

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1951

München 1952

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Entstehung des Saturnringes

Von Hans Bucerius, München

Mit 2 Figuren

Vorgelegt von E. Schoenberg am 4. Mai 1951

Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren von Satelliten, deren Rotationsperiode mit der Umlaufsperiode in einer Kreisbahn um den Zentralplaneten zusammenfällt, hatten E. Roche (1848) zu dem Ergebnis geführt, daß in Bahnabständen

$$(1) \quad a < 2.455 R \left(\frac{s'}{s} \right)^{1/3}$$

vom kugelförmigen Zentralkörper mit Radius R und der konstanten Dichte s' keine Gleichgewichtsfigur eines im Vergleich zu a kleinen, ideal flüssigen Satelliten der homogenen Dichte s existiert. Beim Planeten Saturn befindet sich das Ringsystem innerhalb dieser Grenzdistanz, was Roche bereits zu der Hypothese veranlaßte, daß der Saturnring keine zusammenhängende Masse sei, sondern aus einer Vielzahl von Teilchen meteorischer Größenordnung bestehe, was erst 1905 von Keeler spektroskopisch aus der Dopplerverschiebung der Linien des von den Ringteilchen reflektierten Sonnenlichtes endgültig bestätigt wurde. Aus Stabilitätsbetrachtungen war schon früher hervorgegangen, daß es sich auch nicht um einen starren Ring handeln könne. Die potentielle Energie eines Ringkörpers hat nämlich im Mittelpunkt ein Maximum; dieser ist also für einen Probestkörper eine Stelle der Labilität, so daß ein starrer Ring bei einer kleinen Störung mit dem Zentralkörper zusammenstoßen würde.

Die Rochesche Instabilitätszone bezieht sich auf ideale Flüssigkeiten. Dies bedeutet, daß der Satellit dem Gezeitenfeld des Zentralkörpers und seinem Zentrifugalfeld lediglich seine Eigengravitation entgegensetzt. Dies schränkt die physikalische Bedeutung dieser Grenzdistanz ein; denn wenn zur Eigengravitation noch innere Kohäsionskräfte molekularer Natur hinzu-

kommen, kann ein Satellit durchaus innerhalb der Roche'schen Grenze existenzfähig bleiben. Wenn wir mithin im folgenden den Gedanken näher ausführen wollen, daß die Saturnringe der Gezeitenwirkung des Planeten auf einen Urmond ihre Entstehung verdanken, so sei die Frage nach den physikalischen Voraussetzungen für den Zerfall der Materie des ursprünglichen Mondes offengelassen. Es wird hierfür vielleicht nicht ohne Bedeutung sein, daß die thermodynamische Gleichgewichtstemperatur eines schwarzen Körpers in Saturnentfernung von der Sonne, die den Wärmehaushalt des Saturnsystems bestreitet, etwa 90° K beträgt, da bei so tiefen Temperaturen Grobkörper brüchig werden. Die Dimension der Bruchstücke variiert von der grob dispersen Phase (Felsblöcke, Staubkörner) bis zur Molekülgröße. Für den A-Ring konnte z. B. aus photometrischen Daten im Zusammenhang mit der Gesamtmasse des Ringes auf Trümmer von etwa 100 m Durchmesser geschlossen werden, während vor allem beim B-Ring rein photometrische Untersuchungen (E. Schoenberg) auf feinste Staubteilchen führten. Nach erfolgter Auflösung des ursprünglichen Satelliten in Trümmer und kosmischen Staub sprechen wir von einem inkohärenten Medium, da weder die Eigenschaften eines Gases noch die einer Flüssigkeit realisiert sind.

Die Inhabilitätsbedingungen für eine kugelförmige Wolke inkohärenter Materie lassen sich elementar ableiten, wenn wir ihr im Sinne des Rocheschen Problems eine gebundene Rotation ω zuschreiben.

