_x x'y' - \bar{v}_y y'^2 + u x'' - v y'' = 0$ oder $\bar{u}_x(x'^2 - y'^2) - 2\bar{v}_x x'y' + 2(y''x - x''y)^2 = 0$ und daraus durch Multiplikation mit $8(x''y' + x'y'')^2$: $F(x, y) = 0$. Durch Differentiation folgt daraus weiter: $F_x x' + F_y y' = 0$ und daraus wieder durch Multiplikation mit $-2(y''x' - x''y')$: $F_x\bar{v} + F_y\bar{u} = 0$.

3.3. Zur Aufgabe 2. beweisen wir folgenden Satz:

Hinreichend dafür, daß eine in sich dichte Punktmenge T durch eine analytische Funktion $f(z) \neq az + b$ ähnlich im Großen abgebildet werden kann, ist, daß T auf einem analytischen Bogen liegt, der keine Strecke ist.

⁵ Das Erfülltsein dieser beiden Gleichungen in einer in sich dichten Menge von Punkten erfordert die Gültigkeit von sehr speziellen Beziehungen zwischen den Koeffizienten der Taylorentwicklungen von $\bar{u}$ und $\bar{v}$. In diesem Sinne kann man sagen, daß die Bedingung im allgemeinen nicht erfüllt ist.

Beweis:

T liege auf dem analytischen Bogen B gegeben durch $z(t) = x(t) + iy(t)$, wobei gelte $x'^2 + y'^2 \neq 0$. Mit $g(\zeta)$ bezeichnen wir die Funktion $x(\zeta) + iy(\zeta)$ wobei ζ komplex sein darf. Wegen $x'^2 + y'^2 \neq 0$ kann man für ein Gebiet, das das ganze Intervall des Parameters t enthält, von $z = g(\zeta)$ die Umkehrfunktion $\zeta = h(z)$ bilden.

Nun setzen wir:

$$H(z) = -2 \frac{y''(\zeta)x'(\zeta) - x''(\zeta)y'(\zeta)}{((x'(\zeta))^2 + (y'(\zeta))^2)^2} (y'(\zeta) + ix'(\zeta))$$

$$\text{und } f(z) = a \cdot \int e^{\int H(z) dz} dz + b.$$

Weil der Bogen keine Strecke ist, ist $H(z) \neq 0$ und damit $f(z) \neq az + b$. Es folgt nun: $\frac{f''(z)}{f'(z)} = H(z)$ und daraus für alle Punkte unseres analytischen Bogens die Gültigkeit der Gleichungen (4) von 2.4.1.2. Nach 2.4.2. wird dann aber der ganze Bogen im Großen ähnlich abgebildet und damit auch die auf ihm gelegene Menge T .

Aus 2.4.1.1. folgt, daß es einen analytischen Bogen B gibt, der bei allen Abbildungen, die für T ähnlich im Großen sind, ebenfalls ähnlich im Großen abgebildet wird. Auf Grund der Überlegungen von 2.4.1. und der Beziehungen (4) ergibt sich: $\frac{f''(z)}{f'(z)}$ ist durch diesen Bogen eindeutig bestimmt. Dann ist aber $f(z)$ durch diesen Bogen bis auf eine Abbildung von der Form $az + b$ eindeutig bestimmt. Wir haben also den folgenden Satz:

Eine analytische Abbildung, die eine auf einem analytischen Bogen gelegene, in sich dichte Punktmenge T ähnlich im Großen abbildet, ist durch T bis auf eine Abbildung von der Gestalt $az + b$ eindeutig bestimmt.

§ 4. Die im Großen ähnlich abgebildeten, in sich dichten Punkt- mengen überdecken ein ganzes Gebiet

4.1. Liegt jeder Punkt eines Gebietes G in einer in sich dichten Punktmenge T , die durch $f(z) \neq az + b$ im Großen ähnlich abgebildet wird, so liegt jeder Punkt von G sogar auf einem analytischen Bogen B , der durch $f(z)$ im Großen ähnlich, und zwar ungleichsinnig krümmungsähnlich abgebildet wird.

