Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1950

München 1951
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über die Unabhängigkeit in der Wahrscheinlichkeitstheorie

Von **Demetrios A. Kappos** in Erlangen

Vorgelegt von Herrn Otto Haupt am 3. November 1950

Einleitung

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist vom mathematischen Standpunkt aus gesehen eine spezielle Anwendung der abstrakten Maß- und Integraltheorie. Die Darstellung der zufälligen Ereignisse bzw. der Zufallsvariablen durch Punktmengen bzw. Punktfunktionen führt beim Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie zu Ungereimtheiten. Daher empfiehlt es sich, die Wahrscheinlichkeitsfelder (W-Felder) durch Boolesche Maßverbände (Boolesche Verbände mit positivem Maß) und demgemäß die Zufallsvariablen dann durch Ortsfunktionen darzustellen. In einer früheren Note habe ich skizziert, wie dies geschehen kann [1]*. In der vorliegenden Arbeit wird der Begriff der gegenseitigen Unabhängigkeit von Untersystemen eines W-Feldes bzw. von Versuchen bzw. von Zufallsvariablen in diesem Sinne behandelt. Hierbei wird die Theorie der Multiplikation von Maßverbänden benötigt. Existieren nämlich in einem W-Feld Untersysteme bzw. Versuche bzw. Zufallsvariablen, die im Sinne unserer Definitionen (Nr. 3 bis 5) unabhängig sind, so ist das W-Feld selbst oder ein Unterfeld von ihm darstellbar als Produktmaßverband, dessen Komponenten die kleinsten W-Felder über diesen Untersystemen bzw. den Systemen von Versuchsereignissen bzw. den Spektralscharen der Zufallsvariablen sind.

Bei verschiedenen Problemen der Wahrscheinlichkeitstheorie betrachtet man W-Felder, die zunächst verschieden erscheinen. Aber jedes W-Feld mit empirischer Basis (und solche W-Felder liegen in den meisten Anwendungen vor) ist isometrisch zu einem Untermaßverband des sogenannten Lebesgueschen eindimen-

* Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Schluß der Arbeit.

sionalen Maßverbandes (Lebesgueschen W-Feldes) $(\mathfrak{J}, \mu)$ (s. u. Nr. 12. 1). Man kann daher jedes W-Feld, das eine empirische Basis besitzt, mit einem Unterfeld von $(\mathfrak{J}, \mu)$ identifizieren und damit die Wahrscheinlichkeitstheorie in W-Feldern mit empirischer Basis auf die Wahrscheinlichkeitstheorie in diesem Grundfeld $(\mathfrak{J}, \mu)$ zurückführen. Aber noch mehr! Ist $(\mathfrak{F}, w)$ irgendein W-Feld (auch ohne empirische Basis) und $X_1, X_2, \ldots$ eine abzählbare Menge von gegenseitig unabhängigen Zufallsvariablen dieses Feldes, so erzeugen die Spektralscharen dieser Zufallsvariablen immer ein vollideelles Wahrscheinlichkeitsfeld mit empirischer Basis. Die Spektralschar einer Grenzzufallsvariablen X der Folge $X_1, X_2, \ldots$ (oder einer Teilfolge), entsprechend irgend einem Konvergenzbegriff der Wahrscheinlichkeitstheorie, besteht dann aus Ereignissen des obigen vollideellen Feldes mit empirischer Basis. Man kann also in allen Fällen die wahrscheinlichkeitstheoretischen Grenzwertsätze für unabhängige Zufallsvariable mit Methoden beweisen, wie sie für das W-Feld $(\mathfrak{J}, \mu)$ entwickelt wurden.

1. Vorbemerkungen. Bezeichnungen

Zunächst sei an einige Bezeichnungen, Begriffe und bekannte Sätze erinnert, die im folgenden benutzt werden:

1. 1. Wahrscheinlichkeitsfelder. $(\mathfrak{F}, w)$ bedeutet ein Wahrscheinlichkeitsfeld (W-Feld) mit der Wahrscheinlichkeit $w(x)$, $x \in \mathfrak{F}$; ferner $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ die vollideelle Erweiterung von $(\mathfrak{F}, w)$, d. h. das W-Feld, das aus $(\mathfrak{F}, w)$ durch den Lebesgueschen Vervollständigungsprozeß entsteht [1]. $\overline{\mathfrak{F}}$ ist dann ein Boolescher Vollverband. Wir bezeichnen $\mathfrak{F}$ als eine Basis von $\overline{\mathfrak{F}}$. Es gilt bekanntlich $\mathfrak{F}^{\sigma\delta} = \mathfrak{F}^{\delta\sigma} = \overline{\mathfrak{F}}$ [2]. Ein für allemal betrachten wir im folgenden W-Felder mit mehr als *drei* Ereignissen (Elementen).

1. 1. 1. Ist $(\mathfrak{F}, w)$ ein W-Feld, so bezeichnen wir $(\mathfrak{F}', w)$ als W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$, wenn $\mathfrak{F}'$ ein Boolescher Unterverband von $\mathfrak{F}$ ist, der das Element e von $\mathfrak{F}$ enthält und wenn außerdem die Wahrscheinlichkeit in $\mathfrak{F}'$ dieselbe ist, wie in $\mathfrak{F}$, d. h. Verengerung der Wahrscheinlichkeit in $\mathfrak{F}$ von $\mathfrak{F}$ auf $\mathfrak{F}'$ ist.

1. 1. 2. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ vollideell und $\mathfrak{M}$ irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{F}$, die e enthält; dann kann man das kleinste W-Unterfeld in $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{M}$ folgendermaßen bilden:

Adjungiert man zu $\mathfrak{M}$ alle endlichen Vereinigungen (oder Durchschnitte) aus Elementen von $\mathfrak{M}$, so entsteht die sogenannte $\cup$-(oder $\cap$-)Hülle $\mathfrak{M}^{\cup}$ (oder $\mathfrak{M}^{\cap}$) von $\mathfrak{M}$. Adjungiert man weiter zu $\mathfrak{M}^{\cup}$ (oder $\mathfrak{M}^{\cap}$) alle endlichen symmetrischen Differenzen (Verbindungen) aus Elementen von $\mathfrak{M}^{\cup}$ (oder $\mathfrak{M}^{\cap}$), so entsteht der kleinste Boolesche Unterverband $\mathfrak{M}^{\cup\dotplus}$ (oder $\mathfrak{M}^{\cap\dotplus}$) von $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{M}$. Es gilt nämlich $\mathfrak{M}^{\cup\dotplus} = \mathfrak{M}^{\cap\dotplus} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}$.[1] $(\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}, w)$ ist dann ein W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$, und zwar das kleinste W-Unterfeld in $(\mathfrak{F}, w)$ über $\mathfrak{M}$. Der kleinste Boolesche σ-Unterverband von $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{M}$ ist [2]

$$\overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}^{\cup\dotplus\sigma\delta} = \mathfrak{M}^{\cup\dotplus\delta\sigma} = \mathfrak{M}^{\cap\dotplus\sigma\delta} = \mathfrak{M}^{\cap\dotplus\delta\sigma} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}^{\sigma\delta} = \mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}^{\delta\sigma}$$

und $(\overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{M}}, w)$ das kleinste vollideelle W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ über $\mathfrak{M}$. Gilt insbesondere $\overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{F}$, so bezeichnen wir $\mathfrak{M}$ als eine Borelsche Erzeugende von $\mathfrak{F}$ oder auch als eine Basis von $\mathfrak{F}$. Existiert nun eine Basis $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{F}$ mit abzählbar vielen Ereignissen, so besitzt auch $(\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}, w)$ *abzählbar* viele Ereignisse, ist also ein empirisches W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ und zugleich eine Basis von $(\mathfrak{F}, w)$ im Sinne von Nr. 1. 1. In diesem Falle bezeichnen wir $(\mathfrak{F}, w)$ als ein W-Feld mit empirischer Basis. Allgemein bezeichnet man jede Teilmenge $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{F}$ als eine Basis von $\mathfrak{F}$, falls $\overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{F}$ gilt, auch wenn e in $\mathfrak{M}$ nicht enthalten ist. Allerdings enthält dann $\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}$ nicht immer das Element e; $(\mathfrak{B}_{\mathfrak{M}}, w)$ ist also nicht immer ein W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$. Im folgenden werden wir immer voraussetzen, daß $\mathfrak{M}$ eine e enthaltende Basis ist, wenn das Gegenteil nicht betont wird.

1. 1. 3. Zwei W-Felder $(\mathfrak{F}, w)$ und $(\mathfrak{F}', w')$ heißen isometrisch, wenn $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ als Boolesche Verbände (bzw. Boolesche σ-Ver-

[1] Es genügt zu zeigen, daß $\mathfrak{M}^{\cup\dotplus}$ abgeschlossen ist für $\cap$. Es seien also $a = a_1 \dotplus a_2 \dotplus \dots \dotplus a_k$, $b = b_1 \dotplus b_2 \dotplus \dots \dotplus b_m$ mit $a_i, b_j \in \mathfrak{M}^{\cup}$. Dann ist $a \cap b = \sum_{i,j} \dotplus\, a_i \cap b_j$ und $a_i \cap b_j = (a_i \cup b_j) \dotplus a_i \dotplus b_j \in \mathfrak{M}^{\cup\dotplus}$ d. h. $a \cap b \in \mathfrak{M}^{\cup\dotplus}$. Analog zeigt man daß $\mathfrak{M}^{\cap\dotplus}$ ein Boolescher Verband ist. Da außerdem, wie leicht ersichtlich, $\mathfrak{M}^{\cup\dotplus}$ bzw. $\mathfrak{M}^{\cap\dotplus}$ der kleinste Boolesche Unterverband von $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{M}$ ist, so gilt $\mathfrak{M}^{\cup\dotplus} = \mathfrak{M}^{\cap\dotplus}$.

bände) isomorph sind und wenn außerdem gilt: $w(x) = w'(x')$ für jedes $x \in \mathfrak{F}$, $x' \in \mathfrak{F}'$. Hierbei bedeutet x' das Bild von x bei derjenigen Abbildung, durch welche die Isomorphie zwischen $\mathfrak{F}$ und $\mathfrak{F}'$ erklärt wird.