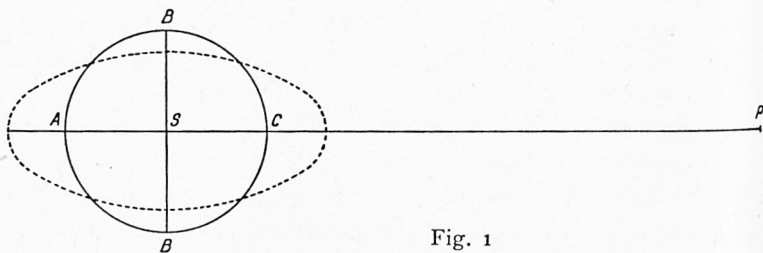


Fig. 1

Da der Radius ρ der Wolke klein gegen den Abstand a vom Zentralplaneten der Masse M sein soll, wirkt an den Stellen A bzw. C der Trümmerkugel die differentielle Beschleunigung in der

Richtung $\vec{SA}$ bzw. $\vec{SC}$

$$\pm \rho \frac{d}{da} \left(-\frac{GM}{a^2} \right) = \pm \frac{2GM\rho}{a^3}$$

($G = \text{Grav.-Konst.}$). Die differentielle Zentrifugalbeschleunigung an diesen Stellen ist gleichsinnig $\pm \rho \omega^2$. Da aber bei Vernachlässigung der kleinen Masse m des Satelliten gegenüber M

$$\omega^2 = \frac{GM}{a^3}$$

ist, so ist die in A und C wirksame Gesamtbeschleunigung

$$(2) \quad \pm \left(\frac{2GM\rho}{a^3} + \rho \omega^2 \right) = \pm \frac{3GM\rho}{a^3}.$$

Unter Beibehaltung dieser vereinfachten Annahmen führt bereits die Forderung, daß diese zusätzliche Beschleunigung nicht die Eigenanziehung der Satellitenmasse übersteigen darf, zu einer Instabilitätsbedingung für die inkohärente Wolke

$$\frac{3GM\rho}{a^3} > \frac{Gm}{\rho^2}$$

d. h. in der Schreibweise der Rocheschen Formel für homogene Massen

$$(3) \quad a < \rho \left(\frac{3M}{m} \right)^{1/3} = 1.44 R \left(\frac{s'}{s} \right)^{1/3}.$$

Der Unterschied gegen die homogene Flüssigkeit rührt von der Deformation zu einem dreiachsigen Ellipsoid her mit einer Längsachse zum Planeten hin mit 1.63ρ . Dies in (3) statt ρ gesetzt gibt bereits den Faktor 2.36. Der verbleibende Unterschied gegen (1) beruht auf der Verminderung der Anziehung an den Enden der großen Achse eines Ellipsoides im Vergleich zur Kugel gleicher Masse. Tatsächlich wird sich eine inkohärente Masse mehr dem Rocheschen Bilde entsprechend verzerren. Die Beibehaltung der Kugelform führte natürlich zu einer Verkleinerung der Instabilitätszone um den Zentralplaneten.

Sie kann weiter verkleinert werden durch Annahme von inneren Kohäsionskräften (Jeffreys), so daß der Faktor 2.45 der Rocheschen Formel eine Art obere Grenze darstellt; nur durch Voraussetzung einer größeren Eigenrotation könnte man die

Instabilitätszone noch mehr ausdehnen. Wegen der Gezeitenreibung kann man aber die Annahme der gebundenen Rotation nicht ohne weiteres aufgeben. Der Variabilität des Zahlenfaktors je nach den physikalischen Voraussetzungen über die Natur des Satelliten überlagert sich bei der Anwendung der Formel noch die Unsicherheit des Dichteverhältnisses von Zentralplanet und Trabant. Die mittlere Dichte des Saturn ist 0.7, während man über die Dichte der Saturnmonde noch keine zuverlässige Aussage machen kann. Aber der Einfluß dieses Verhältnisses wird durch die dritte Wurzel gemildert. Nimmt man für den Saturnradius rund $R = 60000$ km und die Erstreckung des Ringsystems 138000 km als Grenze des A-Ringes, 90000 km als innere Grenze des B-Ringes, woran sich noch der C-Ring mit 10000 km Breite anschließt, so bestehen jedenfalls keine Schwierigkeiten für eine Kosmogonie des Saturnringes aus einem innerhalb der Instabilitätszone aufgelösten Urmond. Ausführlichere Erörterung erfordert aber der Prozeß der Auflösung des Urmondes, nachdem er infolge Verlustes seiner Kohärenz im großen eine Teilchenwolke geworden ist. Diese Frage soll Hauptgegenstand der folgenden Überlegungen sein.

