Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zurückführung einiger Integrale auf einfachere

Von Hanfried Lenz in München

Vorgelegt von Herrn O. Perron am 6. Juli 1951

§ 1. Zusammenstellung der Behauptungen

1. Im folgenden sollen einige über die bekannten[1,2,3] hinausgehenden Integrale angegeben werden, die sich auf elliptische bzw. hyperelliptische Integrale vom Geschlecht 2 reduzieren lassen und die bei konformen Abbildungen von Polygonen auf die Halbebene nach H. A. Schwarz vorkommen.

Wir nennen der Kürze halber ein Integral

$$\int R(z) \prod_{\nu=1}^{n} (z - z_\nu)^{\gamma_\nu} \, dz \tag{1}$$

mit $\gamma_\nu \not\equiv 0 \pmod{1}$ und $\sum\limits_{\nu=1}^{n} \gamma_\nu \equiv 0 \pmod{1}$ ein Integral vom Typus $(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$, ebenso jedes Integral, das aus (1) durch Weglassung eines der Faktoren $(z - z_\nu)^{\gamma_\nu}$ im Integranden entsteht. $R(z)$ bedeute eine nicht näher bestimmte rationale Funktion, ebenso wie die später auftretenden Abkürzungen $R_1(Z)$, $R_2(u)$ usw. Die komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_n$ werden als verschieden vorausgesetzt.

Der Typus eines Integrals (1) ändert sich nicht, wenn man a) zu den Exponenten γ_ν beliebige ganze Zahlen addiert; b) die γ_ν beliebig vertauscht; c) die Integrationsveränderliche z linear transformiert.

Man könnte den Typus auch durch die Forderung $0 < \gamma_\nu \leqq \leqq \gamma_{\nu+1} < 1$ normieren, doch soll das hier nicht geschehen.

---

[1] Wolfgang Gröbner und Nikolaus Hofreiter, „Integraltafel, erster Teil", insbes. S. 96–106, Wien u. Innsbruck 1949.

[2] Robert Fricke, „Elliptische Funktionen", Enzykl. d. math. Wiss. II B 3, S. 344–345.

[3] A. M. Legendre, „Traité des Fonctions elliptiques", Bd. I bis III, Paris 1825–1828.

2. Es wird nun behauptet:

Alle Integrale von den in folgender Tabelle angegebenen Typen lassen sich auf elementare und elliptische bzw. auf elementare, elliptische und hyperelliptische Integrale vom Geschlecht 2 zurückführen.

Nr.	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4	Zurückführbar auf Integrale vom Geschlecht $p \leqq 1$	$p \leqq 2$
1	$\frac{n}{m}$	$\frac{n'}{m}$	$\frac{-n-n'}{m}$		für $m = 3, 4, 6, 8$	für $m = 5, 10$
2	$\frac{n}{m}$	$\frac{n}{m}$	$\frac{-2n}{m}$		für $m = 3, 4, 6, 8, 12$	für $m = 5, 10, 16$
3	$\frac{n}{12}$	$\frac{n}{4}$	$\frac{-n}{3}$		stets	—
4	$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{2} - \frac{n}{m}$	$\frac{1}{2}$		für $m = 3, 4, 6, 8, 12$	für $m = 5, 10, 16$
5	$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{2} + \frac{n}{m}$	$\frac{1}{2} - \frac{2n}{m}$		für $m = 3, 6, 8, 12, 16, 24$	für $m = 5, 10, 20, 3$
6	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{n}{m}$	$\frac{-n}{m}$	für $m = 2, 3, 4$	für $m = 5, 6, 8$
7	$\frac{n}{m}$	$\frac{n}{m}$	$\frac{-n}{m}$	$\frac{-n}{m}$	für $m = 3, 4$	für $m = 5, 6, 8$
8	$\frac{n}{m}$	$\frac{n}{m}$	$\frac{1}{2} - \frac{n}{m}$	$\frac{1}{2} - \frac{n}{m}$	für $m = 3, 4, 6, 8, 12$	für $m = 5, 10, 16$

Dabei sind n, n' beliebige ganze Zahlen. Ferner lassen sich auf elliptische Integrale zurückführen:

Nr. 9: $$\int R(z)\,(z^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}\,(z^2 - b^2)^{n/m}\,(z^2 - c^2)^{-n/m}\,dz$$

für $m = 2$ (Legendre), 3, 4.