1.2. Normaldarstellung vollideeller W-Felder mit empirischer Basis.

1.2.1. Es sei $\mathfrak{L}$ der Boolesche σ-Mengenverband aller Lebesgue-meßbaren Teilmengen des (linearen) Intervalles $[0, 1)$ und $\mathfrak{N}$ das zugehörige σ-Ideal der Lebesgue-Nullmengen. Dann bilden die Restklassen $\mathfrak{L}/\mathfrak{N} = \mathfrak{J}$ einen Booleschen atomfreien Vollverband [3]. Bei der Abbildung $\mathfrak{L} \to \mathfrak{J}$ liefert das Lebesgue-Maß in $\mathfrak{J}$ ein Maß μ, welches nur für $\theta \in \mathfrak{J}$ verschwindet (positives Maß). Es ist also $(\mathfrak{J}, \mu)$ ein vollideelles, atomfreies W-Feld mit einer empirischen Basis. Wir bezeichnen $(\mathfrak{J}, \mu)$ als das Lebesguesche W-Feld. Eine empirische Basis von $(\mathfrak{J}, \mu)$ wird z. B. gebildet von denjenigen Restklassen in $\mathfrak{J}$, deren Repräsentanten die nach rechts halboffenen Teilintervalle von $[0,1)$ mit dyadischen Endpunkten sind. Es gilt dann folgender Satz (s. [3] Kap. X § 12 und Kap. XI § 9 sowie [4]):

1.2.2. Satz: *Besitzt ein vollideelles W-Feld $(\mathfrak{F}, w)$ eine empirische Basis, so ist $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch zu einem vollideellen W-Unterfeld des Lebesgueschen W-Feldes $(\mathfrak{J}, \mu)$. Ist insbesondere $(\mathfrak{F}, w)$ atomfrei, so ist $(\mathfrak{F}, w)$ isometrisch zu $(\mathfrak{J}, \mu)$ selbst.*

Wir wollen hier im Anschluß an Carathéodory [4], aber mit einigen Modifikationen, diese Isometrie bestimmen:

Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein vollideelles W-Feld mit einer empirischen Basis $\mathfrak{M}$, in welcher das Element θ nicht enthalten sein soll. O. B. d. A. können wir annehmen, daß zu $\mathfrak{M}$ alle Atome[2] des W-Feldes gehören, falls solche existieren; denn die Anzahl der Atome kann höchstens abzählbar sein. Es sei nun $(a_1, a_2, \ldots) \subset \mathfrak{M}$ die Menge der Atome und $(e, b_1, b_2, \ldots)$ die Menge der übrigen Elemente von $\mathfrak{M}$. Wir können annehmen, daß jedes b_i, $i = 1, 2, \ldots$, zu allen Atomen fremd ist, d. h. $b_i \cap a_j = \theta$ für alle i und j gilt. Denn andernfalls können wir b_i in $\mathfrak{M}$ durch $b_i + \bigcup_{a_j \subset b_i} a_j$

[2] Bezüglich der Begriffe: „Atom", „atomar" s. [1] § 2.

ersetzen, ohne die Basiseigenschaft von $\mathfrak{M}$ zu zerstören. Ist $(\mathfrak{F}, w)$ nicht atomar[2], so ist die Menge $(b_1, b_2, \ldots)$ nicht leer und besteht aus unendlich vielen Elementen. In diesem Fall ersetzen wir $(b_1, b_2, \ldots)$ durch eine Menge von Ereignissen b_{kj}, die wir folgendermaßen konstruieren:

Beim 1. Schritt bilden wir $b_{11} = b_1$, beim 2. Schritt:

$$b_{21} = b_{11} \cap b_2,\; b_{22} = b_{11} - b_{11} \cap b_2,\; b_{23} = b_2 - b_{11} \cap b_2.$$

Es seien nun beim k-ten Schritt schon die $n_k = 2^k - 1$ Elemente:

$$b_{k1}, b_{k2}, \ldots, b_{kn_k}, \quad 1 \leqq k \tag{1}$$

gebildet, dann besteht der $(k+1)$-te Schritt in der Bildung von $2^{k+1} - 2$ Elementen $b_{k+1,j}$ vermöge

$$\left.\begin{aligned} b_{k+1,2m-1} &= b_{km} \cap b_{k+1} \\ b_{k+1,2m} &= b_{km} - b_{km} \cap b_{k+1} \end{aligned}\right\} \quad m = 1, 2, \ldots, n_k, \tag{2}$$

sowie dem Element

$$b_{k+1,n_{k+1}} = b_{k+1} - (b_{k1} \cup b_{k2} \cup \ldots \cup b_{kn_k}) \cap b_{k+1}, \tag{3}$$

also von im ganzen $n_{k+1} = 2n_k + 1 = 2^{k+1} - 1$ Elementen. Es ist:

$$b_{km} = b_{k+1,2m-1} \cup b_{k+1,2m}, \quad 1 \leqq m \leqq n_k. \tag{4}$$

Jedes $b_{km} \neq 0$ wird also beim $(k+1)$-ten Schritt entweder in zwei fremde nicht leere Elemente, nämlich $b_{k+1,2m-1}$ und $b_{k+1,2m}$, zerlegt oder fällt mit dem einen dieser Elemente zusammen (wenn nämlich das andere leer ist).

Sind

$$b_{kr_1}, b_{kr_2}, \ldots, b_{kr_{n_k}}, \text{ wobei } 1 \leqq r_1 < r_2 < \ldots < r_{n_k} \leqq n_k \tag{5}$$

sämtliche nicht leere Elemente unter den $b_{k_1}, b_{k_2}, \ldots, b_{kn_k}$, so sind sie paarweise fremd. Wir ersetzen nun in $\mathfrak{M}$ die Menge $(b_1, b_2, \ldots)$ durch die Menge aller verschiedenen b_{kj}, die in (5) für alle $k = 1, 2, \ldots$ vorkommen, und erhalten in

$$\mathfrak{M}_* = (e, a_1, a_2, \ldots, b_{kj}, \ldots)$$

wieder eine empirische Basis von $\mathfrak{F}$, d. h. es gilt

$$\overline{\mathfrak{B}}_{\mathfrak{M}_*} = \mathfrak{M}_*^{\cap + \sigma\delta} = \mathfrak{F}.$$

Die Isomorphie von $(\mathfrak{F}, w)$ in $(\mathfrak{J}, \mu)$ erklären wir folgendermaßen:

Es werden abgebildet

I) $e \in \mathfrak{F}$ auf diejenige Restklasse ε in $(\mathfrak{J}, \mu)$, deren Repräsentant das Intervall $[0, 1)$ ist.

II) Jedes Atom a_i auf diejenige Restklasse α_i in $\mathfrak{J}$, deren Repräsentant das (halboffene) Intervall $[\sum_{\nu=1}^{i-1} w(a_\nu), \sum_{\nu=1}^{i} w(a_\nu))$ ist.

Ist das W-Feld $(\mathfrak{F}, w)$ nicht atomar, so ist die Vereinigung $\cup a_i$ aller Atome echter Teil von e, also $\lim_{i\to\infty} \sum_{\nu=1}^{i} w(a_\nu) = \xi < 1$. Es existieren in diesem Falle in $\mathfrak{M}_*$ Elemente $b_{kj} \neq \theta$ und es wird abgebildet:

III) Jedes b_{kr_i}, $i = 1, 2, \ldots, n_k$, aus (5) suf diejenige Restklasse β_{kr_i} in $\mathfrak{J}$, deren Repräsentant das Intervall $[\xi + \sum_{\nu=1}^{i-1} w(b_{kr_\nu}), \xi + \sum_{\nu=1}^{i} w(b_{kr_\nu}))$ ist, $k = 1, 2, \ldots$. Hierbei ist $\sum_{\nu=1}^{0} = 0$ gesetzt und das Intervall liegt immer zwischen ξ und 1.

Die so erklärte Menge der Bilder der Elemente von $\mathfrak{M}_*$ bezeichnen wir mit $\mathsf{M} = (\varepsilon, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \beta_{kj}, \ldots)$. Die Abbildung von $\mathfrak{M}_*$ auf M in $\mathfrak{J}$ ist eineindeutig, d. h. verschiedenen Elementen von $\mathfrak{M}_*$ entsprechen verschiedene Elemente in M und umgekehrt. Da außerdem die Bilder der Atome a_1 paarweise fremd sind, das volle Element e auf das volle Element ε in $\mathfrak{J}$ abgebildet wird und da gilt:

1) aus $b_{pq} \subseteq b_{rs}$ folgt $\beta_{pq} \subseteq \beta_{rs}$ und umgekehrt, ferner

2) aus $b_{pq} \cap b_{rs} = \theta$ folgt $\beta_{pq} \cap \beta_{rs} = \mathsf{O}$ und umgekehrt,

so ist unsere Abbildung isomorph bezüglich der Relationen „$\subseteq$" und „Fremdsein". Durch Adjunktion des leeren Elementes θ

bzw. O aus $\mathfrak{F}$ bzw. $\mathfrak{J}$ zu $\mathfrak{M}_*$ bzw. M geht $\mathfrak{M}_*$ bzw. M über in ein bezüglich $\frown$ abgeschlossenes Untersystem $\mathfrak{M}_*^\frown$ bzw. $M^\frown$ von $\mathfrak{F}$ bzw. von $\mathfrak{J}$. Läßt man noch θ und O einander entsprechen, so ist die Abbildung zwischen $\mathfrak{M}_*^\frown$ und M eine Isomorphie bezüglich $\frown$. Nun erweitert man $\mathfrak{M}_*^\frown$ und $M^\frown$ zu den isomorphen Booleschen Verbänden $\mathfrak{M}_*^{\frown +}$ und $M^{\frown +}$ und hat zwecks Erweiterung dieser Booleschen Verbände zu isomorphen Booleschen σ-Verbänden nur noch die Borelschen σ, δ-Prozesse anzuwenden. $\mathfrak{M}_*^{\frown + \sigma\delta} = \mathfrak{F}$ und $M^{\frown + \sigma\delta} = \mathfrak{J}' \subset \mathfrak{J}$ sind dann isomorphe Boolesche σ-Verbände. Dabei gilt $\mu(\alpha) = w(a)$ für jedes α in M und sein Urbild a in $\mathfrak{M}_*$ sowie ebenfalls für jedes α in $\mathfrak{J}'$ und sein Urbild a in $\mathfrak{F}$. Die erklärte Abbildung ist also eine Isometrie zwischen den vollideellen W-Feldern $(\mathfrak{F}, w)$ und $(\mathfrak{J}', \mu)$. Ist $(\mathfrak{F}, w)$ atomfrei, so kann man zeigen daß $\mathfrak{J}'$ mit $\mathfrak{J}$ zusammenfällt, d. h. $(\mathfrak{F}, w)$ ist zu $(\mathfrak{J}, \mu)$ selbst isometrisch (s. [3] Kap. X § 12, Kap. XI § 9).

2. Produkte von Wahrscheinlichkeitsfeldern[3]

2.1. Produktfelder. Es sei $(\mathfrak{F}_i, w_i)_{i\in I}$ eine Familie von W-Feldern; die Menge I der Indizes i sei von beliebiger Mächtigkeit. Eine Familie $\alpha = (a_i)_{i\in I}$, $a_i \in \mathfrak{F}_i$, oder kurz $\alpha = Pa_i$, wobei $a_i = e_i$ ist für jedes $i \in I$ ausgenommen (höchstens) *endlich viele* $i' \in I$, bezeichnen wir als Produktereignis (kurz P-Ereignis) mit den Komponenten $a_i \in \mathfrak{F}_i$. Dabei bedeutet e_i bzw. θ_i die Gewißheit bzw. Unmöglichkeit von $\mathfrak{F}_i$. Als Produktunmöglichkeit (kurz P-Unmöglichkeit) und mit O bezeichnen wir jedes P-Ereignis Px_i in welchem mindestens ein x_i gleich θ_i ist. Das P-Ereignis $\varepsilon = Pe_i$ bezeichnen wir als P-Gewißheit. Irgend zwei $\alpha = Pa_i$, $\beta = Pb_i$ bezeichnen wir als unvereinbar (fremd), wenn $a_i \frown b_i = \theta_i$ für mindestens ein $i \in I$ gilt. Ferner ist $Pa_i = Pb_i$, wenn ~~*entweder*~~ beides P-Unmöglichkeiten sind *oder*, wenn $a_i = b_i$ für jedes $i \in I$ gilt. Die Gleichheitsaxiome sind erfüllt. Die Gesamtheit aller P-Ereignisse bezeichnen wir mit K.

---

[3] Cartesische Produkte mit $I = (1, 2)$ sind abstrakt und unabhängig von Punktbegriff in der Arbeit [5] eingeführt. Dieses Verfahren wird auf Indexsysteme I von beliebiger Mächtigkeit in [9] ausgedehnt.