Daher gilt: $k^*(z) |f'(z)| = -k(z)$.

Aus dieser Gleichung folgt mit Berücksichtigung der Ergebnisse von 2.2.3.:

$$\frac{1}{(u_x^2 + v_x^2)^{3/2} (1 + g'^2)^{3/2}} \left(- \frac{(u_x^2 + v_x^2)^2 (u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2}{(u_x u_{xy} + v_x v_{xy})^3} + (u_x^2 + v_x^2) g'' \right) \\ = - \frac{1}{(u_x^2 + v_x^2)^{1/2}} \cdot \frac{g''}{(1 + g'^2)^{3/2}}$$

und nach leichter Rechnung: $(u_x^2 + v_x^2) (u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 = 2 g'' (u_x u_{xy} + v_x v_{xy})^3$.

Mit Berücksichtigung des Wertes für g'' bekommen wir:

$$(u_x^2 + v_x^2) (u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 = -2 (u_x^2 + v_x^2) ((u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 + \\ + (u_{xy}^2 - v_{xy}^2) (u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy}) \\ - 2 u_{xy} v_{xy} (u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy}))$$

oder:

$$3 (u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 = -2 (u_{xy}^2 - v_{xy}^2) (u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy}) + \\ + 4 u_{xy} v_{xy} (u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy}). \quad (5)$$

Für den Fall, daß der Bogen B nicht in der Form $y = g(x)$, sondern in der Form $x = h(y)$ vorliegt, ergibt eine entsprechende Rechnung ebenfalls die Beziehung (5).

Im ganzen Gebiet G gilt daher für den Realteil u und den Imaginärteil v von $f(z)$ das folgende System partieller Differentialgleichungen:

$$u_x = v_y, \\ v_x = -u_y, \\ 3 (u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 = -2 (u_{xy}^2 - v_{xy}^2) (u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy}) + \\ + 4 u_{xy} v_{xy} (u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy}). \quad (6)$$

4.2. Wir lösen das System (6).

Dazu machen wir folgenden Ansatz:

$$u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy} = -\frac{3}{2} (u_{xy}^2 - v_{xy}^2) + p, \\ u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy} = 3 u_{xy} v_{xy} + q.$$

Damit bekommen wir:

$$\begin{aligned}
 3(u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 &= -2(u_{xy}^2 - v_{xy}^2) \left(-\frac{3}{2}(u_{xy}^2 - v_{xy}^2) + p \right) + \\
 &\quad + 4u_{xy}v_{xy}(3u_{xy}v_{xy} + q) \\
 &= 3(u_{xy}^2 - v_{xy}^2)^2 - 2(u_{xy}^2 - v_{xy}^2)p + 3 \cdot 4u_{xy}^2v_{xy}^2 + \\
 &\quad + 4u_{xy}v_{xy}q \\
 &= 3(u_{xy}^2 + v_{xy}^2)^2 - 2(u_{xy}^2 - v_{xy}^2)p + 4u_{xy}v_{xy}q;
 \end{aligned}$$

also: $0 = -(u_{xy}^2 - v_{xy}^2)p + 2u_{xy}v_{xy}q.$

Daraus folgt die Existenz einer reellen Funktion s der beiden Variablen x und y , für die gilt:

$$p = s \cdot 2u_{xy}v_{xy}, \quad q = s(u_{xy}^2 - v_{xy}^2).$$

Also ist:

$$\begin{aligned}
 u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy} &= 3u_{xy}v_{xy} + s(u_{xy}^2 - v_{xy}^2) \\
 u_x v_{xxy} + v_x v_{xxy} &= -\frac{3}{2}(u_{xy}^2 - v_{xy}^2) + s \cdot 2u_{xy}v_{xy}.
 \end{aligned}$$

