

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1948

München 1949

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München

Hochfrequente Schwingungserscheinungen in inhomogenen Plasmen.

Von W. O. Schumann in München.

Mit 3 Abbildungen.

Vorgelegt im Juli 1947.

Wenn ein inhomogenes Plasma einem Wechselfeld ausgesetzt wird, so bilden sich innerhalb des Plasmas an bestimmten Stellen schwingende Schichten, deren Lage und Eigenschaften untersucht werden sollen.

Ein Plasma, d. h. ein Gasgemisch aus neutralen Teilchen, positiven Ionen und negativen Elektronen, dessen Raumladung in ungestörtem Zustand gleich Null ist, kann für periodische Schwingungen so hoher Frequenz, daß die positiven Ionen praktisch still stehen, aufgefaßt werden als eine Parallelschaltung eines Kondensators mit einer Spule, die Ohmschen Widerstand enthält.¹

Je cm^3 gerechnet ist die Kapazität $C = \Delta$, Δ Dielektrizitätskonstante, die Induktivität $L = \frac{m}{e\dot{p}}$ und der Widerstand $R = \frac{1}{b\dot{p}}$. Hierin bedeuten $\dot{p}$ die gesamte positive bzw. negative Ladung je cm^3 und b die Beweglichkeit der Elektronen. Der komplexe Leitwert je cm^3 ist

$$Y = j\omega C + \frac{1}{R + j\omega L}$$

wie beim Parallelschwingkreis der Hochfrequenztechnik.

Wenn die Dichte $\dot{p}$ eines solchen Plasmas von x abhängig ist und eine Wechselspannung angelegt wird, so verhält es sich wie eine große Reihe solcher Schwingkreise verschiedener Eigenfrequenz in Reihenschaltung. Je nach der Höhe der angelegten Frequenz können z. B. alle Kreise über oder unter ihrer Resonanz schwingen und die ganze Kette verhält sich dann kapazitiv oder induktiv. Es ist aber auch möglich, daß gewisse Kreise in

¹ Siehe W. O. Schumann, Z.P. 121, 7 (1942); A.P. 43, 379 (1943).

Resonanz kommen, die dann besonders stark schwingen, während die übrigen Kreise wie vorgeschaltete Induktivitäten oder Kapazitäten wirken. An den Kreisen, die in Resonanz schwingen, treten die erwähnten Schichtbildungen auf. Dabei sei vorausgesetzt, daß die räumliche Dichteänderung langsam, gemessen an der auftretenden Schwingungsamplitude der Elektronen, erfolge, da sonst die Annahme einzelner unabhängig voneinander schwingender Schichten nicht zulässig ist.

Führt man die Werte für L , C und R in Y ein, so entsteht

$$Y = j\omega\Delta + \frac{\frac{1}{bp} - j\omega\frac{m}{ep}}{\left(\frac{1}{bp}\right)^2 + \omega^2\left(\frac{m}{ep}\right)^2}.$$

Kann das erste Glied im Nenner gegen das zweite vernachlässigt werden, was bei Hg-Dampfentladungen bei 10^{-3} mm Hg-Säule bei Frequenzen von über etwa 10^7 Hz (Wellenlänge kleiner als 30 m) zulässig ist, und wird die Resonanzdichte p_0 durch

$$\omega^2 = \frac{e}{m} \cdot \frac{p_0}{\Delta}$$

eingeführt, so ist

$$Y = j\sqrt{\frac{e}{\omega}\Delta p_0} \cdot \left(1 - \frac{p}{p_0}\right) + \frac{e}{m} \frac{\Delta}{b} \frac{p}{p_0} = j\mu(1 - \kappa) + \nu\kappa$$

$$\text{mit } \mu = \sqrt{\frac{e}{m}\Delta p_0}, \quad \nu = \frac{e}{m} \frac{\Delta}{b}, \quad \kappa = \frac{p}{p_0} = \frac{\omega_0^2}{\omega^2},$$

wenn $\omega_0^2 = \frac{pe}{m\Delta}$ die der Dichte p entsprechende Resonanzfrequenz ist, wobei $\mu \gg \nu$.