*

Jedem $\alpha \in K$ ordnen wir eine Wahrscheinlichkeit $\pi(\alpha)$ folgendermaßen zu: Für jedes $\alpha = Pa_i$ ist nach Definition $a_i \neq e_i$ für höchstens endlich viele Indizes, etwa höchstens für die Indizes $i_1, i_2, \ldots, i_k$. Wir ordnen dann dem P-Ereignis α die Wahrscheinlichkeit:

$$\pi(\alpha) = w_{i_1}(a_{i_1})\, w_{i_2}(a_{i_2}) \ldots w_{i_k}(a_{i_k})$$

zu, wobei die Reihenfolge der Faktoren gleichgültig ist, ferner der P-Gewißheit die Wahrscheinlichkeit $\pi(\varepsilon) = 1$. Für die P-Unmöglichkeit O ist dann $\pi(O) = 0$.

2.2. Boolescher Verband der Aggregate. K ist offensichtlich kein Boolescher Verband, also (K, π) kein W-Feld. Um (K, π) zu einem W-Feld zu erweitern, betrachten wir die Gesamtheit Φ aller (nicht geordneten) endlichen Komplexe $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ mit $\alpha_j = Pa_i^j \in K$, $j = 1, 2, \ldots, k$, von paarweise unvereinbaren P-Ereignissen. Wir bezeichnen die Q als Aggregatereignisse (kurz Aggregate). Speziell für $k = 1$ liefert jedes $\alpha \in K$ ein Aggregat (α). Wir bezeichnen ein Aggregat $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ mit $\alpha_j = Pa_i^j \in K, j = 1, 2, \ldots, n$, als gitterartig, kurz G-Aggregat, wenn gilt:

$a_i^j \frown a_i^k = \theta_i$ oder $a_i^j = a_i^k$ für jedes Paar (j, k) aus $(1, 2, \ldots, n)$ und jedes $i \in I$.

2.2.1. Gitterartige Darstellungen für Aggregate erhält man folgendermaßen:

I). Es sei zuerst $\alpha = Pa_i \in K$ und es seien endlich viele Komponenten von α, etwa a_{i_j}, $j = 1, \ldots k$, Vereinigungen je von paarweise unvereinbaren Ereignissen aus $\mathfrak{F}_{i_j}$ etwa:

$$a_{i_j} = a_{i_j}^1 \cup \cdots \cup a_{i_j}^{r_j}, \quad 1 \leq r_j < +\infty, \; j = 1, 2, \ldots k.$$

Aus dem Ausdruck

$$(a_{i_1}^1 \cup \cdots \cup a_{i_1}^{r_1}) \times \cdots \times (a_{i_k}^1 \cup \cdots \cup a_{i_k}^{r_k})$$

erhalten wir durch formale Entwicklung nach dem distributiven Gesetz insgesamt $r = r_1 \ldots r_k$ k-Tupel der Form

$$a_{i_1}^{j_1} \times \cdots \times a_{i_k}^{j_k} \quad \text{mit} \quad 1 \leq j_m \leq r_m, \; m = 1, \ldots, k. \tag{1}$$

Jedem k-Tupel (1) ordnen wir das P-Ereignis $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_k}$ zu, das wir aus Pa_i erhalten, indem wir die Komponenten $a_{i_1}, \ldots, a_{i_k}$ durch $a_{i_1}^{j_1}, \ldots, a_{i_k}^{j_k}$ ersetzen. Die r P-Ereignisse $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_k}$, $1 \leqq j_m \leqq r_m$, sind paarweise unvereinbar und bestimmen ein Aggregat $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$, das wir als eine Zerlegung $(\alpha^1, \ldots, \alpha^r)$ des P-Ereignisses α bzw. des Aggregates (α) in r feinere P-Ereignisse bezeichnen. Die in dieser Weise erklärten Zerlegungen von α in feinere P-Ereignisse sind immer gitterartige Aggregate. (α) selbst betrachten wir ebenfalls als eine solche Zerlegung; wir erhalten nämlich diese Zerlegung, wenn wir $r_m = 1$, $m = 1, 2, \ldots$ $\ldots, k$ setzen.

II) Es sei nun $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ ein beliebiges Aggregat. Jedes Aggregat $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$, $n \geqq m$, welches wir aus diesem durch Zerlegung der α_j, $j = 1, \ldots, m$, in feinere P-Ereignisse erhalten, nennen wir eine Zerlegung von $(\alpha, \ldots, \alpha_m)$ in feinere P-Ereignisse $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$, $n \geqq m$. Es ist klar, daß eine Zerlegung von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ nicht immer ein gitterartiges Aggregat zu sein braucht. Eine Zerlegung $(\alpha_1^*, \ldots, \alpha_n^*)$, $n \geqq m$, von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ in feinere P-Ereignisse, die gitterartige Aggregate sind, bezeichnen wir als eine zu $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gehörige Gitterzerlegung oder gitterartige Darstellung von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Wir wollen jetzt die Existenz von gitterartigen Darstellungen eines Aggregates $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ nachweisen. Es sei $\alpha_j = Pa_i^j$, $j = 1, \ldots, m$. Es existieren nur endlich viele Indizes aus I, etwa $i_1, \ldots i_k$, so daß zu jedem i_t, $t = 1, \ldots k$, mindestens ein $j \in (1, \ldots, m)$ existiert mit $a_{i_t}^j \neq e_{i_t}$. Wir betrachten nun die Ereignisse:

$$a_{i_t}^1, \ldots a_{i_t}^m \text{ aus } \mathfrak{F}_{i_t} \quad \text{für jedes} \quad t = 1, \ldots, k.$$

Wir können dann in $\mathfrak{F}_{i_t}$ Ereignisse $s_{i_t}^1, \ldots, s_{i_t}^{h_t}$, $h_t \leqq 2^m$, derart bestimmen, daß diese paarweise unvereinbar sind und außerdem gilt:

$$v_{i_t} = a_{i_t}^1 \cup \ldots \cup a_{i_t}^m = s_{i_t}^1 \cup \ldots \cup s_{i_t}^{h_t}$$

sowie

$$(\Delta) \quad a_{i_t}^j = s_{i_t}^{j_1} \cup \ldots \cup s_{i_t}^{j_{r_j}} \quad \text{mit} \quad (j_1, \ldots, j_{r_j}) \subset (1, \ldots, h_t), \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

für jedes $t = 1, \ldots, k$ (s. [5] S. 56). Mit Hilfe der Darstellungen (Δ) von $a^j_{i_t}$, $t = 1, \ldots, k$, zerlegen wir nun jedes α_j, $j = 1, \ldots, m$, in feinere P-Ereignisse, wie in I) beschrieben wurde. Wir erhalten so eine Zerlegung von $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ in feinere P-Ereignisse, die, wie leicht ersichtlich, ein gitterartiges Aggregat ist. Zu jedem Aggregat $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ gehören also gitterartige Darstellungen $(\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_n)$, $n \geqq m$. Ebenso zeigt man, das zu je zwei Aggregaten $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ und $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ gitterartige Darstellungen $(\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_n)$, $n \geqq m$, und $(\beta^*_1, \ldots, \beta^*_h)$, $h \geqq k$, derart gehören, daß je zwei der α^*_p, β^*_q entweder unvereinbar oder gleich sind.

2. 2. 2. Definition: *Zwei Aggregate* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ *und* $(\beta_1, \ldots, \beta_k)$ *heißen gleich, wenn entweder jedes nur aus P-Unmöglichkeiten besteht, oder wenn zu beiden eine und dieselbe gitterartige Darstellung gehört. Die Gleichheitsaxiome sind erfüllt. Nach dieser Definition ist speziell jedes Aggregat gleich einer jeden seiner Gitterzerlegungen.*

2. 2. 3. Definition: *Wir schreiben* $(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \subseteqq (\beta_1, \ldots, \beta_h)$, *wenn zu diesen beiden Aggregaten gitterartige Darstellungen* $(\alpha^*_1, \ldots, \alpha^*_n)$, $n \geqq m$, bzw. $(\beta^*_1, \ldots, \beta^*_h)$, $h \geqq k$, $h \geqq n$, *gehören derart, daß jedes* α^*_j *gleich genau einem* β^*_q *ist. Für die so definierte Relation* $\subseteqq$ *gelten die Axiome der teilweisen Ordnung.*

Die definierte Gleichheit und teilweise Ordnung in Φ sind unabhängig von der Wahl der benutzten Gitterzerlegungen und machen Φ zu einem Booleschen Verband.

2. 2. 4. Bemerkung. Im folgenden betrachten wir K als ein Untersystem von Φ, indem wir jedes $\alpha \in K$ mit derjenigen Aggregatenklasse aus Φ identifizieren, zu welcher das Aggregat (α) gehört. Außerdem benutzen wir allgemein zur Bezeichnung der Aggregatenklassen in Φ griechische Buchstaben. $\alpha \in \Phi$ soll also immer eine Klasse α in Φ von gleichen Aggregaten bedeuten. Ist nun $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ mit $\alpha_j \in K$, $j = 1, \ldots k$, ein Aggregat dieser Klasse α, so dürfen wir schreiben: $\alpha = \alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$, d. h. wir dürfen die Klasse α durch die Vereinigung $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$ der paarweise unvereinbaren P-Ereignisse $\alpha_j \in K \subset \Phi$ repräsentieren. Wir bemerken außerdem, daß K, als Untersystem

von Φ betrachtet, abgeschlossen für die Operation $\cap$ ist und daher $K^{\dagger} = \Phi$ gilt (vgl. unsere Betrachtungen [5] § 7, die auf den vorliegenden Fall übertragbar sind).

2. 3. Das W-Produktfeld (Φ, π) und seine Erweiterung.

2. 3. 1. Die Wahrscheinlichkeit π in Φ erklären wir so:

Es sei $\alpha \in \Phi$ also $\alpha = \alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$ mit $\alpha_j \in K, j = 1, \ldots, k$, und $\alpha_q \cap \alpha_p = O$ für $q \neq p$; dann setzen wir

$$\pi(\alpha) = \pi(\alpha_1) + \cdots + \pi(\alpha_k).$$

Somit ist $\pi(\alpha)$ unabhängig von dem gewählten Repräsentanten $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$ von α. (Φ, π) ist ein W-Feld und zwar das kleinste W-Feld über dem Untersystem K von Φ; wir setzen:

$$(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$$

und bezeichnen (Φ, π) als W-Produktfeld mit den Komponenten $(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in I$.

2. 3. 2. Es sei $(\overline{\Phi}, \pi)$ die vollideelle Erweiterung von (Φ, π), (vgl. diese Arbeit Nr. 1. 1) in Zeichen:

$$(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{F}_i, w_i).$$

Ist $(\overline{\mathfrak{F}}_i, w_i)$ die vollideelle Erweiterung von $(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in I$, so sei gesetzt $(\Phi^*, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\overline{\mathfrak{F}}_i, w_i)$. (Φ, π) ist dann isometrisch zu einem W-Unterfeld von (Φ^*, π). Ist nun $(\overline{\Phi}^*, \pi)$ die vollideelle Erweiterung von (Φ^*, π), so gilt:

$(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ ist isometrisch zu $(\overline{\Phi}^*, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\overline{\mathfrak{F}}_i, w_i)$; in Zeichen: $(\overline{\Phi}, \pi) \equiv (\overline{\Phi}^*, \pi)$[4].

2. 3. 3. Es sei jedes $(\mathfrak{F}_i, w_i)$ vollideell und besitze eine empirische Basis $(\mathfrak{F}_i^0, w_i)$, $i \in I$; dabei sei überdies I eine abzählbare Menge. Es sei ferner K bzw. K^0 die Menge aller Produktereignisse, gebildet aus den $\mathfrak{F}_i$ bzw. $\mathfrak{F}_i^0$, $i \in I$. Wir setzen

$$(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i) \quad \text{bzw.} \quad (\Phi^0, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i^0, w_i).$$

[4] Für die Beweise vgl. [9].