Für eine quantitative Behandlung dieser Entstehung des Saturnringes müssen wir uns zunächst eine Abschätzung der Dimensionen des Urkörpers verschaffen, was die Kenntnis der Gesamtmasse des Ringes voraussetzt. Der einzige Weg dazu sind die säkularen Störeffekte des Ringes auf die ringnächsten Saturntrabanten (Mimas, Dione, Tethys). Die Schwierigkeit besteht darin, daß die Störungen der beträchtlichen Abplattung des Saturn selbst sich überlagern und von der Wirkung des Ringes separiert werden müssen. Bedient man sich, wie es früher geschah, gewisser Reihenentwicklungen des Ringpotentials, die nur bei genäherter Kugelgestalt eines Körpers oder in großen Entfernungen gut konvergieren, so besteht keine Hoffnung, diese Trennung zu erreichen. Erst eine exakte Ableitung des Ringpotentials gibt die Möglichkeit, die Wirkungen des Ringes und der Abplattung des Saturn auf seine Monde in ihrer Abhängigkeit vom Radiusvektor hinreichend zu unterscheiden, um aus den Säkularstörungen auf die Ringmasse und die dynamische Abplattung des Planeten getrennt schließen zu können. Auf Grund

der neuesten Beobachtungen des Saturnsystems von G. Struve konnte so eine ältere Schätzung der Ringmasse von H. Struve durch eine quantitative Bestimmung überholt werden, die $1/23270$ der Saturnmasse ergab. Da die Beobachtungsgenauigkeit dabei bis zum Äußersten ausgenutzt wird, kommt dem Wert nur eine größenordnungsmäßige Bedeutung zu. Nehmen wir eine mittlere Dichte 2 an, so entspricht dem Ring eine kugelförmige Masse vom Durchmesser 2900 km. Die Gezeitenverzerrung der Kugel würde nach den obigen Betrachtungen eine große Längsachse des Ellipsoides von 4700 km bedingen. Diese Angaben genügen zur vorläufigen Fixierung der Größenordnung.

Wir idealisieren den Auflösungsprozeß zunächst dahingehend, daß sich eine ellipsoidisch verzerrte Trümmerwolke mit ihrem Schwerpunkt S auf einer Kreisbahn vom Radius a um den Saturn bewege, und vernachlässigen ihre Eigengravitation gegenüber derjenigen des Saturn, da die Wolke sich in der Instabilitätszone bewegt. Wir brauchen nur die Bahnen der Teilchen bei A und C zu beschreiben, da diejenigen der übrigen freien Teilchen zwischen den beiden Extremen verlaufen. Bei dem angenommenen instantanen Aufhören der Kohärenz hat man für A und C die transversalen Anfangsgeschwindigkeiten $(a \pm \rho)\omega$, für S die Kreisbahngeschwindigkeit $a\omega$. Wir sehen zunächst auch noch von der Abplattung des Saturn ab und behandeln ihn als kugelsymmetrisch. Die Teilchen A und C werden vom Moment an, wo sie frei geworden sind, keine Kreisbahn mehr beschreiben können, da A eine zu große, C eine zu kleine Geschwindigkeit für eine Kreisbahn mit Radius $a + \rho$ bzw. $a - \rho$ besitzt. Vielmehr befinden sich A und C in diesem Moment im Peri- bzw. Aposaturnium einer selbständigen Keplerellipse um den Planeten. Wir wollen große Halbachse a^* und Exzentrizität e^* dieser extremen Ellipsen berechnen. Im Peri- bzw. Apozentrum einer Ellipsenbahn gelten die Beziehungen

$$(4) \quad a^{*3} (1 \mp e^*)^3 \omega^2 = GM (1 \pm e^*).$$

Dabei ist für A bzw. C bei Beginn der Auflösung

$$(5) \quad a^* (1 \mp e^*) = a \pm \rho,$$

so daß aus (4) folgt

$$(6) \quad (a \pm \rho)^3 \omega^2 = GM(1 \pm e^*).$$

Wegen $a^3 \omega^2 = GM$ ist bei Vernachlässigung quadratischer Terme in e^*

$$(7) \quad e^* = 3 \frac{\rho}{a},$$

da ja ρ/a als klein vorausgesetzt wird. Aus (5) ergibt sich für die großen Halbachsen

