

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

Jahrgang 1950

München 1951

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Die Winkeldreiteilung des Herrn Sauerbeck

Von Josef Lense in München

Vorgelegt am 9. Juni 1950.

Mit 2 Abbildungen.

Herr Leonhard Sauerbeck hat mir eine Näherungskonstruktion für die Dreiteilung eines Winkels zur Begutachtung vorgelegt. Da diese sehr einfache Konstruktion nicht bekannt zu sein scheint, möchte ich sie hier im Einverständnis mit Herrn Sauerbeck veröffentlichen und einige theoretische Erörterungen daran anknüpfen.

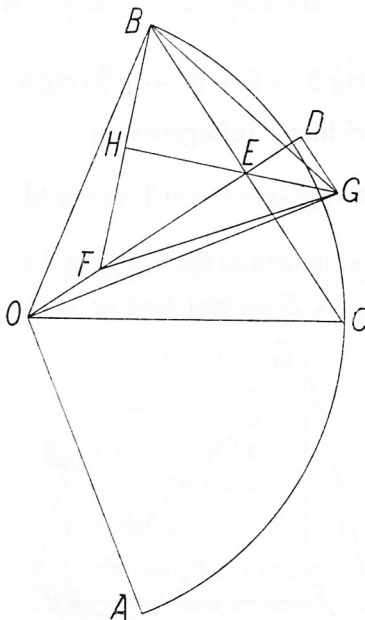


Abb. 1

Das Verfahren besteht in folgendem (Abb. 1): Man halbiere den gegebenen $\sphericalangle AOB$ durch OC , $\sphericalangle BOC$ durch OD , ziehe $BC \perp OD$, mache $EF = BE$ und konstruiere über BF das

gleichseitige $\triangle BFG$. Dann ist $\sphericalangle BOG$ angenähert der dritte Teil des $\sphericalangle AOB$ oder $\sphericalangle DOG = \beta$ angenähert der dritte Teil des $\sphericalangle DOB = \alpha$.

Untersuchen wir nun die Genauigkeit des Verfahrens. Wir fällen von G das Lot GH auf BF (es enthält als Höhe des gleichseitigen $\triangle BFG$ den Punkt E) und das Lot GD auf OD , bezeichnen OG mit r und setzen $OB = 1$ voraus. Dann ist

$OE = \cos \alpha$, $EB = \sin \alpha$, $BF = \sqrt{2} \sin \alpha$, $EH = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{2}}$,
 $GH = \sqrt{\frac{3}{2}} \sin \alpha$, $EG = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \sin \alpha$, $ED = DG = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha$,
 somit

$$OD = r \cos \beta = \cos \alpha + \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha,$$

$$DG = r \sin \beta = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \sin \alpha, \quad (1)$$

also

$$\text{ctg } \beta = 1 + (1 + \sqrt{3}) \text{ctg } \alpha, \quad (2)$$

der Konstruktionsfehler f infolgedessen

$$f = \text{arc ctg} [1 + (1 + \sqrt{3}) \text{ctg } \alpha] - \frac{\alpha}{3}. \quad (3)$$

Die Konstruktion ist genau für $\alpha = \frac{\pi}{4}$ und $\alpha = \frac{\pi}{8}$. Man erkennt das aus Abb. 2: $\triangle BCD$ sei gleichseitig, $AB \perp AC$, $AB = AC$,

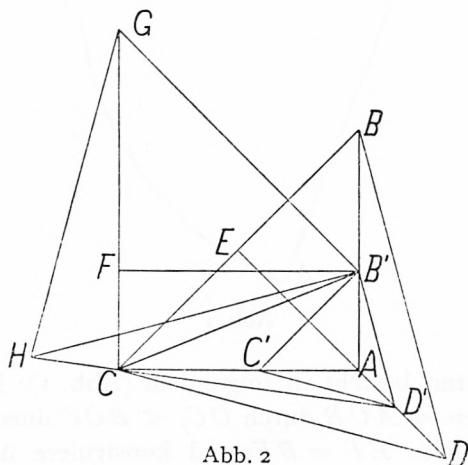


Abb. 2

$DE \perp BC$, $\sphericalangle BCB' = \sphericalangle B'CA = \frac{\pi}{8}$, $B'C' \parallel BC$, $B'D' \parallel BD$.
 Daraus folgt: $C'D' \parallel CD$, $AC : BC = AB' : B'B = AD' : D'D = AC : CD$, weil $BC = CD$, daher $\sphericalangle ACD' = \sphericalangle D'CD = \frac{\pi}{24}$, weil $\sphericalangle ACD = \sphericalangle BCD - \sphericalangle BCA = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{12}$.