Wegen Nr. 2. 3. 2 gilt $(\overline{\Phi}, \pi) \equiv (\overline{\Phi^0}, \pi)$. Da aber K^0 abzählbar ist, so ist auch Φ^0 abzählbar, d. h. (Φ^0, π) ist zu einer empitischen Basis von $(\overline{\Phi}, \pi)$ isometrisch. Es gilt also der

Satz: *Besitzt jedes vollideelle W-Feld* $(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in I$, *eine empirische Basis und ist* I *abzählbar, so besitzt* $(\overline{\Phi}, \pi) = \overline{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ *ebenfalls eine empirische Basis.*

2. 3. 4. Bei hinreichend großer Kardinalzahl der Komponenten ist das Produktfeld atomfrei. Genauer:

Satz: Vor.: *Es seien* $(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in I$, *W-Feldern, wobei die Mächtigkeit von* $I \geqq \aleph_0$.

Beh.: 1) *Es besitzt* $(\Phi, \pi) = P_{i \in I} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ *keine Atome.*

2) *Es besitzt sogar* $(\overline{\Phi}, \pi) = \overline{P}_{i \in I} (\mathfrak{F}_i, w_i) \equiv \overline{P}(\mathfrak{F}_i, w_i)$ *keine Atome,* (A) *wenn die Mächtigkeit von* $I > \aleph_0$ *ist, oder* (B) *wenn es zwei Konstanten* ξ_1, ξ_2 *und eine Teilmenge* I' *von* I *mit abzählbar unendlich vielen Elementen gibt, so daß für jedes* $i \in I' \subset I$ *mindestens ein* $\alpha_i \in \mathfrak{F}_i$ *existiert mit* $0 < \xi_1 \leqq w_i(a_i) \leqq \xi_2 < 1$.

Zusatz: *Gilt für eine Teilmenge* I' *von* I *mit der Mächtigkeit* $\geqq \aleph_0$. *daß jedes* $(\mathfrak{F}_i, w_i) \equiv (\mathfrak{F}, w)$, $i \in I'$, *wobei das W-Feld beliebig ist, so ist die Bedingung* (B) *erfüllt und folglich gilt der obige Satz.*

Beweis des Satzes. Betr. Beh. 1): Es genügt zu beweisen, daß kein $\alpha \in K$ ein Atom ist, denn jedes $\alpha \in \Phi$ ist in der Form $\alpha_1 \cup \ldots \cup \alpha_k$ mit $\alpha_i \in K$, $i = 1, \ldots, k$, darstellbar, wobei die Glieder paarweise fremd sind. Es sei also $\alpha = Pa_i \in K$, $\alpha \neq O$, wobei $a_i = e_i$ für jedes $i \in I$ ausgenommen nur endlich viele Indizes, etwa $i_1, \ldots, i_k \in I$. Für jedes $i \in I$ existiert ein $b_i \in \mathfrak{F}_i$ mit $0 < w_i(b_i) < 1$. Ferner existiert ein $i' \neq i_1, \ldots, i_k$. Das Element $\delta = Pd_i$ mit $d_{i'} = b_{i'}$, sonst $d_i = a_i$ für $i \in I$ mit $i \neq i'$, ist also verschieden von O und echter Teil von α, d. h. α kein Atom.

Betr.Beh. 2) (A): Es sei $\alpha \in \Phi^{\sigma\delta} = \overline{\Phi}$, $\alpha \neq O$. Dann ist $\alpha = \bigcap \alpha_j$ mit $\alpha_j \in \Phi^\sigma$ und $\alpha_j \supseteqq \alpha_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots$, außerdem $\alpha_j = \bigcup_n \alpha_{jn}$, wobei $\alpha_{jn} \in K$; $j, n = 1, 2, \ldots$ und $\alpha_{jk} \cap \alpha_{jm} = O$

für $k \neq m$[5]. Nun betrachten wir jedes $\alpha_{jn} = Pa_i^{jn}$. Es existieren endlich viele Indizes i für jedes j, n, so daß $a_i^{jn} \neq e_i$ sonst aber $a_i^{jn} = e_i$. Für alle j, n existieren also höchstens abzählbar viele Indizes i, so daß $a_i^{jn} \neq e_i$; sonst gilt $a_i^{jn} = e_i$. Da die Mächtigkeit der Indexmenge I größer als $\aleph_0$ ist, so existiert ein $i_0 \in I$, so daß $a_{i_0}^{jn} = e_{i_0}$ für alle j, $n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Nun setzen wir:

$$\alpha'_{jn} = Pa_i'^{jn} \quad \text{mit} \quad a_{i_0}'^{jn} = a_{i_0} \quad \text{sonst} \quad a_i'^{jn} = a_i^{jn}.$$

Hierbei soll a_{i_0} fest für alle j, n sein und außerdem sei $0 < w_{i_0}(a_{i_0}) < w_{i_0}(e_{i_0}) = 1$. Das Ereignis $\alpha' = \bigcap \alpha'_j$ mit $\alpha'_j = \bigcup\limits_n \alpha_{jn}$ ist dann in α enthalten und verschieden von O und weil $\pi(\alpha') = w_{i_0}(a_{i_0})\, \pi(\alpha) < \pi(\alpha)$ gilt, so ist α' echter Teil von α, also α kein Atom.

Betr.Beh. 2) (B): (I) Wir zeigen zuerst: Zu jedem $\alpha \in \Phi^\sigma$, $\alpha \neq O$, existiert ein $\beta \in \Phi^\sigma$ derart, daß β echter Teil von α ist und $\xi_1 \pi(\alpha) \leqq \pi(\beta) \leqq \xi_2 \pi(\alpha)$ gilt.

Da $\alpha = \bigcup \alpha_j$ mit $\alpha_k \cap \alpha_m = O$, $k \neq m$, $\alpha_j \in K$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, darstellbar ist[5], so brauchen wir (I) nur für jedes $\alpha \in K$, $\alpha \neq O$, zu beweisen. Es sei also $\alpha \in K$, wie in Betr.Beh. 1) gegeben, nach Voraussetzung (B) existiert zu jedem $i \in I' \subset I$ ein $a'_i \in \mathfrak{F}_i$, so daß $\xi_1 \leqq w_i(a'_i) \leqq \xi_2$ gilt. Ferner existiert ein festes $i' \in I'$ verschieden von den Indizien $i_1, \ldots, i_k$. Das Element $\beta = Pb_i$ mit $b_{i'} = a'_{i'}$, sonst $b_i = a_i$ für $i \in I$, $i \neq i'$, ist also verschieden von O und echter Teil von α, wobei noch $\xi_1 \pi(\alpha) \leqq \pi(\beta) \leqq \xi_2 \pi(\alpha)$. Damit ist die Beh. (I) auch für $\alpha \in \Phi^\sigma$ bewiesen.

(II) Es sei nun $\alpha \in \Phi^{\sigma\delta} = \overline{\Phi}$, also $\alpha = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ mit $\alpha_n \in \Phi^\sigma$ und $\alpha_n \supseteqq \alpha_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dann gilt $\pi(\alpha) = \lim\limits_{n \to \infty} \pi(\alpha_n)$ und $0 < \pi(\alpha) \leqq \pi(\alpha_n)$. Wir ordnen jedem α_n ein β_n nach (I) zu, so daß β_n echter Teil von α_n, verschieden von O ist und

[5] Jedes $\alpha \in \Phi^\sigma$ ist als Vereinigung von paarweise fremden Elementen aus K darstellbar. Denn wir haben zuerst $\alpha = \bigcup \alpha''_n$ mit $\alpha''_n \in \Phi$. O. B. d. A. können wir annehmen, daß $\alpha''_n \subseteqq \alpha''_{n+1}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, gilt. Wir haben aber dann $\alpha = \bigcup \alpha'_n$ mit $\alpha'_1 = \alpha''_1$, $\alpha'_n = \alpha''_n \dotplus \alpha''_{n-1}$, $n = 2, 3, \ldots$, also $\alpha'_n \in \Phi$ und $\alpha'_k \cap \alpha'_m = O$ für $k \neq m$. Da aber jedes $\alpha'_n \in \Phi$ als Vereinigung von endlich vielen paarweise fremden Elementen aus K darstellbar ist, so ist die Behauptung bewiesen.

$0 < \xi_1 \pi(a_n) \leqq \pi(\beta_n) \leqq \xi_2 \pi(\alpha_n) < 1, \; n = 1, 2, 3, \ldots$ gilt. Dann ist $O \neq \varliminf_{n\to\infty} \beta_n = \beta$ echter Teil von α, denn es gilt: $\beta_n \subset \alpha_n$ und $0 < \xi_1 \pi(\alpha) \leqq \pi(\beta) \leqq \xi_2 \pi(\alpha) < \pi(\alpha)$. Damit ist gezeigt, daß $\alpha \in \overline{\Phi}$ kein Atom ist.

3. Gegenseitig unabhängige Untersysteme eines W-Feldes.

3. 1. Definitionen. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein W-Feld. Eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$, die abgeschlossen ist für die in $\mathfrak{F}$ erklärte Operation $\frown$, in Zeichen $\mathfrak{A}^{\frown} = \mathfrak{A}$, bezeichnen wir als ein $\frown$-Untersystem von $\mathfrak{F}$; dabei soll ein $\frown$-Untersystem $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$ mindestens ein Ereignis $\neq \theta$ enthalten.

Es sei jetzt I eine beliebige Indexmenge. Die $\frown$-Untersysteme $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ heißen gegenseitig w-unabhängig (bezüglich des W-Feldes $(\mathfrak{F}, w)$), wenn für irgendwelche der endlich vielen Indizes $i_j \in I$ und beliebige $a_{ij} \in \mathfrak{A}_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$, gilt:

$$w(a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_k}) = w(a_{i_1}) \ldots w(a_{i_k}). \tag{U}$$

Aus dieser Definition folgen unmittelbar die beiden Sätze:

3. 1. 1. Satz: *Sind die $\frown$-Untersysteme $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ gegenseitig w-unabhängig, so ist jeder endliche Durchschnitt $a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_k}$ mit $i_j \in I$ und $a_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}$, nicht leer wenn $a_{i_j} \neq \theta$, $j = 1, \ldots, k$.*

3.1.2. Satz: *Sind die $\frown$-Untersysteme $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ gegenseitig w-unabhängig, so sind beliebige $\frown$-Untersystene $\mathfrak{B}_{i'}$, $i' \in I'$, von $\mathfrak{F}$ mit $I' \subset I$ und $\mathfrak{B}_{i'} \subset \mathfrak{A}_{i'}$, $i' \in I'$, ebenfalls gegenseitig w-unabhängig.*

3. 2. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein W-Feld und $\mathfrak{A}_i$, für $i \in I$, eine beliebige Teilmenge von $\mathfrak{F}$, also $\mathfrak{A}_i \subset \mathfrak{F}$; dann bezeichnen wir durch $(\mathfrak{A}_i^*, w_i)$ das kleinste W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$ über $\mathfrak{A}_i$, für $i \in I$. Es gilt:

3. 2. 1. Satz: Vor. *Die $\frown$-Untersysteme $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ seien gegenseitig w-unabhängig. $(\mathfrak{A}, w)$ sei das kleinste W-Unterfeld von $(\mathfrak{F}, w)$, das jedes $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, als $\frown$-Untersystem von $\mathfrak{A}$ enthält.*

Beh. 1) *Die Booleschen Unterverbände* $\mathfrak{A}_i^*$, $i \in I$, *von* $\mathfrak{F}$ *sind ebenfalls gegenseitig w-unabhängig.*

2) *Das W-Feld* $(\mathfrak{A}, w)$ *ist isometrisch zum Produktfeld* $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{A}_i^*, w_i)$ *und zwar derart, daß dabei insbesondere jedem Durchschnitt* $a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_k} \in \mathfrak{A}$ *mit* $a_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}^*$, $j = 1, \ldots, k$, *als Bild das P-Ereignis* $\underset{i \in I}{P} b_i$ *mit* $b_i = a_i$ *für* $i = i_1, \ldots i_k$ *sonst* $b_i = c_i = e$ *entspricht.*

Bew. Betr. Beh. 1): O. B. d. A. können wir annehmen, daß jedes $\mathfrak{A}_i$ das Ereignis e enthält, denn durch Adjunktion oder Weglassen von e bleibt jedes $\mathfrak{A}_i \frown$-Untersystem von $\mathfrak{F}$ und die gegenseitige w-Unabhängigkeit wird nicht gestört. Nach Nr. 1.1.2 gilt dann $\mathfrak{A}_i^* = \mathfrak{A}_i^+$. Wir zeigen nun, daß (U) (vgl. Def. 3, 1) gültig bleibt, wenn ein a_{i_j} durch $a_{i_j} \dotplus a'_{i_j}$ ersetzt wird, wobei $a'_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}$. O. B. d. A. setzen wir voraus, daß $j = 1$ ist.