Wir multiplizieren die zweite dieser beiden Gleichungen mit i und addieren das Ergebnis zu der ersten:

$$\begin{aligned}
 (u_x u_{xxy} - v_x v_{xxy}) + i(u_x v_{xxy} + v_x u_{xxy}) &= \frac{3}{2}(2u_{xy}v_{xy} - i(u_{xy}^2 - v_{xy}^2)) \\
 &\quad + s((u_{xy}^2 - v_{xy}^2) + i \cdot 2u_{xy}v_{xy}) \\
 (u_x + i v_x)(u_{xxy} + i v_{xxy}) &= -\frac{3}{2}i((u_{xy}^2 - v_{xy}^2) + i \cdot 2u_{xy}v_{xy}) \\
 &\quad + s((u_{xy}^2 - v_{xy}^2) + i \cdot 2u_{xy}v_{xy}) \\
 &= (u_{xy} + i v_{xy})^2 \left(s - \frac{3}{2}i \right).
 \end{aligned}$$

Nun ist aber:

$$\begin{aligned}
 u + i v &= f(z), \quad u_x + i v_x = f'(z), \quad u_{xy} + i v_{xy} = i f''(z), \\
 u_{xxy} + i v_{xxy} &= i f'''(z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Daraus folgt: } f'(z) i f'''(z) &= -(f''(z))^2 \left(s - \frac{3}{2}i \right) \\
 f'(z) f'''(z) &= (f''(z))^2 \left(\frac{3}{2} + s i \right).
 \end{aligned}$$

Nun gibt es in G eine Stelle z_0 , für die gilt: $f''(z_0) \neq 0$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von $f''(z)$ eine Kreisscheibe K mit dem Mittelpunkt z_0 , für deren Inneres $f''(z)$ durchweg von Null verschieden ist. Wir beschränken uns bis auf weiteres auf die Betrachtung von K . Wir haben:

$$s = \frac{1}{i} \left(\frac{f'(z) f'''(z)}{(f''(z))^2} - \frac{3}{2} \right).$$

Also ist s eine analytische Funktion. Da die Funktion s aber nur reeller Werte fähig ist, ist sie eine Konstante.

Wir haben also:

$$f'(z) \cdot \frac{f'''(z)}{(f''(z))^2} = \frac{3}{2} + si$$

wobei s eine reelle Konstante ist.

Durch partielle Integration bekommen wir:

$$\begin{aligned} \int f'(z) \cdot \frac{f'''(z)}{(f''(z))^2} dz &= f'(z) \cdot \left(-\frac{1}{f''(z)} \right) - \int f''(z) \cdot \left(-\frac{1}{f''(z)} \right) dz \\ &= \left(\frac{3}{2} + si \right) \cdot z + C_1 \end{aligned}$$

$$-\frac{f'(z)}{f''(z)} + z = \left(\frac{3}{2} + si \right) z + C_1$$

$$-\frac{f'(z)}{f''(z)} = \left(\frac{1}{2} + si \right) z + C_1$$

$$-\frac{f''(z)}{f'(z)} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + si \right) z + C_1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{2} + si \right)} \cdot \frac{\frac{1}{2} + si}{\left(\frac{1}{2} + si \right) z + C_1}$$

$$-\log f'(z) = \frac{1}{\frac{1}{2} + si} \cdot \log \left(\left(\frac{1}{2} + si \right) z + C_1 \right) + C_2$$

$$\frac{1}{f'(z)} = (k_1 z + k_2) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + si}$$

$$f'(z) = (k_1 z + k_2) \cdot \frac{1}{\frac{1}{2} + si}$$

$$= (k_1 z + k_2) \cdot \frac{2}{1 + ti},$$

wenn wir $t = 2s$ setzen und k_1 und k_2 zwei komplexe willkürliche Konstanten sind, wobei nur $k_1 \neq 0$ sein muß.

Daraus folgt:

$$f(z) = \frac{1}{k_1} (k_1 z + k_2)^{-\frac{2}{1+ti}+1} \cdot \frac{1}{-\frac{2}{1+ti}+1} + C_3.$$

$$= (az + b)^{-\frac{1-ti}{1+ti}} + c. \quad (7)$$

Nach dem Prinzip der analytischen Fortsetzung ist damit $f(z)$ auch für das ganze Gebiet G bestimmt.