$$(8) \quad a^* = a \pm 4\rho.$$

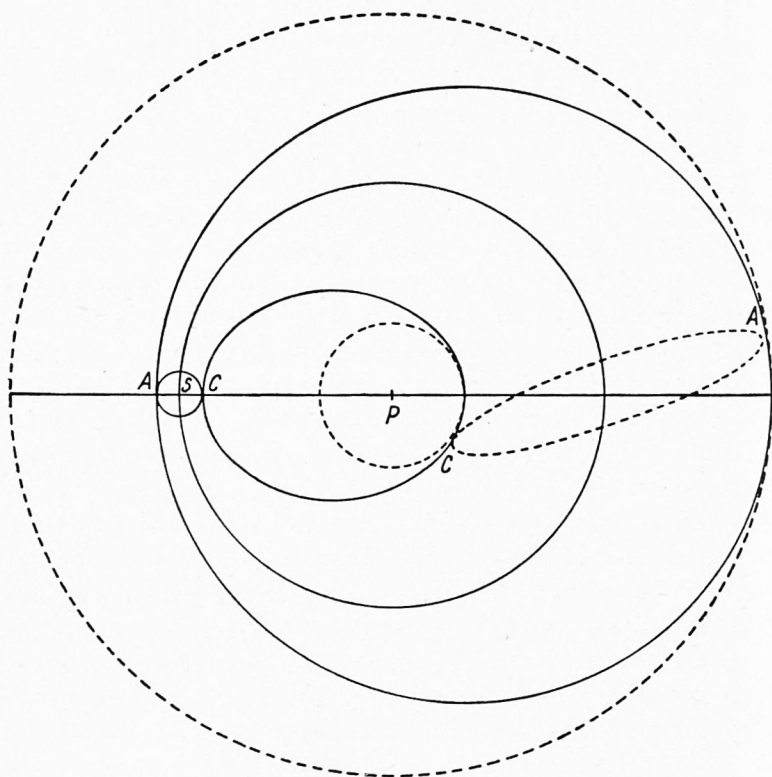


Fig. 2

Vollendet das Teilchen A oder C einen halben Umlauf, so erlangt es einen Abstand

$$(5a) \quad (a \pm 4\rho) \left(1 \pm \frac{3\rho}{a}\right) = a \pm 7\rho \dots$$

Die Wolke erleidet also eine beträchtliche Volumenvergrößerung. Nach einem weiteren halben Umlauf kommen beide Teilchen mit gegenseitiger Verzögerung wieder in A bzw. C an. Bezeichnen wir nämlich die Umlaufzeit des Schwerpunktes mit

$$T = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}},$$

so sind die Umlaufzeiten von A bzw. C

$$(9) \quad T_{A,C} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} (a \pm 4\rho)^{3/2} = T \left(1 \pm \frac{6\rho}{a} \dots\right).$$

Diese differentielle Umlaufszeit der Teilchen vom Betrage

$$\frac{12\rho}{a} \cdot T$$

sorgt für die allmähliche Zerstreuung der Teilchen der Wolke auf ein von den beiden extremen Ellipsen begrenztes Ringgebiet; und zwar hat nach $a/12\rho$ Umläufen das C-Teilchen zum erstenmal das A-Teilchen überrundet. Da die Umlaufszeit eines Teilchens im B-Ring nur 15 Stunden beträgt, ist schon nach wenigen Tagen oder Wochen das beschriebene Ringgebiet mit individuellen Teilchenbahnen erfüllt, aber nicht mit kreisförmiger Begrenzung, wie beim Saturnring. Wir könnten ad hoc verlangen, daß der Zerfall sich allmählich vollzieht, d. h. daß die Teilchenablösung nicht momentan erfolgt, sondern sich über die ganze Kreisbahn zeitlich verteilt, um so zu einer kreisförmigen Begrenzung einer mit Bahnen erfüllten Ringzone der Breite 14ρ zu gelangen, haben dies aber nicht nötig, da ein anderer Störungseffekt des Saturn auch bei dem obigen idealisierten Modell zu einer Verteilung der Bahnen auf die kreisförmige Zone der Breite 14ρ zwangsläufig führt. Da der Saturn nämlich eine starke Abplattung aufweist, hat man an Stelle der Keplerellipsen tatsächlich solche mit säkularer Apsidenvorwärtsdrehung (Rosettenbahnen); und zwar beträgt für eine elliptische Bahn mit großer Halbachse a die Apsidenvorwärtsdrehung pro Umlauf