Es ist nämlich:

$$w\left((a_{i_1} \dotplus a'_{i_1}) \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k}\right) = w(a_{i_1} \dotplus a'_{i_1}) \cdot \cdot w(a_{i_2}) \ldots w(a_{i_k}) \tag{1}$$

denn wir haben links

$$w\left((a_{i_1} \dotplus a'_{i_1}) \frown \ldots \frown a_{i_k}\right) = w(a_{i_1} \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k} \dotplus a'_{i_1} \frown \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k}) = w(a_{i_1} \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k}) + w(a'_{i_1} \frown a_{i_2} \frown \frown \ldots \frown a_{i_k}) - 2w(a_{i_1} \frown a'_{i_1} \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k})$$

und rechts:

$$w(a_{i_1} \dotplus a'_{i_1}) \cdot w(a_{i_2}) \ldots w(a_{i_k}) = w(a_{i_1}) \cdot w(a_{i_2}) \ldots w(a'_{i_k}) + + w(a'_{i_1}) w(a_{i_2}) \ldots w(a_{i_k}) - 2w(a_{i_1} \frown a'_{i_1}) w(a_{i_2}) \ldots w(a_{i_k}).$$

Aus

$$w(a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_k}) = w(a_{i_1}) \ldots w(a_{i_k})$$

$$w(a'_{i_1} \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k}) = w(a'_{i_1}) \cdot w(a_{i_2}) \ldots w(a_{i_k})$$

$$w\left((a_{i_1} \frown a'_{i_1}) \frown a_{i_2} \frown \ldots \frown a_{i_k}\right) = w(a_{i_1} \frown a'_{i_1}) \cdot \cdot w(a_{i_2}) \ldots w(a_{i_k})$$

ergibt sich (1). Durch Induktionsschluß beweist man, daß (1) richtig bleibt, wenn beliebige der a_{i_j}, $j = 1, 2, \ldots, k$, durch einen Ausdruck $a'_{i_j} = a^1_{i_j} + \ldots + a^{N_j}_{i_j}$ mit $a^q_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}$, $q = i \ldots N_j$, ersetzt werden. Es gilt also (U) für $a_{i_j} \in \mathfrak{A}^*_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$. Damit ist bewiesen, daß die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}^*_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ gegenseitig w-unabhängig sind.

Betr. Beh. 2): Es sei $\mathfrak{K}$ die Gesamtheit aller Durchschnitte $a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k} \in \mathfrak{F}$ entsprechend beliebiger Wahl sowohl der endlich vielen Indizes $(i_1, i_2, \ldots, i_k) \subset I$ als der $a_{i_j} \in \mathfrak{A}^*_{i_j}$, $j = 1, 2, \ldots, k$. Wir setzen auch hier voraus, daß jedes $\mathfrak{A}^*_{i_j}$ das Element e enthält (vgl. Betr.Beh. 1), Beginn).

(1) Wir bemerken: Sind zwei a_i und $a_{i'}$ mit $i \neq i'$, $i, i' \in I$, verschieden von θ bzw. e, so gilt immer $a_i \neq a_{i'}$; denn es muß gelten $a_i \cap \bar{a}_i \neq \theta$, wobei $\bar{a}_i$ das Komplement von $a_{i'}$ bedeutet. Irgendwelche $a = a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k} \in \mathfrak{K}$ bzw. $a' = a'_{j_1} \cap \ldots \cap a_{j_m} \in \mathfrak{K}$ können wir in der Form $a = a_{t_1} \cap \ldots \cap a_{t_n}$ bzw. $a' = a'_{t_1} \cap \ldots \cap a'_{t_n}$ schreiben, wobei $(t_1, \ldots, t_n)$ die Vereinigung von $(i_1, \ldots, i_k)$ und $(j_1, \ldots, j_m)$ bedeutet, also $n \leqq k + m$, und $a_{t_q} = e$, wenn $t_q \neq i_1, \ldots, i_k$, bzw. $a'_{t_q} = e$, wenn $t_q \neq j_1, \ldots j_m$. O. B. d. A. können wir also immer voraussetzen, daß irgend zwei $a, a' \in \mathfrak{K}$ gleiche Anzahl Glieder und dieselben Indizes aufweisen. Nun gilt

(a) Zwei von θ verschiedene $a, a' \in \mathfrak{K}$ sind dann und nur dann unvereinbar, wenn bei jeder Darstellung $a = a_{t_1} \cap \ldots \cap a_{t_n}$, $a' = a'_{t_1} \cap \ldots \cap a'_{t_n}$ gilt: $a_{t_q} \cap a'_{t_q} = \theta$ für mindestens ein t_q, $q = 1, \ldots, n$ (Bew. klar!).

(b) Zwei von θ verschiedene $a, a' \in \mathfrak{K}$ sind dann und nur dann gleich, wenn bei jeder Darstellung $a = a_{t_1} \cap \ldots \cap a_{t_n}$, $a' = a'_{t_1} \cap \ldots \cap a'_{t_n}$ gilt: $a_{t_q} = a'_{t_q}$ für jedes $q = 1, \ldots n$.

Bew.: Dann klar. Nur dann: Aus $a = a'$ folgt $a \cap a' =$ $= (a_{t_1} \cap a'_{t_1}) \cap \ldots \cap (a_{t_n} \cap a'_{t_n}) = a = a'$ und also $w\,(a \cap a') =$

$= w(a) = w(a') = w(a_{t_1} \cap a'_{t_1}) \ldots w(a_{t_n} \cap a'_{t_n})$. Angenommen für mindestens ein $q = 1, \ldots, n$ würde gelten: $a_{t_q} \neq a'_{t_q}$. Da $a_{t_q} \cap a'_{t_q} \subseteqq a_{t_q}$ bzw. $\subseteqq a'_{t_q}$ für jedes $q = 1, \ldots, n$, so wäre $w(a \cap a') < w(a)$ bzw. $w(a')$ (Widerspruch!).

(c) $\mathfrak{K}$ ist ein $\cap$-Untersystem von $\mathfrak{F}$, enthält e und es gilt: $a \cap a' = (a_{t_1} \cap a'_{t_1}) \cap \ldots \cap (a_{t_n} \cap a'_{t_n})$ für irgendzwei $a, a' \in \mathfrak{K}$ mit $a = a_{t_1} \cap \ldots \cap a_{t_n}$, $a' = a'_{t_1} \cap \ldots \cap a'_{t_n}$ (Bew. klar!).

(2) Wir ordnen jedem $a = a_{i_1} \cap a_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k} \in \mathfrak{K}$ eineindeutig das P-Ereignis $\beta = \underset{i \in I}{P b_i} \in K \subset \Phi$ zu (vgl. Nr. 2.2.4) mit $b_i = a_i$ für $i = i_1, i_2, \ldots, i_k$ sonst $b_i = e_i = e$. Es sei $\beta = f(a)$, $a \in \mathfrak{K}$, $\beta \in \mathfrak{K}$ diese eineindeutige Zuordnung. Aus (1) (a), (b) und (c) und den entsprechenden Regeln für die Elemente von K, letzteres als Untersystem von Φ betrachtet (vgl. Nr. 2. 1)[6], folgt, daß die Zuordnung $\beta = f(a)$, $a \in \mathfrak{K}$, $\beta \in K \subset \Phi$, eine Isomorphie ist. Aus (c) und Nr. 1. 1. 2. folgt, daß $\mathfrak{K}^+$ ein Boolescher Unterverband von $\mathfrak{F}$ und, wie leicht ersichtlich, gleich dem Unterverband $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{F}$ ist. Da außerdem $K^+ = \Phi$ gilt, weil wir K als Untersystem von Φ betrachten, so wird die Zuordnung $\beta = f(a)$ eine Isomorphie zwischen $\mathfrak{K}^+ = \mathfrak{A}$ und $K^+ = \Phi$, wenn wir ihren Definitionsbereich durch die Festsetzung: $\sigma = f(s)$ für $\sigma = \beta^1 + \cdots + \beta^n \in \Phi$, $s = a^1 + \cdots + a^n \in \mathfrak{A}$ mit $\beta^i = f(a^i)$, $i = 1, \ldots, n$, erweitern. Außerdem ist $w(a) = \pi(\beta)$ bzw. $w(s) = \pi(\sigma)$, wie aus der Erklärung der Zuordnung $\beta = f(a)$ bzw. $\sigma = f(s)$ folgt, d. h. $(\mathfrak{A}, w)$ ist zu (Φ, π) isometrisch. Damit ist der Satz bewiesen.

3. 2. 2. Zusatz: *Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ vollideell. Es seien ferner die $\cap$ Untersysteme $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ gegenseitig w-unabhängig. Es bedeute $\overline{\mathfrak{A}}_i$ den kleinsten e enthaltenden Booleschen σ-Unterverband von $\mathfrak{F}$ über $\mathfrak{A}_i$ für jedes $i \in I$. Dann sind die Booleschen σ-Unterverbände $\overline{\mathfrak{A}}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ ebenfalls gegenseitig w-un-*

[6] Bezüglich (c) sei bemerkt daß: aus $\alpha = P a_i$, $\beta = P b_i \in K$ ebenfalls folgt $\alpha \cap \beta = P(a_i \cap b_i) \in K$ und K, als Untersystem von Φ betrachtet, ebenfalls $\cap$-abgeschlossen ist (vgl. Nr. 2. 3. 4).

abhängig und $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{A}_i^*, w_i) \equiv (\Phi^*, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\overline{\mathfrak{A}}_i, w_i)$ *ist isometrisch zu dem kleinsten vollideellen W-Unterfeld* $(\overline{\mathfrak{A}}, w)$ *von* $(\mathfrak{F}, w)$, *das jedes* $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$ *als* $\frown$*-Untersystem von* $\overline{\mathfrak{A}}$ *enthält.*

Bew.: Nach Satz 3. 2. 1 sind die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}_i^*$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ gegenseitig w-unabhängig. Jedes $a_i \in \overline{\mathfrak{A}}_i$ ist als $w\text{-}\lim\limits_{n\to\infty} a_i^n = a_i$ darstellbar, wobei $a_i^n \in \mathfrak{A}_i^*$, $n = 1, 2, \ldots$ (vgl. [5] § 11–12). Nun haben wir:

$$a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_k} = (w\text{-}\lim a_{i_1}^n) \frown \ldots \frown (w\text{-}\lim a_{i_k}^n) =$$

$$= w\text{-}\lim (a_{i_1} \frown \ldots \frown a_{i_k}) \text{ für } a_{i_j} \in \overline{\mathfrak{A}}_{i_j},\ i_j \in I,\ j = 1, \ldots, k;$$

denn jedes $\overline{\mathfrak{A}}_i$, $i \in I$, ist bezüglich der Operationen $\frown$ und $\dotplus$ ein algebraischer Ring und die beiden Operationen für die w-Konvergenz sind stetig. Die Isometrie zwischen (Φ, π) bzw. (Φ^*, π) und $(\overline{\mathfrak{A}}, w)$ folgt nun aus dem Satz 3. 2. 1.