Nr. 10: $$\int R\left(z, \sqrt[m]{a^m - z^m}\right) dz$$

für $m = 3, 4, 6, 8$.

Nr. 11: $$\int R\left(z, \sqrt[m]{a^m - z^m}, \sqrt[m]{b^m - z^m}\right) dz$$

für $m = 2, 3, 4$.

§ 2. Beweis der Behauptungen

3. Man überzeugt sich leicht, daß die Behauptung Nr. 1 der Tabelle, die nur der Übersichtlichkeit halber dasteht, aus den übrigen folgt. Es genügt also, Nr. 2 bis 11 zu beweisen.

4. Hilfssatz 1: Die Integrale

$$\int R(z) \sqrt{(a^m - z^m)(b^m - z^m)}\, dz \tag{2}$$

lassen sich für $m = 2, 3, 4$ auf elliptische, für $m = 5, 6, 8$ auf hyperelliptische vom Geschlecht 2 zurückführen. Das Integral

$$\int R(z) \sqrt{(1 - z^{12})}\, dz \tag{3}$$

läßt sich auf (elementare und) elliptische Integrale zurückführen.

Wir beweisen zunächst den bekannten ([2] S. 344; [3] I S. 254, III S. 333 ff.)

Hilfssatz 2: Das hyperelliptische Integral

$$J = \int R(z) \sqrt{\prod_{\nu=1}^{6} (z - z_\nu)}\, dz$$

ist auf elliptische reduzierbar, wenn die sechs Verzweigungspunkte $z_1, z_2, \ldots, z_6$ sich so zu 3 Paaren zusammenfassen lassen, daß ein zu diesen Paaren gemeinsam harmonisches Punktepaar existiert.

Bringen wir nämlich dieses Paar durch lineare Transformation nach 0 und ∞, so wird, wenn Z die transformierte Variable ist, aus J ein Integral

$$J = \int R_1(Z) \sqrt{(Z^2 - a^2)(Z^2 - b^2)(Z^2 - c^2)}\, dZ,$$

das nach der Substitution $Z^2 = u$ unmittelbar in zwei elliptische Integrale zerfällt, wie schon Legendre gezeigt hat ([1] S. 97, Formel 251.6; [3] I S. 259 ff.). Wichtige Sonderfälle sind die Integrale

$$\int R(z) \sqrt{z(a^2 - z^2)(b^2 - z^2)}\, dz \quad \text{und} \tag{4}$$

$$\int R(z) \sqrt{(a^3 - z^3)(b^3 - z^3)}\, dz. \tag{5}$$

In beiden Fällen erfüllt das Punktepaar $\pm\sqrt{ab}$ die Bedingung des Hilfssatzes 2. (Im ersten Fall ist der 6. Verzweigungspunkt $z = \infty$.)

Aus (4) wird nach der Substitution $z = u^2$ ein Integral (2) mit $m = 4$, und umgekehrt läßt sich jedes solche Integral durch diese Substitution in ein Integral (4) und ein elliptisches Integral zerlegen ([1] S. 102, Formel 251.11; [3] I S. 255).

Damit sind die Behauptungen des Hilfssatzes 1 für $m = 2, 3, 4$ bewiesen.

5. Wir betrachten nun das Integral (2) mit $m = 6$. Es zerfällt nach der Substitution $z^2 = Z$ in ein nach Hilfssatz 2 (Formel (5)) auf elliptische Integrale reduzierbares Integral und ein Integral

$$\int R_1(Z)\sqrt{Z(a^6 - Z^3)(b^6 - Z^3)}\,dZ. \tag{6}$$

Die acht Verzweigungsstellen des Integranden liegen paarweise harmonisch zum Punktepaar $\pm ab$, daher läßt sich unser Integral durch lineare Transformation auf die Form (P_4 bedeute ein Polynom 4. Grades)

$$\int R_2(u)\sqrt{P_4(u^2)}\,du$$

bringen. Die Substitution $u^2 = v$ spaltet das Integral dann in ein elliptisches und ein hyperelliptisches vom Geschlecht 2.