$$(10) \quad 2\pi C \left(\frac{R}{a}\right)^2.$$

$C = 0.024$ ist die dynamische Abplattungskonstante des Saturnkörpers, die aus den Störungen der Saturnmonde gefunden wird. Beträfe dieser Drehungseffekt alle individuellen Teilchenbahnen gleichmäßig, so würde der elliptische Ring der Fig. 2 lediglich eine gleichmäßige Vorwärtsdrehung erfahren, also nicht eine Verschmierung auf ein Kreisringgebiet. Dies kommt erst zustande durch die differentielle Apsidendrehung der Teilchenbahnen, deren a^* gemäß (8) um $\pm 4\rho$ variieren. Die differentielle Apsidendrehung für die Teilchen A und C beträgt mithin

$$(11) \quad \pm 2\pi C \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cdot \frac{8\rho}{a}$$

pro Umlauf gegenüber einer Bahn mit a als Halbachse. Der Unterschied für A und C wächst in N -Umläufen auf

$$N \cdot 32\pi C \left(\frac{R}{a}\right)^2 \cdot \frac{\rho}{a}$$

an und erreicht 2π , wenn die Apside des innersten Teilchens gerade das erstemal diejenige des äußersten einholt. Dann sind die Trümmer auf den vollen Kreisring zwischen Perisaturniumskreis der C-Teilchen und Aposaturniumskreis der A-Teilchen verteilt. Es dauert nach den bekannten Zahlenwerten nur einige hundert Umläufe, bis auf diese Weise die Gleichverteilung der Bahnachsen in der Ringebene erreicht ist.

Die Breite des so entstandenen Ringes hatten wir oben zu 14ρ gefunden. Da wir $2\rho = 4700$ km annahmen bei einer mittleren Dichte 2, ergibt sich ein Wert von 33000 km. Die Breite des B-Ringes allein beträgt 27000 km, und die Gesamtbreite des Ringsystems wird mit 60000 km nicht zu groß angenommen sein. Dem Dilemma könnte man entgehen durch Zugrundelegung einer unwahrscheinlich geringen mittleren Dichte 0.3 des Urmondes, wodurch seine Ausgangsdimensionen genügend vergrößert würden; oder man könnte mehrere Urmonde dem Ringsystem zuordnen, was aber auch unbefriedigend ist. Sehr einfach erledigt sich diese Schwierigkeit durch Verzicht auf die ohnehin zu spezielle Voraussetzung einer Kreisbahn des Urmondes zugunsten einer elliptischen Bahn der Exzentrizität e mit Apsidenvorwärtsdrehung. Die Exzentrizität der Teilchenbahnen von A und C

wird dann

$$(12) \quad e^* + e = 3 \frac{\rho}{a} + e,$$

ihre großen Halbachsen bleiben aber bei Verzicht auf quadratische Terme in e dieselben $a \pm 4\rho$, wobei jetzt a die große Halbachse der Bahn des Schwerpunktes bedeutet. Die Breite des Ringes wird nunmehr

$$14\rho + 2ea,$$

wobei das Zusatzglied $2ea$ die beobachtete Breite des Ringes mit $a = 100000$ km und $e = 0.13$ erklären kann.