3. 3. Es sei $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ ein W-Produktfeld. Dann bilden die P-Ereignisse $\alpha = P a_i$ mit $a_i = e_i$, wenn $i \neq j$ für ein $j \in I$, und $a_i = x_j$, wenn $i = j$, für alle $x_j \in \mathfrak{F}_j$ bei festem $j \in I$ einen Booleschen Unterverband Φ_j von Φ, der isomorph zu $\mathfrak{F}_j$ ist. (Φ_j, π) ist also ein W-Unterfeld von (Φ, π) und isometrisch zu dem W-Feld $(\mathfrak{F}_j, w_j)$. Aus dieser Isometrie und der Definition des Produktfeldes (Φ, π) folgt, daß die Booleschen Unterverbände Φ_i, $i \in I$, von Φ gegenseitig π-unabhängig sind.

Man beweist leicht:

3. 3. 1. Satz: *Es sei* $(\mathfrak{F}, w)$ *ein W-Feld und besitze ein W-Unterfeld* $(\mathfrak{F}', w)$, *das isometrisch zu einem W-Produktfeld* $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ *sei. Es seien ferner* $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, $\frown$*-Untersysteme von* $\mathfrak{F}'$ *und bei der vorausgesetzten Isomorphie zwischen* $\mathfrak{F}$ *und* Φ *sei jedes* $\mathfrak{A}_i$ *auf ein Untersystem des* Φ_i (vgl. Nr. 3. 3) *abgebildet. Dann sind die* $\frown$*-Untersysteme* $\mathfrak{A}_1$, $i \in I$, *von* $\mathfrak{F}'$ *gegenseitig w-unabhängig.*

Aus 3. 2. 1 und 3. 3. 1 folgt:

3. 3. 2. Satz: *Ein W-Feld* $(\mathfrak{F}, w)$ *besitzt dann und nur dann gegenseitig w-unabhängige Untersysteme, wenn* $(\mathfrak{F}, w)$ *selbst oder ein W-Unterfeld* $(\mathfrak{F}', w)$ *von* $(\mathfrak{F}, w)$ *zu einem Produktfeld isometrisch ist.*

Ist $\underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ ein W-Produktfeld, zu welchem $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. sein Unterfeld $(\mathfrak{F}', w)$ isometrisch ist, so schreiben wir

$$(\mathfrak{F}, w) \text{ bzw. } (\mathfrak{F}', w) \equiv \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$$

und bezeichnen $\underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ als eine Produktzerlegung von $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\mathfrak{F}', w)$ in die gegenseitig w-unabhängigen W-Felder $(\mathfrak{F}_i, w_i)$. Hierbei fassen wir die $(\mathfrak{F}_i, w_i)$ als W-Unterfelder von $(\mathfrak{F}, w)$ auf.

Sind $(\mathfrak{F}_i, w_i)$, $i \in I$, beliebige vorgegebene W-Felder, so können wir das W-Feld $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ bzw. $(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{F}_i, w_i)$ bilden und (Φ, π) bzw. $(\overline{\Phi}, \pi)$ als W-Oberfeld von allen $(\mathfrak{F}_i, w_i)$ auffassen. Die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{F}_i$, $i \in I$, von Φ sind dann gegenseitig π-unabhängig.

Beispiele. Es gilt:

(1) $(\mathfrak{J}, \mu) \equiv \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{J}_i, \mu_i)$ mit $\mathfrak{J}_i = \mathfrak{J}$, $\mu_i = \mu$ für jedes I, dessen Mächtigkeit $\leq \aleph_0$ ist [6]; in $(\mathfrak{J}, \mu)$ existieren daher abzählbar viele gegenseitig w-unabhängige Untersysteme. (1) gilt aber nicht, wenn die Mächtigkeit von I größer als $\aleph_0$ ist, auch wenn die Felder $(\mathfrak{J}_i, \mu_i)$ durch beliebige andere Felder als $(\mathfrak{J}, \mu)$ ersetzt werden. Denn die rechte Seite in (1) wird dann immer ein W-Feld ohne empirische Basis. Wir haben also

3. 3. 3. Satz: *Das Lebesguesche W-Feld* $(\mathfrak{J}, \mu)$ *bzw. ein Unterfeld von ihm bzw. jedes W-Feld mit empirischer Basis besitzt höchstens abzählbar viele gegenseitig* μ*-unabhängige Untersysteme (als deren Produkt es darstellbar ist).*

4. Gegenseitig unabhängige Versuche

4. 1. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein W-Feld. Es sei ferner $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ seine vollideelle Erweiterung. Als Versuch $\mathfrak{a} = (a_i)_{i \in I}$ in $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ mit den Zerlegungsgliedern a_i bezeichnen wir jede Zerlegung

$e = \bigcup_{i \in I} a_i$ von e in $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ mit $a_i \in \mathfrak{F}$ bzw. $a_i \in \overline{\mathfrak{F}}$, $a_i \neq \theta$, $a_i \frown a_j = \theta$, $i \neq j$; $i, j \in I$. Es gibt bekanntlich in $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ Versuche mit *nur* höchstens abzählbar vielen Zerlegungsgliedern [1]. Wir werden also einen Versuch einfach durch $(a_1, a_2, \ldots)$ oder $e = {}^*\bigcup a_i$ bezeichnen. Ist $\mathfrak{a}$ ein Versuch, so bildet $(\theta, e, a_1, a_2, \ldots)$, als Untersystem von $\mathfrak{F}$ bzw. von $\overline{\mathfrak{F}}$ betrachtet, offensichtlich ein $\frown$-Untersystem von $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$. Wir definieren:

4.1.1. Definition: *Die Versuche* $\mathfrak{a}_i$, $i \in I$, *mit* $\mathfrak{a}_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, *in* $\mathfrak{F}$ *bzw. in* $\overline{\mathfrak{F}}$ *heißen gegenseitig* w*-unabhängig, wenn und nur wenn die* $\frown$*-Untersysteme* $(\theta, e, a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, *von* $\mathfrak{F}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{F}}$ *gegenseitig* w*-unabhängig sind.*

Bemerkung: Ein von θ bzw. e verschiedenes Ereignis x in $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ ist, als Untersystem von $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ betrachtet, ein $\frown$-Untersystem. Wenn daher Untersysteme mit nur einem Ereignis w-unabhängig sind, so werden wir auch die zugehörigen Ereignisse $x_i \in \mathfrak{F}$ bzw. $x_i \in \overline{\mathfrak{F}}$, $i \in I$, als gegenseitig w-unabhängig in $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ bezeichnen.

Es gilt der

4.1.2. Satz: *Die zweigliedrigen Versuche* $(a_i, \bar{a}_i)$, $i \in I$, *in* $\mathfrak{F}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{F}}$ *sind dann und nur dann gegenseitig* w*-unabhängig, wenn die Ereignisse* $x_i \in \mathfrak{F}$ *bzw.* $\overline{\mathfrak{F}}$, $i \in I$, *mit* $x_i = a_i$ *oder* $x_i = \bar{a}_i$ *gegenseitig* w*-unabhängig sind.*

Bew. *Nur dann*: klar; denn jedes x_i, als Untersystem von $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ betrachtet, ist in $(\theta, e, a_i, \bar{a}_i)$ enthalten. *Dann*: Sind die $x_i \in \mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$, $i \in I$, gegenseitig w-unabhängig, so sind die Booleschen Unterverbände $(\theta, e, a_i, \bar{a}_i)$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ gegenseitig w-unabhängig (vgl. Satz 3.2.1), also (nach Def. 4.1.1) auch die Versuche $(a_i, \bar{a}_i)$, $i \in I$.

4.2. Die Versuche $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$ $i \in I$ in $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ seien gegenseitig w-unabhängig. Wir ordnen jedem Versuch $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, ein W-Unterfeld $(\mathfrak{A}_i, w_i)$ von $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ folgendermaßen zu: Mit dem $\frown$-Untersystem $(\theta, e, a_{i1}, a_{i2}, \ldots) = \mathfrak{S}_i$ von $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$ als Basis bilden wir $\mathfrak{S}_i^+ = \mathfrak{A}_i$. In $\mathfrak{A}_i$ erklären wir die Wahrscheinlichkeit w_i wie in $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$. Die vollideelle Erweiterung $(\overline{\mathfrak{A}}_i, w_i)$ von $(\mathfrak{A}_i, w_i)$ in $(\overline{\mathfrak{F}}, w_i)$ ist dann atomar und $\overline{\mathfrak{A}}_i$ isomorph zu dem Booleschen Mengenverband aller Teilmengen von $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, wenn wir die $a_{i1}, a_{i2}, \ldots$ als Punkte (Atome) betrachten. Die Booleschen Verbände bzw. σ-Verbände $\mathfrak{A}_i$ bzw. $\overline{\mathfrak{A}}_i$, $i \in I$, sind gegenseitig w-unabhängig. Das W-Produktfeld

$$(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{A}_i, w_i) \text{ bzw. } (\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\mathfrak{A}_i, w_i) \equiv \underset{i \in I}{P} (\overline{\mathfrak{A}}_i, w_i)$$

ist isometrisch zu dem kleinsten W-Unterfeld bzw. dem kleinsten vollideellen W-Unterfeld $(\mathfrak{A}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{A}}, w)$ von $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$, in welchem jedes $(\mathfrak{A}_i, w_i)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{A}}_i, w_i)$ als W-Unterfeld enthalten ist.

Ist (A, w) bzw. $(\overline{\mathfrak{A}}, w)$ mit $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ identisch, d. h. (Φ, π) bzw. $(\overline{\Phi}, \pi)$ zu $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ isometrisch, so sagen wir:

Die gegenseitig w-unabhängigen Versuche $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, erzeugen das W-Feld $(\mathfrak{F}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$.

Es gilt der Satz:

4. 2. 1. Satz: *Erzeugen die gegenseitig w-unabhängigen Versuche $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, ein vollideelles W-Feld $(\mathfrak{F}, w)$ und ist die Mächtigkeit von I gleich oder kleiner als $\aleph_0$, so besitzt $(\mathfrak{F}, w)$ eine empirische Basis. Ist die Mächtigkeit von I größer als $\aleph_0$, so besitzt $(\mathfrak{F}, w)$ keine empirische Basis. Ist (1) die Mächtigkeit von I größer als $\aleph_0$ oder (2) gleich $\aleph_0$, und existieren aber zwei Konstanten ξ_1, ξ_2, so daß $0 < \xi_1 \leqq w(a_{ij}) \leqq \xi_2 < 1$ für mindestens ein $j = 1, 2, \ldots$ und für jedes $i \in I' \subset I$, wobei I' ebenfalls die Mächtigkeit $\aleph_0$ besitzt, so ist $(\mathfrak{F}, w)$ atomfrei und im Falle (2) zu $(\mathfrak{J}, \mu)$ isometrisch.*

Der Beweis dieses Satzes folgt aus Satz (2.3.4).