Das Dämpfungsglied $\nu\kappa = \frac{e}{m} \frac{\Delta}{b} \cdot \frac{pe}{m\Delta} \cdot \frac{1}{\omega^2}$ ist gleich $\frac{e^2 p}{m^2 b \omega^2}$ und wird mit $b = \frac{e}{m} \tau$, wo τ die Zeit zwischen 2 Stößen bedeutet, gleich $\frac{e p}{m \tau \omega^2} = n \frac{e}{m} \frac{p}{\omega^2}$ ($n = \frac{1}{\tau}$, sekundliche Stoßzahl) wie bei Eccles. Je höher die Frequenz, desto geringer ist die Dämpfung.

Ist die gesamte Stromdichte G gegeben, so ist die Feldstärke

$$E = \frac{G}{Y} = \frac{G}{j\mu(1 - \kappa) + \nu\kappa}.$$

Ist κ veränderlich, so ist der Leitwert eine lineare Funktion von κ und der Verlauf von E in der komplexen Ebene ein Kreis.

Ist die Dämpfung sehr gering, ν sehr klein, so ist der Kreisradius sehr groß und der Resonanzpunkt, $\frac{1}{Y}$ reell, fällt praktisch mit dem Kreisdurchmesser, dem Maximalwert von E zusammen. Es ergeben dann schon kleine Abweichungen von κ von dem Wert 1 starke Änderungen von E nach Größe und Phase, wobei

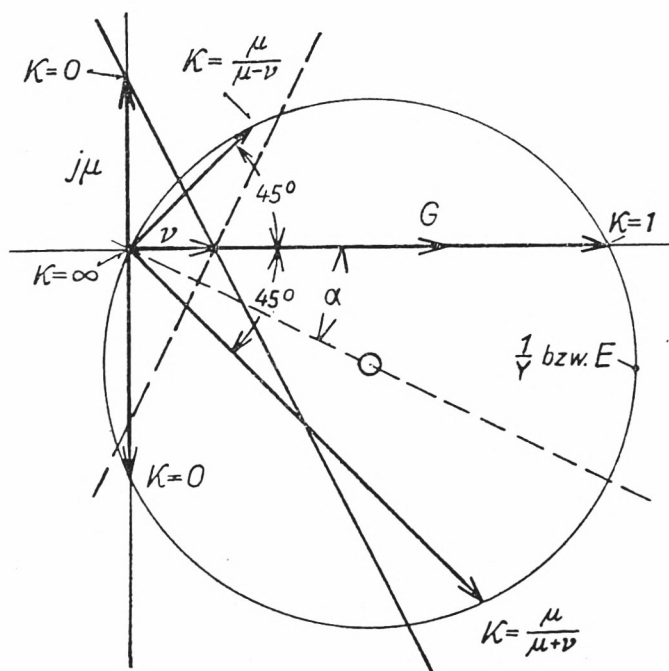


Abb. 1

die Werte für $\kappa > 1$ und die für $\kappa < 1$ gegenphasige Komponenten haben, wie man dies von der Spannung eines Parallelkreises bei gegebenem Strom beim Durchgang durch die Resonanz gewöhnt ist. Der Konvektionsanteil S des Gesamtstromes G ist

$$S = -E j \mu \kappa = -G \frac{j \mu \kappa}{Y} = -G \frac{j \mu \kappa}{\nu \kappa + j \mu (1 - \kappa)}.$$

Bei Resonanz $\kappa = 1$ hat S den Wert $S = -G \cdot j \frac{\mu}{\nu}$, ist also vielfach größer als G , wie man dies ebenfalls vom Parallelkreis gewöhnt ist, bei dem bei Resonanz der Spulenstrom ein Viel-

faches des Gesamtstromes ist. In den verschiedenen Schichten des inhomogenen Plasmas herrschen ganz verschiedene Elektronenstromdichten, deren Größen in erster Linie von den verschiedenen Feldstärken abhängen, die ihrerseits die Elektronengeschwindigkeiten und deren Schwingungsamplituden bestimmen.