Was die Dichteverteilung im Ring anlangt, so können wir zunächst aus dem Modell der Kreisbahn in einem mittleren Streifen (B-Ring) die größte Dichte erwarten und in den Randgebieten (A- und C-Ring) die geringste, was augenscheinlich mit den Verhältnissen im Saturnring übereinstimmt. Man könnte noch vermuten, daß bei einer exzentrischen Bahn des ursprünglichen Mondes eine Verschiebung der Dichteverhältnisse dadurch bedingt wird, daß im Aposaturnium sich wegen der größeren Verweilzeit der Trümmer eine größere Dichte herausbildet als im Bereich des Perisaturniums. Die so mit Materie belegt gedachte elliptische Bahn (vgl. Gauß' Methode zur Ableitung der säkularen Störungen) wird aber durch die säkulare Apsidendrehung gleichmäßig mit der Winkelgeschwindigkeit $\dot{\nu}_0$ geschwenkt. Für die Belegungsdichte im Radialabstand r vom Saturn haben wir dann einerseits die azimutale Geschwindigkeitskomponente der elliptischen Bahnbewegung $r\dot{\nu}$ (ν als wahre Anomalie) und die überlagerte Geschwindigkeit der Apsidendrehung der Bahn $r\dot{\nu}_0$ zu multiplizieren, um die reziproke mittlere Verweilzeit der Trümmer im Abstand r zu bekommen. Das Produkt $r^2\dot{\nu}_0$ ist aber nach dem Flächensatz konstant, so daß die konstante Apsidendrehung $\dot{\nu}_0$ die unterschiedlichen Verweilzeiten infolge einer elliptischen Bahn des Urmondes gerade kompensiert. Die resultierende Dichteverteilung im Ring bleibt also bei Voraussetzung einer elliptischen Bahn die gleiche wie bei einer Kreisbahn. Der B-Ring ist also der zentralen Masse des Urtrabanten zuzuordnen, während für den A- und C-Ring die masseärmeren Polabschnitte des Trümmerellipsoids an den Punkten A und C das Material lieferten.

Wir haben bisher die Ausdehnung der inkohärenten Wolke in der zur Ringebene senkrechten Richtung außer acht gelassen. Infolge des Gezeitendruckes in den Richtungen BS (Fig. 1) vom Betrage

$$\frac{GM\rho}{a^3}$$

hat das Rochesche Grenzellipsoid als Ausgangsfigur nur die Dicke 0.8ρ . Bei einsetzender Auflösung der Wolke wird dieser Druck zu einer weiteren Verminderung der Dicke führen und nach Übergang zu freien Teilchenbahnen die Wahrscheinlichkeit von Zusammenstößen der Teilchen bei der Pendelbewegung durch die Ringebene besonders im Bereich größerer Dichte sehr groß sein. Nur so ist die geringe Dicke des Saturnringes, die auf wenige Kilometer geschätzt wird, verständlich. Hauptsächlich zu Beginn des Auflösungsprozesses, als noch eine dichtere Packung der Trümmer bestand, müssen diese Stoßprozesse wirksam gewesen sein und die Entstehung größerer Schwingungsamplituden um die Ringebene verhindert haben.

Zusammenstöße der Teilchen dürften auch eine Rolle gespielt haben beim Auflösungsprozeß in der Ringebene selbst. Wir sahen, daß auch ohne die Annahme einer exzentrischen Bahn des Urmondes die Trümmerbahnen von verschiedener Exzentrizität und Apsidendrehung waren. Die gegenseitige Durchdringung benachbarter Bahnen infolge differentieller Apsidendrehung macht auch Zusammenstöße in der Ringebene unvermeidlich. Dabei kommt es wesentlich nur so lange zu Zusammenstößen, als noch radiale Geschwindigkeitskomponenten der Teilchenbahnen existieren. In transversaler Richtung werden nur vergleichsweise geringe Stoßeffekte zustande kommen, da alle Teilchen dieselbe Umlaufsrichtung aufweisen. Besteht aber noch eine radiale Komponente, so wird das Teilchen in Gebiete geführt, wo Teilchen mit anderer Bahngeschwindigkeit vorherrschen. Wären anderseits alle Bahnen kreisförmig, so brauchten nicht notwendig Stöße stattzufinden. Um zu einer Abschätzung der Stoßwirkung auf die Teilchenbahnen zu gelangen, wollen wir die Wirkung solcher unelastischen Stöße durch eine störende Kraft proportional und entgegengesetzt gerichtet der Radialkomponente der Teilchengeschwindigkeit in den momentanen Keplerellipsen ansetzen.