In diesen Fällen ist also $\beta = \frac{\alpha}{3}$, infolgedessen mit $\xi = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{3}$ nach (2)

$$1 + (1 + \sqrt{3}) \frac{1 - 3\xi^2}{3\xi - \xi^3} - \frac{1}{\xi} = 0 \quad (4)$$

oder

$$\xi^3 + (2 + 3\sqrt{3}) \xi^2 - 3\xi + 2 - \sqrt{3} = 0. \quad (5)$$

Diese kubische Gleichung muß demnach die Lösungen

$$\xi_1 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3} \text{ und } \xi_2 = \operatorname{tg} \frac{\pi}{24} = -2 + \sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{6}$$

haben. Die dritte Lösung ist $\xi_3 = -2 - \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6} = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{24} \right)$.

Bei der Rechnung wurde von der Beziehung $\left(\frac{\sqrt{3} \pm 1}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2 \pm \sqrt{3}$ Gebrauch gemacht.

Die Bedeutung der dritten Lösung ist folgende: In Abb. 2 sei $CG \perp AC$, $B'F \perp CG$, $B'F = FG$, $B'G = B'H = GH$. Dann ist $\sphericalangle B'CG = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} = \sphericalangle CB'G$, daher $B'G = CG = GH$, somit $\sphericalangle GCH = \sphericalangle CHG = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{24}$ weil $\sphericalangle CGH = \frac{\pi}{12}$ ist, d. h. die Punkte D' , C , H liegen in gerader Linie.

Macht man nun die Dreiteilung für den erhabenen $\sphericalangle GCB' = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$, so erhält man den erhabenen $\sphericalangle GCH = \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{24}$. Denn für einen Winkel $> \pi$ hat man die Strecke EF von Abb. 1 gemäß den Formeln (1), in denen r immer positiv genommen wird, nach rechts statt nach links aufzutragen. Die Konstruktion liefert also einen um π zu großen Winkel; sein Tangens stimmt daher mit dem des richtigen überein und ist gerade die dritte Lösung von (5). Auch für $\alpha = 0$ ergibt sich $f = 0$ entsprechend der Lösung $\xi = 0$ von Gleichung (4).

Aus (3) erhält man durch Differenzieren

$$\frac{df}{d\alpha} = \frac{2\sqrt{3} - (1 + \sqrt{3})(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)}{3\{\sin^2 \alpha + [\sin \alpha + (1 + \sqrt{3})\cos \alpha]^2\}}, \quad (6)$$

daher mit Verwendung der Beziehung

$$(\cos 2\alpha + \sin 2\alpha)^2 = 1 + \sin 4\alpha$$

für die Nullstellen von $\frac{df}{d\alpha}$ als notwendige Bedingung $\sin 4\alpha = 11 - 6\sqrt{3}$. Die Lösungen dieser Gleichung sind $\alpha_1 = 9^\circ 21' 21''$ und $\alpha_2 = \frac{\pi}{4} - \alpha_1 = 35^\circ 38' 39''$, vermehrt um Vielfache von $\frac{\pi}{2}$.

Doch kommen für die Nullstellen von $\frac{df}{d\alpha}$ nur die geraden Vielfachen in Betracht, da bei Vermehrung um ungerade Vielfache $\cos 2\alpha + \sin 2\alpha$ im Zähler von (6) das Vorzeichen ändern würde. Somit kommen für den Bereich $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ noch die Lösungen $\alpha_1 + \pi$ und $\alpha_2 + \pi$ hinzu.

f verläuft, als Funktion von α betrachtet, in folgender Weise: Zwischen 0 und $\frac{\pi}{8}$ ist der Fehler positiv und hat seinen größten Wert $8' 12''$ bei $\alpha = \alpha_1$. Zwischen $\frac{\pi}{8}$ und $\frac{\pi}{4}$ ist er negativ mit dem größten absoluten Betrag von $8' 12''$ bei $\alpha = \alpha_2$. Dann wird er wieder positiv und wächst monoton bis $\frac{2\pi}{3}$ bei $\alpha = \pi$. Für $\alpha = \frac{\pi}{2}$ ergibt sich $f = \frac{\pi}{12}$. Ist $\alpha > \pi$, so ist nach (1) auch $\beta > \pi$, d. h. man hat dann in Formel (3) für den arcctg den um π vermehrten Hauptwert zu nehmen. Es ist daher $f(\alpha + \pi) = f(\alpha) + \frac{2\pi}{3}$ für $0 \leq \alpha \leq \pi$.

Der Konstruktionsfehler für den $\sphericalangle AOB$ bleibt also dem Betrag nach unterhalb $8' 12''$, sobald $\sphericalangle AOB \leq \pi$, wächst aber dann für erhabene Winkel ungemein rasch an.