In dem Sonderfall $-a^6 = b^6 = 1$ wird aus (6)

$$\int R_1(Z)\sqrt{-Z(1-Z^6)}\,dZ. \tag{7}$$

Die Verzweigungsstellen des Integranden liegen bei 0, ∞ und in den sechs 6. Einheitswurzeln, also symmetrisch zur reellen und zur imaginären Achse, sowie zum Einheitskreis. Führt man nun die imaginäre Achse durch eine lineare Transformation $Z = Z(u)$ so in sich über, daß Einheitskreis und reelle Achse sich vertauschen, so werden die neuen Verzweigungspunkte $u = \pm 1, \pm i, \pm k, \pm k^{-1}$ mit reellem k. Das Integral (7) wird zu

$$\int R_2(u)\sqrt{(1-u^4)(k^2-u^2)(1-k^2u^2)}\,du. \tag{8}$$

Die Substitution $u^2 = v$ spaltet (8) in ein elliptisches Integral und ein Integral

$$\int R_3(v) \sqrt{v(1-v^2)(k^2-v)(1-k^2 v)}\, dv. \tag{9}$$

Die Verzweigungsstellen dieses Integrals liegen bei ± 1, k^2, k^{-2}, 0 und ∞. Führt man nun die reelle Achse linear so in sich über, daß der Einheitskreis in die imaginäre Achse übergeht, so wird aus (9) ein Integral der Form (4). Damit ist die Behauptung über das Integral (3) bewiesen. (Über einen Sonderfall vgl. [3] II S. 384.)

6. Das Integral (2) für $m = 5$ hat zehn Verzweigungspunkte, die paarweise harmonisch zum Punktepaar $\pm\sqrt{ab}$ liegen. Bringt man dieses Paar durch lineare Transformation nach 0 und ∞, so entsteht ein Integral

$$\int R_1(Z) \sqrt{P_5(Z^2)}\, dZ, \tag{10}$$

wobei P_5 ein Polynom 5. Grades bedeutet. Die Substitution $Z^2 = u$ zerlegt nun unser Integral in die Summe zweier hyperelliptischer Integrale vom Geschlecht 2.

7. Das Integral (2) für $m = 8$ zerfällt nach der Substitution $z^2 = Z$ in ein Integral

$$\int R_1(Z) \sqrt{(a^8-Z^4)(b^8-Z^4)}\, dZ,$$

von dem schon gezeigt wurde, daß es sich auf elliptische Integrale reduzieren läßt, und ein Integral

$$\int R_2(Z) \sqrt{Z(a^8-Z^4)(b^8-Z^4)}\, dZ.$$

Die Verzweigungspunkte des Integranden liegen paarweise harmonisch zu den Punkten ab und $-ab$. Das Integral läßt sich daher durch lineare Substitution in eines von der Form (10) überführen, also in zwei Integrale vom Geschlecht 2 zerlegen. Damit ist der Hilfssatz 1 vollständig bewiesen.

8. Wir betrachten nun Integrale vom Typus $\left(\frac{n}{m}, \frac{1}{2} - \frac{n}{m}, \frac{1}{2}\right)$. Sie lassen sich auf die Form

$$\int R(z)\, z^{n/m} \sqrt{1-z}\, dz$$

bringen. Die Substitution $z = Z^m$ liefert ein Integral

$$\int R_1(Z)\ \sqrt{1-Z^m}\ dZ.$$

Nach Hilfssatz 1 folgt daraus die Behauptung Nr. 4.

9. Integrale vom Typus $\left(\frac{n}{m}, \frac{n}{m}, -\frac{2n}{m}\right)$ lassen sich in der Form

$$\int R(z)\ (1-z^2)^{n/m}\ dz$$

schreiben. Nach der Substitution $1 - z^2 = Z^m$ wird daraus eine Summe

$$\int R_1(Z)\, dZ + \int R_2(Z)\ \sqrt{1-Z^m}\, dZ,$$

woraus sich nach Hilfssatz 1 die Behauptung Nr. 2 ergibt.

10. Hilfssatz 3: Es sei $\alpha + \beta \equiv \frac{1}{2}$ (mod. 1). Dann läßt sich jedes Integral der Typen $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$ und $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta\right)$ auf Integrale vom Typus $\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\right)$ zurückführen.