4.3. Wir betrachten die Abbildung (7) mit $a \neq 0$ und untersuchen die Punktmengen konstanter Dehnung. Da $w = az + b$ ähnlich im Großen in jedem Gebiet ist, und die Addition der Konstanten c nur eine Parallelverschiebung bedeutet, genügt es den Fall $a = 1$, $b = c = 0$ zu betrachten.

Aus

$$f(z) = z^{-\frac{1-ti}{1+ti}} = e^{-\frac{1-ti}{1+ti} \cdot \log z}$$

folgt:

$$f'(z) = e^{-\frac{1-ti}{1+ti} \cdot \log z} \cdot \left(-\frac{1-ti}{1+ti} \cdot \frac{1}{z} \right)$$

$$= e^{-\frac{2}{1+ti} \cdot \log z} \cdot \left(-\frac{1-ti}{1+ti} \right).$$

Wir setzen $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ und haben:

$$f'(z) = e^{-\frac{2(1-ti)}{1+t^2} (\log r + i \varphi)} \cdot \left(-\frac{1-ti}{1+ti} \right)$$

$$e^{-\frac{2}{1+t^2} (\log r + t \varphi + i (\varphi - t \cdot \log r))} \cdot \left(-\frac{1-ti}{1+ti} \right).$$

Also ist:

$$|f'(z)| = e^{-\frac{2}{1+t^2} (\log r + t \varphi)}.$$

Aus $|f'(z)| = \text{const}$ folgt daher: $\log r + t \varphi = k$, wobei k und t reelle Konstante sind. Umgekehrt ist jede Punktmenge, die einer Gleichung von der Gestalt $\log r + t \varphi = k$ genügt, eine Punktmenge gleicher Dehnung von $f(z)$. $\log r + t \varphi = k$ oder $r = e^{-t \varphi + k}$ ist die Gleichung einer logarithmischen Spirale. Also sind alle Punktmengen der gleichen konstanten Dehnung von $f(z)$ Teilmengen einer logarithmischen Spirale.

Wir haben nun noch zu zeigen, daß die Abbildung $w = f(z)$ für diese ihre Punktmengen gleicher Dehnung auch tatsächlich ähnlich im Großen ist.

Wegen $\log r = k - t\varphi$ ist:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^{-\frac{1-ti}{1+ti}(\log r + i\varphi)} = e^{-\frac{1}{1+t^2}((1-t^2) - 2ti)(-t\varphi + k + i\varphi)} \\ &= e^{-\frac{1}{1+t^2}((t^3\varphi - t^2k + t\varphi + k) + i(t^2\varphi - 2th + \varphi))} \\ &= e^{-h\frac{1-t^2}{1+t^2} - t\varphi + i\left(\frac{2th}{1+t^2} - \varphi\right)}. \end{aligned}$$

Nun seien z_1 und z_2 zwei Punkte derselben Punktmenge gleicher Dehnung, das heißt es gelte: $\log r_1 = -t\varphi_1 + k$, $\log r_2 = -t\varphi_2 + k$.

Dann ist:

$$\begin{aligned} |f(z_1) - f(z_2)|^2 &= e^{-2h\frac{1-t^2}{1+t^2}} \left(\left(e^{-t\varphi_1} \cos\left(\frac{2kt}{1+t^2} - \varphi_1\right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - e^{-t\varphi_2} \cos\left(\frac{2kt}{1+t^2} - \varphi_2\right) \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(e^{-t\varphi_1} \sin\left(\frac{2kt}{1+t^2} - \varphi_1\right) - e^{-t\varphi_2} \sin\left(\frac{2kt}{1+t^2} - \varphi_2\right) \right)^2 \right) \\ &= e^{-2h\frac{1-t^2}{1+t^2}} (e^{-2t\varphi_1} + e^{-2t\varphi_2} - 2e^{-t(\varphi_1+\varphi_2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Andererseits ist:

$$\begin{aligned} |z_1 - z_2|^2 &= |e^{\log r_1 + i\varphi_1} - e^{\log r_2 + i\varphi_2}|^2 = |e^{-t\varphi_1 + k}(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ &\quad - e^{-t\varphi_2 + k}(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)|^2 \\ &= e^{2k} (e^{-2t\varphi_1} + e^{-2t\varphi_2} - 2e^{-t(\varphi_1+\varphi_2)} \cos(\varphi_1 - \varphi_2)). \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right|^2 = e^{-2h\frac{1-t^2}{1+t^2} - 2k} = e^{-\frac{4h}{1+t^2}}.$$