4. 2. 2. Folgerung: *In einem W-Feld mit empirischer Basis können höchstens abzählbar viele gegenseitig w-unabhängige Versuche existieren.*

4. 2. 3. Bemerkung: Arbeitet man in der Wahrscheinlichkeitstheorie konstruktiv und setzt man voraus, daß gewisse Versuche $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, denen man Wahrscheinlichkeiten $w(a_{ij})$ mit

$$w(a_{i1}) + w(a_{i2}) + \cdots = 1, \quad 0 < w(a_{ij}) < 1$$

zuordnet, gegenseitig w-unabhängig sein sollen, so kann man nach Nr. 4.2 das W-Feld $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{A}_i, w_i)$ bzw. $(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in I}{\overline{P}} (\overline{\mathfrak{A}}_i, w_i)$ bilden und die Versuche $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, in dieses Feld einbetten. Handelt es sich um höchstens abzählbar viele Versuche, so ist das konstruierte W-Feld (Φ, π) bzw. $(\overline{\Phi}, \pi)$ isometrisch zu einem W-Unterfeld von $(\mathfrak{J}, \mu)$. In diesem Fall kann man also die Versuche $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, als Versuche in $(\mathfrak{J}, \mu)$ auffassen.

5. Gegenseitig unabhängige Zufallsvariablen

5.1. Es sei $(\mathfrak{F}, w)$ ein W-Feld, es sei ferner $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ seine vollideelle Erweiterung. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{V}$ den Vektorverband aller Zufallsvariablen über $\overline{\mathfrak{F}}$ (vgl. [1], § 4), mit $\mathfrak{T}$ bzw. $\overline{\mathfrak{T}}$ den Vektorverband aller Treppenzufallsvariablen, die allen möglichen Zerlegungen (Versuchen) in $\mathfrak{F}$ bzw. in $\overline{\mathfrak{F}}$ entsprechen, mit $\mathfrak{E}$ bzw. $\overline{\mathfrak{E}}$ den Vektorverband aller Treppenzufallsvariablen, die allen Versuchen in $\mathfrak{F}$ bzw. in $\overline{\mathfrak{F}}$ mit endlich vielen Zerlegungsgliedern entsprechen und schließlich mit $\mathfrak{C}$ bzw. $\overline{\mathfrak{C}}$ den Verband aller charakteristischen Zufallsvariablen über $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$, die bekanntlich den zweigliedrigen Zerlegungen mit den Werten 1 und 0 entsprechen. Wenn wir die Konstanten 1 und 0 auch als charakteristische Zufallsvariablen betrachten, dann ist $\mathfrak{C}$ bzw. $\overline{\mathfrak{C}}$ bezüglich der Booleschen Verbandsoperationen isomorph zu $\mathfrak{F}$ bzw. $\overline{\mathfrak{F}}$. Wir bezeichnen deshalb im folgenden eine charakteristische Zufallsvariable, die einem Ereignis $a \in \mathfrak{F}$ bzw. $a \in \overline{\mathfrak{F}}$ entspricht, auch einfach durch das fett gedruckte $\boldsymbol{a}$. Dem Ereignis e bzw. θ entspricht dann die Konstante 1 bzw. 0. $\mathfrak{E}$ bzw. $\overline{\mathfrak{E}}$ ist der kleinste Vektorverband über $\mathfrak{C}$ bzw. $\overline{\mathfrak{C}}$ mit den reellen Zahlen als Operatoren. Jedes $X \in \mathfrak{E}$ bzw. $\overline{\mathfrak{E}}$, also $X = \underset{i=1}{\overset{n}{S}} (a_i \to \alpha_i)$, ist darstellbar in der Form

$$X = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n.$$

Allgemein gilt, wenn $X \in \mathfrak{T}$ bzw. $X \in \overline{\mathfrak{T}}$, also wenn $X = \underset{i=1}{\overset{\infty}{S}} (a_i \to \alpha_i)$:

$$X = \operatorname*{limalg}_{n \to \infty} (\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \cdots + \alpha_n \boldsymbol{a}_n) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \boldsymbol{a}_i.$$

Bedeutet $\mathfrak{E}^1$ bzw. $\mathfrak{E}_1$ die Gesamtheit aller Zufallsvariablen, die in der Form

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} X_i \text{ bzw. } \bigcap_{i=1}^{\infty} X_i \text{ mit } X_i \subseteq X_{i+1} \text{ bzw. } X_i \supseteq X_{i+1},\ X_i \in \mathfrak{E}$$
$$i = 1, 2, \ldots$$

darstellbar sind und $\mathfrak{E}^*$ die Gesamtheit aller Zufallsvariablen, die algebraische Limiten von Folgen aus $\mathfrak{E}$ sind, so gilt:

$$(\mathfrak{E}^1)_1 = (\mathfrak{E}_1)^1 = \mathfrak{E}^* = \mathfrak{V}$$

(vgl. [10]), d. h. $\mathfrak{E}$ liegt bezüglich der algebraischen Konvergenz dicht in $\mathfrak{V}$. Wir bemerken außerdem, daß $\overline{\mathfrak{T}}$ bezüglich der gleichmäßigen Konvergenz dicht in $\mathfrak{V}$ liegt.

Jeder Zufallsvariablen $X \in \mathfrak{V}$ entspricht eine Ereignisskala (Spektralschar) $\{[X < \xi]\}$, $-\infty < \xi < +\infty$. Dann ist

$$\varphi_X(\xi) = w([X < \xi]),\ -\infty < \xi < +\infty$$

die sogenannte Verteilungsfunktion von X. Die Ereignisskala $\{[X < \xi]\}$ bildet ein $\frown$-Untersystem von $\overline{\mathfrak{F}}$, denn es gilt:

$$[X < \xi] \frown [X < \xi'] = [X < \operatorname{Min}(\xi, \xi')].$$

5.2. Definition: *Die Zufallsvariablen X_i, $i \in I$, aus $\mathfrak{V}$ heißen gegenseitig w-unabhängig, wenn ihre Ereignisskalen $\{[X_i < \xi]\}$, $i \in I$, als $\frown$-Untersysteme von $\overline{\mathfrak{F}}$ betrachtet, gegenseitig w-unabhängig sind.*

Zu einer Ereignisskala $\{[X < \xi]\}$ gehören nicht immer θ und e. Es gilt aber $\operatorname{limalg}_{n\to\infty} [X < -n] = \theta$ und $\operatorname{limalg}_{n\to\infty} [X < +n] = e$. Wir adjungieren zu $\{[X < \xi]\}$ die Elemente θ und e, falls sie nicht dazu gehören, und bezeichnen die so entstehende Menge mit $\mathfrak{S}_X$. Es ist $\mathfrak{S}_X$ ein $\frown$-Untersystem von $\overline{\mathfrak{F}}$. Nun ordnen wir der Zufallsvariablen X den kleinsten Booleschen Unterverband $\mathfrak{F}_X$ bzw. σ-Unterverband $\overline{\mathfrak{F}}_X$ von $\overline{\mathfrak{F}}$ über $\mathfrak{S}_X$ zu. Nach Nr. 1.1.2 gilt dann $\mathfrak{S}_X^+ = \mathfrak{F}_X$ bzw. $\mathfrak{S}_X^{+\sigma\delta} = \overline{\mathfrak{F}}_X$.

Als Folgerung des Satzes (3.2.1) haben wir:

5.3. Satz: *Sind die Zufallsvariablen X_i, $i \in I$, gegenseitig w-unabhängig, so ist das W-Produktfeld*

$$(\Phi, \pi) = \underset{i\in I}{P}(\mathfrak{F}_{X_i}, w_i) \text{ bzw. } (\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i\in I}{\overline{P}}(\mathfrak{F}_{X_i}, w_i) \equiv \underset{i\in I}{\overline{P}}(\overline{\mathfrak{F}}_{X_i}, w_i)$$

isometrisch zu dem kleinsten W-Unterfeld $(\mathfrak{S}, w)$ *bzw. zu dem kleinsten vollideellen W-Unterfeld* $(\overline{\mathfrak{S}}, w)$ *von* $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$, *das jedes* $\mathfrak{S}_{X_i}$, $i \in I$, *als* $\frown$*-Untersystem von* $\mathfrak{S}$ *enthält.*

Weiter gilt:

5.4. Satz: *Die Treppenzufallsvariablen* X_i, $i \in I$, *sind dann und nur dann gegenseitig* w*-unabhängig, wenn die diesen zugeordneten Versuche* $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$, $i \in I$, *gegenseitig* w*-unabhängig sind.*

Es gilt nämlich: $\mathfrak{F}_{X_i}$ ist identisch mit dem in Nr. 4.2 dem Versuch $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots)$ zugeordneten Booleschen Verband $\mathfrak{A}_i$.

Bemerkung: Das vorhin der Zufallsvariablen X zugeordnete vollideelle W-Unterfeld $(\overline{\mathfrak{F}}_X, w)$ von $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ kann auch mittels irgendeiner der Spektralscharen

$$\{[X \leqq \xi]\} \text{ oder } \{[X \geqq \xi]\} \text{ oder } \{[X > \xi]\}, \; -\infty < \xi < +\infty$$

erzeugt werden. Die gegenseitige w-Unabhängigkeit der Zufallsvariablen X_i, $i \in I$, kann also mit Hilfe irgendeiner der vier Spektralscharen: $\{[X < \xi]\}$, $\{[X \leqq \xi]\}$, $\{[X \geqq \xi]\}$, $\{[X > \xi]\}$ erklärt werden.

5.5. Das W-Feld $(\mathfrak{F}_X, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}_X, w)$ einer Zufallsvariablen X besitzt immer eine empirische Basis. Ist nämlich die abzählbare Menge $\xi_1, \xi_2, \ldots$ dicht im Bereich der reellen Zahlen, ist z. B. $\xi_1, \xi_2, \ldots$ die Menge der rationalen Zahlen, so kann $(\mathfrak{F}_X, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{F}}_X, w)$ mittels $([X < \xi_1], [X < \xi_2], \ldots)$ erzeugt werden. Ist nun X_i, $i = 1, 2, 3, \ldots$, eine Folge von abzählbar vielen gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen, so besitzt $(\Phi, \pi) = \underset{i \in (1, 2, \ldots)}{P} (\mathfrak{F}_{X_i}, w_i)$ bzw. $(\overline{\Phi}, \pi) = \underset{i \in (1, 2, \ldots)}{\overline{P}} (\mathfrak{F}_{X_i}, w_i)$ und dementsprechend sein isometrisches Bildfeld $(\mathfrak{S}, w)$ bzw. $(\overline{\mathfrak{S}}, w)$ in $(\overline{\mathfrak{F}}, w)$ eine empirische Basis und ist daher zu einem W-Unterfeld des Lebesgueschen W-Feldes $(\mathfrak{J}, \mu)$ isometrisch. Ist insbesondere für $(\overline{\mathfrak{S}}, w)$ die Bedingung (B) des Satzes 2.3.4 erfüllt, so ist $(\overline{\mathfrak{S}}, w)$ zu $(\mathfrak{J}, \mu)$ selbst isometrisch. Will man daher in der Wahrscheinlichkeitstheorie einen Grenzwertsatz beweisen, welcher sich auf eine Folge X_1, $X_2, \ldots$ von gegenseitig w-unabhängigen Zufallsvariablen bezieht, so ist stets die Spektralschar der Grenzzufallsvariablen ein Untersystem des W-Feldes ($\mathfrak{S}$, w), und zwar für alle in der Wahrscheinlichkeitstheorie zur Definition der Grenzzufallsvariablen benutzten Konvergenzbegriffe (algebraische oder gleichmäßige oder stochastische [w-asymptotische] Konvergenz). Man kann also in allen diesen Fällen die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ als Zufallsvariablen des W-Feldes ($\mathfrak{J}$, μ) auffassen und Beweismethoden benutzen, die in der Literatur unter der Voraussetzung angewandt werden, daß das Grundfeld aus allen nach Lebesgue meßbaren Teilmengen des Intervalles (0, 1) besteht (s. z. B. [11]).