Beweis: I. Es sei ein Integral

$$\int R(z)\ (z-z_1)^\alpha\ (z-z_2)^\alpha\ (z-z_3)^\beta\ (z-z_4)^\beta\ dz$$

gegeben, wobei die Punkte $z_1, \ldots, z_4$ verschieden sind. Dann gibt es bekanntlich ein zu den Punktepaaren (z_1, z_2) und (z_3, z_4) gemeinsam harmonisches Punktepaar (z_0, z_∞), das nicht in einen Punkt zusammenfällt. Bringen wir z_0 und z_∞ durch lineare Transformation nach 0 und ∞, so erhalten wir ein Integral

$$\int R_1(Z)\ (Z^2 - a^2)^\alpha\ (Z^2 - b^2)^\beta\ dZ,$$

das nach der Substitution $Z^2 = u$ in eine Summe zweier Integrale vom Typ $\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}\right)$ zerfällt.

II. Jedes Integral vom Typ $\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha+1}{2}, \beta\right)$ läßt sich in der Form

$$\int R(z)\ z^{\alpha/2}\ (1-z)^\beta\ dz$$

schreiben. Die Substitution $z = Z^2$ ergibt ein Integral

$$\int R_1(Z)\, Z^\alpha (1-Z^2)^\beta\, dZ,$$

das vom Typus $(\alpha, \alpha, \beta, \beta)$ ist und nach I behandelt wird. W. z. b. w. Aus Behauptung Nr. 4 und Hilfssatz 3 folgen nun die Behauptungen Nr. 8 und Nr. 5.

11. Behauptung Nr. 3 ergibt sich daraus, daß das Integral

$$\int R(z)\, z^{n/12} (1-z)^{n/4}\, dz$$

nach der Substitution $z = Z^3$ in

$$\int R_1(Z)\, [Z(1-Z^3)]^{n/4}\, dZ$$

übergeht, d. h. in ein Integral vom Typus Nr. 8 mit $m = 4$, falls n ungerade ist, sonst in ein elliptisches oder elementares Integral.

12. Das Integral

$$\int R(z)\, z^{n/m} \sqrt{(a-z)(b-z)}\, dz$$

wird nach der Substitution $z = Z^m$ zu

$$\int R_1(Z) \sqrt{(a-Z^m)(b-Z^m)}\, dZ.$$

Nach Hilfssatz 1 folgt daraus Behauptung Nr. 6.

13. Integrale vom Typus $\left(\frac{n}{m}, \frac{n}{m}, \frac{-n}{m}, \frac{-n}{m}\right)$ lassen sich nach geeigneter linearer Transformation (vgl. Beweis zu Hilfssatz 3, I) auf die Form

$$\int R(z) \left(\frac{z^2-a^2}{z^2-b^2}\right)^{n/m} dz$$

bringen. Die Substitution

$$\frac{z^2-a^2}{z^2-b^2} = Z^m, \qquad z^2 = \frac{a^2-b^2 Z^m}{1-Z^m}$$

liefert eine Summe

$$\int R_1(Z)\, dZ + \int R_2(Z) \sqrt{(a^2-b^2 Z^m)(1-Z^m)}\, dZ.$$

Daraus folgt die Behauptung Nr. 7 wegen Hilfssatz 1.

14. Das Integral

$$\int R(z)\,(z^2-a^2)^\alpha\,(z^2-b^2)^\beta\,(z^2-c^2)^\gamma\,dz$$

mit $\alpha+\beta+\gamma\equiv\frac{1}{2}$ (mod. 1) zerfällt nach der Substitution $z^2=Z$ in zwei Integrale vom Typus $\left(\alpha,\beta,\gamma,\frac{1}{2}\right)$, woraus auf Grund der bereits bewiesenen Behauptung Nr. 6 die Behauptung Nr. 9 folgt.

15. Behauptung Nr. 10 und 11 ergibt sich daraus, daß die betreffenden Integrale nach der Substitution $z^m=Z$ in Summen von Integralen der bereits erledigten Typen (nämlich Nr. 1, 6, 7, 8) übergehen. Damit ist alles bewiesen.