Also ist:

$$\left| \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2} \right| = e^{-\frac{2h}{1+t^2}} = \text{const} = |f'(z)|.$$

4.4. Damit haben wir folgenden Satz:

Vor.: $f(z) \neq az + b$ sei in einem Gebiet G analytisch.

Beh.: *Notwendig und hinreichend dafür, daß jeder Punkt von G zu einer in sich dichten Teilmenge T von G gehört, die für sich ähnlich im Großen abgebildet wird, ist, daß $f(z)$ von folgender Gestalt ist*

$$f(z) = (az + b)^{-\frac{1-ti}{1+ti}} + c,$$

wobei $a \neq 0$ ist, sonst aber a, b, c bzw. t beliebige komplexe bzw. reelle Konstanten sind.

Jede bei einer derartigen Abbildung ähnlich im Großen abgebildete, in sich dichte Punktmenge ist Teilmenge einer logarithmischen Spirale.

Man sieht sofort: Sind auch konforme Abbildungen zugelassen, die zu einer analytischen konjugiert komplex sind, so bekommt man noch die Möglichkeiten, die aus den Funktionen der obigen Gestalt entstehen, wenn man z durch $\bar{z}$ ersetzt.

§ 5. Beziehungen zu einem Satze von Liouville

Im Falle der konformen Abbildung eines Gebietes der (zweidimensionalen) Zahlenebene sind die vollständigen Punktmengen konstanter Dehnung Bogensummen. Diese Punktmengen werden im allgemeinen nicht ähnlich im Großen abgebildet. Fordert man zusätzlich für jede von ihnen die Ähnlichkeit im Großen, so wird die Gesamtheit der dann noch möglichen konformen Abbildungen stark eingeschränkt, nämlich auf die Abbildungen der Form (7) aus 4.2. Die betrachteten Bögen konstanter Dehnung werden logarithmische Spiralen.

Im Falle von $n \geq 3$ Dimensionen sind dagegen nach Liouville bei konformer Abbildung eines Gebietes (unter geeigneten Differenzierbarkeitsvoraussetzungen) die vollständigen Punktmengen konstanter Dehnung Summen von $(n-1)$ -Zellen, die überdies der starken Einschränkung unterliegen Teilmengen je einer und derselben $(n-1)$ -dimensionalen Sphäre zu sein und die außerdem noch, ohne, daß dies zusätzlich gefordert zu werden braucht, ähnlich im Großen abgebildet werden. Es liegt hier also stets von

selbst der Fall vor, den wir in der Einleitung als Möglichkeit (3) bezeichnet haben, wobei an die Stelle der logarithmischen Spiralen die $(n - 1)$ -Sphären treten.

Daß für $n \geq 3$ nicht aber für $n = 2$ die Punktmengen konstanter Dehnung von selbst ähnlich im Großen abgebildet werden, erscheint plausibel, wenn man folgendes bedenkt:

Bei einer Approximation dieser Flächen konstanter Dehnung durch $(n - 1)$ -dimensionale Polyeder ist im Falle $n \geq 3$ ein solches Polyeder durch seine Kanten (im allgemeinen) völlig bestimmt, das heißt starr. Im Falle $n = 2$ dagegen ist bei einer Approximation der Bogen konstanter Dehnung durch Streckenzüge ein solcher Streckenzug durch seine einzelnen Strecken nicht vollständig bestimmt, also nicht starr.

Es wäre denkbar, daß diese und eine unserer Behandlung der Möglichkeit (3) im Falle $n = 2$ entsprechende Überlegung zu einem Beweise des Liouvilleschen Satzes ausgebaut werden können, der im Sinne der direkt-geometrischen Methoden mit der Existenz der punktalen Dehnung als alleiniger Voraussetzung auskommt.