Denn je größer diese Komponente ist, desto größer ist die Wahrscheinlichkeit, Nachbarteilchen zu treffen. Die Proportionalitätskonstante k wird im wesentlichen noch von der Teilchendichte im betrachteten Ringgebiet abhängen. Unser Ansatz lautet daher für die störende Beschleunigung

$$(13) \quad \mathfrak{R} = -k \frac{\sqrt{GM} e \sin v}{\sqrt{a(1-e^2)}}.$$

Eine rein radiale Störkomponente $\mathfrak{R}$ läßt bekanntlich den Halbparameter $a(1-e^2)$ unverändert, d. h. mit Anfangswerten a_0, e_0 für $t = 0$ (Beginn des Auflösungsprozesses) ist

$$(14) \quad a(1-e^2) = a_0(1-e_0^2).$$

Sonst interessiert uns nur die Exzentrizitätsstörung

$$(15) \quad \frac{de}{dt} = \frac{\sqrt{a(1-e^2)} \sin v}{\sqrt{GM}} \cdot \mathfrak{R} = -k e \sin^2 v$$

und von dieser nur die säkularen Effekte. Wir setzen daher rechts in (15) den zeitlichen Mittelwert von $\sin^2 v$ unter Verzicht auf quadratische Terme in e gleich $\frac{1}{2}$, so daß aus

$$(15a) \quad \frac{de}{dt} = -\frac{k}{2} e$$

ein exponentielles Abklingen der Exzentrizität auf null resultiert. Die Bahnen gehen also im Laufe der Zeit in Kreisbahnen über, wobei wegen (14) mit $e \rightarrow 0$ die Halbachsen von a_0 auf

$$(16) \quad a \rightarrow a_0(1-e_0^2)$$

schrumpfen. Das Ergebnis dieser Stoßprozesse ist also eine endliche Schrumpfung des Ringes bei Übergang zu Kreisbahnen. In Gebieten größerer Dichte wird dieser Vorgang schneller (größeres k) abgelaufen sein, als in den lockeren Gebieten des A- und C-Ringes, wo vielleicht noch schwach elliptische Bahnen existieren.

Von Interesse ist in diesem Zusammenhang ferner eine von Herrn E. Schoenberg aufgeworfene Frage, ob nach Erreichung

dieses Endzustandes von lauter Kreisbahnen laufend weitere Zusammenstöße von Teilchen benachbarter Kreisbahnen stattfinden, die etwa nach Art einer inneren Reibung des Ringsystems wirksam wären. Man kann in dieser Hinsicht den Newtonschen Ansatz versuchen, diese innere Reibung der in Kreisbahnen bewegten Teilchen als tangentielle Störung proportional dem radialen Geschwindigkeitsgefälle zu setzen. Dann hat man wegen

$$a \omega = \sqrt{\frac{GM}{a}}$$

mit einer Reibungskonstanten μ eine tangentielle Störbeschleunigung

$$(17) \quad S = \mu \frac{d(a\omega)}{da} = -\mu \frac{\sqrt{GM}}{2a^{3/2}}.$$

Es interessiert nur die Wirkung auf die großen Halbachsen:

$$(18) \quad \frac{da}{dt} = \frac{2a\sqrt{1-e^2}}{nr} \cdot S.$$

Da es sich um Kreisbahnen handelt, kann hierin $e = 0$, $r = a$ und die mittlere Bewegung $n = \omega$ gesetzt werden. Aus (17) und (18) folgt dann

$$(19) \quad \frac{da}{dt} = -\mu$$

d. h. der Ring schrumpft beim Newtonschen Reibungsgesetz linear mit der Zeit unabhängig von a oder gleichmäßig. Die Konstante μ wird allerdings mit der Dichte der Ringgebiete variieren. Es ist zweifelhaft, ob eine solche innere Reibung heute noch in den Saturnringen wirksam ist; die Konstante des Newtonschen Ansatzes, die von der physikalischen Natur der einzelnen Stoßprozesse abhängt, muß jedenfalls sehr klein sein. Wenn ein solcher Schrumpfungseffekt existiert, muß sich der Ring der Saturnoberfläche säkular nähern.

Es sei zum Schluß noch in diesem Zusammenhang auf eine Deutungsmöglichkeit der Cassini-Spalte hingewiesen, da die Deutung als Kommensurabilitätslücke in bezug auf die Saturntrabanten wegen Vernachlässigung des Ringpotentials noch nicht

als einwandfrei gelten kann. Da in den zentralen Gebieten des B-Ringes die Reibungseffekte eine größere Wirkung gehabt haben müssen (größeres μ) als insbesondere im angrenzenden A-Ring, muß die Schrumpfung des B-Ringes eine größere gewesen sein, wodurch die Lücke zwischen beiden Ringen entstanden sein kann.