Anhang zu Nr. 3

3a. Gegenseitige algebraische Unabhängigkeit von Booleschen Unterverbänden eines Booleschen Verbandes

Nach Abschluß der vorstehenden Note kam eine Arbeit von S. Banach (s. [7]) zu meiner Kenntnis. Nachstehend sollen Beziehungen zwischen dieser Arbeit und den Ausführungen in Nr. 3 der vorliegenden Note besprochen werden.

Banach führt die gegenseitige Unabhängigkeit von Booleschen Unterverbänden eines Booleschen Verbandes algebraisch ein[7], also ohne Benutzung der Wahrscheinlichkeit. Wir zeigen, daß aus der Unabhängigkeit im Sinne von Banach, kurz algebraische Unabhängigkeit bezeichnet, die w-Unabhängigkeit nicht immer folgt. Wie in Nr. 3 kann man die Frage nach der algebraischen Unabhängigkeit ebenfalls auf die nach der Zerlegung des Booleschen Verbandes in ein Produkt von Booleschen Verbänden zurückführen; demzufolge kann der in der Arbeit von Banach erwähnte Satz von Marczewski (s. [7]) als ein Erweiterungssatz aus der Theorie der Cartesischen Produkte von Booleschen Maßverbänden betrachtet werden. Die von Banach eingeführte abzählbare Unabhängigkeit haben wir hier nicht berücksichtigt. Da aber A. Appert (s. [8]) die Multiplikation

[7] In der Arbeit von Banach handelt es sich speziell um Boolesche Mengenunterverbände des Booleschen Verbandes aller Teilmengen einer Grundmenge.

von Maßfunktionen und die Bildung der Cartesischen Produkte mit abzählbar vielen von der Einheit verschiedenen Komponenten im Falle des Raumes aller Zahlenfolgen behandelt hat, so dürfte der Beweis des Hauptsatzes von Banach mit ähnlichen Mitteln keine wesentlich neuen Schwierigkeiten bieten.

3a. 1. Definition: *Es sei $\mathfrak{F}$ ein Boolescher Verband mit Einheit e, es seien ferner $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, das Element e enthaltende Boolesche Unterverbände von $\mathfrak{F}$. Es gelte bei beliebiger Wahl der endlich vielen Indizes $i_j \in I$ und der $a_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}$, mit $a_{i_j} \neq \theta$, $j = 1, 2, \ldots, k$:*

$$a_{i_1} \cap a_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k} \neq \theta; \tag{1}$$

dann bezeichnen wir die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ als gegenseitig algebraisch unabhängig (kurz alg-unabhängig).

Bemerkung: Die alg-Unabhängigkeit kann man nicht für $\cap$-Untersysteme von $\mathfrak{F}$ erklären, weil sie dann nicht immer auf die kleinsten Booleschen Unterverbände von $\mathfrak{F}$ über diese $\cap$-Untersysteme erweitert werden kann, wie es bei der w-Unabhängigkeit der Fall ist.

Ist $(\mathfrak{F}, w)$ ein W-Feld und sind die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ gegenseitig w-unabhängig, so folgt aus Satz 3. 1. 1, daß die $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, zugleich alg-unabhängig sind. Die Umkehrung gilt aber nicht:

Beispiel: Es sei $\mathfrak{F}$ der Boolesche Verband, den die vier Atome: a_1, a_2, a_3, a_4 erzeugen; er bestehe aus allen Teilmengen der Menge (a_1, a_2, a_3, a_4), die leere Menge θ eingeschlossen. Wir setzen nun:

$$\mathfrak{A}_1 = (\theta, a_1 \cup a_3, a_2 \cup a_4, e); \quad \mathfrak{A}_2 = (\theta, a_1 \cup a_2, a_3 \cup a_4, e).$$

Die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, von $\mathfrak{F}$ sind offenbar alg-unabhängig. Machen wir aber $\mathfrak{F}$ zu einem W-Feld $(\mathfrak{F}, w)$, indem wir den Atomen die Wahrscheinlichkeit $w(a_1) = 0{,}2$; $w(a_2) = 0{,}4$; $w(a_3) = 0{,}1$; $w(a_4) = 0{,}3$ zuordnen und den anderen Ereignissen als Wahrscheinlichkeit die Summe der Wahrscheinlichkeiten der Atomen, die diese Ereignisse enthalten, so sind die $\mathfrak{A}_i$, $i = 1, 2$, nicht gegenseitig w-unabhängig.

Für die alg-Unabhängigkeit gilt ein zu 3. 2. 1. entsprechender Satz nämlich:

3a. 2. Satz: Vor: *Es sei $\mathfrak{F}$ ein Boolescher Verband. Es seien ferner die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{F}$ alg-unabhängig. Es bedeute $\mathfrak{A}$ den kleinsten Booleschen Unterverband von $\mathfrak{F}$, der jedes $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, als Booleschen Unterverband enthält.*

Beh.: *Der Boolesche Verband $\mathfrak{A}$ ist isomorph zum Booleschen P-Verband $\Phi = \underset{i\in I}{P}\, \mathfrak{A}_i$ und zwar derart, daß bei dieser Isomorphie jedem Durchschnitt $a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k} \in \mathfrak{A}$ mit $i_j \in I$, $a_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$, als Bild das P-Element $\beta = P\, b_i$ mit $b_i = a_i$ für $i = i_1, \ldots, i_k$, sonst $b_i = e_i = e$ entspricht.*

3a. 3. Zusatz (Satz von Marczewski): Vor: *Wie in* (3a. 2) *und außerdem: In jedem $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, sei eine Wahrscheinlichkeit w_i definierbar, so daß jedes $(\mathfrak{A}_i, w_i)$ ein W-Feld ist.*

Beh.: 1) *Man kann in $\mathfrak{A}$ eine Wahrscheinlichkeit $w(x)$ definieren, so daß*

I) $w(x) = w_i(x)$, *wenn* $x \in \mathfrak{A}_i$, $i \in I$.

II) $w(x_{i_1} \cap \ldots \cap x_{i_k}) = w_{i_1}(x_{i_1}) \ldots w_{i_k}(x_{i_k})$, *wenn* $i_j \in I$ *und* $a_{i_j} \in \mathfrak{A}_{i_j}$, $j = 1, \ldots, k$.

gilt.

2) *Die Booleschen Unterverbände $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, von $\mathfrak{A}$ sind dann gegenseitig w-unabhängig.*

Bew. Betr. 3a. 2: Wir erklären $\mathfrak{K}$ wie beim Beweise von (3. 2. 1.). Dann ist $\mathfrak{K}^{\dagger}$ offensichtlich der kleinste Boolesche Unterverband von $\mathfrak{F}$, der jeden Booleschen Verband $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, als Booleschen Unterverband enthält, d. h. $\mathfrak{K}^{\dagger} = \mathfrak{A}$. Um die Isomorphie zwischen $\mathfrak{A}$ und Φ zu beweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß (a), (b), (c) (vgl. Nr. 3. 2. 1) auch hier gelten. Bezüglich (a) und (c) ist es klar. Wir beweisen also (b): Dann: Klar.

Nur dann: Es seien $a = a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k}$ und $a' = a'_{i_1} \cap \ldots \cap a'_{i_k}$ und es gelte $a = a'$, dann ist $a_{i_j} = a'_{i_j}$ für jedes $j = 1, \ldots, k$. Wäre nämlich $a_{i_j} \neq a'_{i_j}$ für ein $j = 1, \ldots, k$, so wäre $a_{i_j} \dotplus a'_{i_j} \neq 0$. Wenn wir o. B. d. A. $j = 1$ setzen, gilt dann:

$$(a_{i_1} \dotplus a'_{i_1}) \cap a_{i_2} \cap a'_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k} \cap a'_{i_k} \neq 0, \tag{2}$$

da $a_{i_j} \cap a'_{i_j} \neq 0$ für jedes $j = 1, \ldots, k$.

Aus (2) erhalten wir, wenn wir die linke Seite distributiv entwickeln und die Glieder geeignet vertauschen:

$$a_{i_1} \cap a_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k} \cap a'_{i_2} \cap \ldots \cap a'_{i_k} \dotplus a'_{i_1} \cap a'_{i_2} \cap \ldots \cap a'_{i_k} \cap a_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k}.$$

Dieser Ausdruck ist aber gleich 0 (Widerspruch zu (2)); denn

$$a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k} = a'_{i_1} \cap \ldots \cap a'_{i_k} = a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k} \cap a'_{i_2} \cap \ldots \cap a'_{i_k} =$$
$$= a'_{i_1} \cap \ldots \cap a'_{i_k} \cap a_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k},$$

weil $a'_{i_2} \cap \ldots \cap a'_{i_k} \supseteqq a'_{i_1} \cap \ldots \cap a'_{i_k} = a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k}$

bzw. $a_{i_2} \cap \ldots \cap a_{i_k} \supseteqq a_{i_1} \cap \ldots \cap a_{i_k} = a'_{i_1} \cap \ldots \cap a'_{i_k}$.

Damit ist 3a. 2 bewiesen.

Betr. 3a. 3. Wir betrachten das W-Feld $(\Phi, \pi) = \underset{i \in I}{P} (\mathfrak{A}_i, w_i)$. Nach Satz 3a. 2 ist $\mathfrak{A}$ isomorph zu Φ; es sei $\beta = f(b)$, $b \in \mathfrak{A}$, $\beta \in \Phi$ diese Isomorphie. Setzen wir $w(\beta) = \pi(\beta)$, so ist $(\mathfrak{A}, w)$ wieder ein W-Feld, und zwar isometrisch zu (Φ, π) und es gelten I) und II). Daß die $\mathfrak{A}_i$, $i \in I$, als **Boolesche** Unterverbände von $\mathfrak{A}$, gegenseitig w-unabhängig sind, ist klar.

Literatur

1. **Kappos**, D. A., Zur mathematischen Begründung der Wahrscheinlichkeitstheorie, Sitz.Ber. Bayer. Akad. d. Wiss. math.-nat. Kl. 1948 S. 309–320.

2. **Haupt**, O., und C. **Pauc**, Über die Erweiterung eines Inhaltes zu einem Maß, ebenda 1948 S. 247–253.

3. **Birkhoff**, G., Lattice Theory, New York 1948.

4. Carathéodory, C., Die Homomorphieen von Somen und die Multiplikation von Inhaltsfunktionen, Annali d. R. S. N. S. di Pisa, Serie II, Vol. VIII (1939) S. 105–130.

5. Kappos, D. A., Die cartesischen Produkte und die Mulitplikation von Maßfunktionen in Booleschen Algebren, I. Teil, Math. Annalen 120 (1947) S. 43–74.

6. Maharam, Dorothy, The Representation of abstract measure Functions, Trans. Amer. Math. Soc. Vol. (1948) S. 280–330.

7. Banach, S., edided by S. Hartman, On mesures in independent fields, Studia Math. 10 (1948) S. 159–177.

8. Appert, A., Mesure dans l'espace à une infinité de coordonnées, Rev. di Lima 41 (1939) S. 297–308.

9. Haupt-Aumann-Pauc, Differential- und Integralrechnung, 3. Bd., 2. Aufl. Berlin W. de Gruyter (erscheint demnächst).

10. Kappos, D. A., Bairesche bzw. Borelsche Theorie für die Carathéodorysche Ortsfunktionen, Bulletin de la Soc. Math. de Gréce, Vol. 25 (1950) S. 130ff.

11. Marcinkiewicz et Zygmund, Sur les fonctions indépendantes, Fund. Math. 29 (1937) 60–90 und die hier zitierten Arbeiten besonders: M. Kac bzw. M. Kac und H. Steinhaus, sur les fonctions indépendantes I-III, Studia Math. 6 (1936) 46–58, 59–66 und 89–97.