Verteilung der Raumladungen.

Die Raumladungen ρ sind bestimmt durch

$$\frac{\rho}{\Delta} = \frac{dE}{dx} = G \frac{d\left(\frac{1}{Y}\right)}{dx} = G \frac{-v + j\mu}{[vz + j\mu(1-z)]^2} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Sie treten nur in inhomogenen Plasmen auf, wenn $\frac{dz}{dx} \neq 0$ ist. Der Absolutbetrag ist

$$\left| \frac{\rho}{\Delta} \right| = |G| \frac{\sqrt{\mu^2 + v^2}}{v^2 z^2 + \mu^2 (1-z)^2} \cdot \frac{dz}{dx}.$$

Der räumliche Verlauf ist einmal durch den Verlauf von $\frac{dz}{dx}$ bestimmt. Bei Extremwerten der Dichte, $\frac{dz}{dx} = 0$, sind keine Raumladungen vorhanden, wohl aber rechts und links davon mit entgegengesetztem Vorzeichen. Abgesehen hiervon spielt noch das Resonanzverhalten eine Rolle. Bei $z = 1$ durchläuft der Absolutwert des Faktors von $\frac{dz}{dx}$ ein Maximum von der Höhe $|G| \frac{1}{v} \sqrt{1 + \frac{\mu^2}{v^2}}$, das in den benachbarten Schichten mit $z \leq 1$ bei geringer Dämpfung, $v \gg \mu$, sehr rasch abnimmt. In der Phase ist für $z = 1$ der Faktor um etwas mehr als 90° gegen G voreilend. Für $z \leq 1$ ändert sich der Phasenwinkel sehr rasch um $\pm 90^\circ$ und wächst in diesem Sinne weiter, so daß Komponenten von ρ auftreten, die für $z < 1$ in Phase, für $z > 1$ in Gegenphase zum Gesamtstrom liegen. Für $z = \frac{\mu}{\mu \pm v} \approx 1 \mp \frac{v}{\mu}$ ist der Absolutwert der Ladung auf die Hälfte des Resonanzwertes gefallen.

Die beiden folgenden Skizzen geben die Feld- und die Ladungsverteilung im Augenblick des Nullwertes und des Maximalwertes des Stromes.

Nullwert des Gesamtstromes. Die Resonanzschicht ist erfüllt von Ladung eines Vorzeichens, die weiter außerhalb das entgegengesetzte Vorzeichen hat. Die „Spannung“ in der Resonanzschicht ist Null. Die Feldstärke an den „Rändern“ der Schicht am größten.

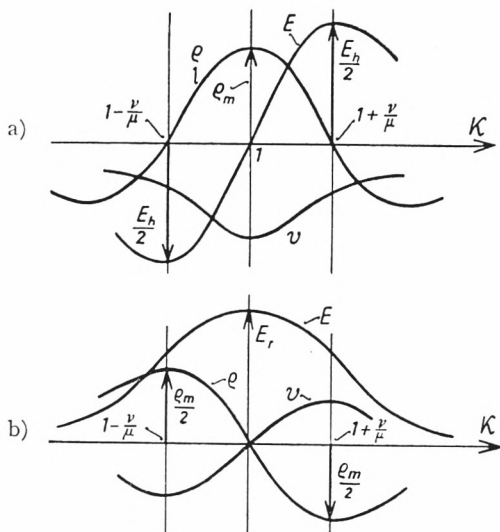


Abb. 2 Feld- und Ladungsverteilung

a) im Nullwert des Gesamtstromes b) im Maximum des Gesamtstromes

Maximalwert des Gesamtstromes. Die Feldstärke in der Resonanzschicht ist am größten und fällt bei größerem und kleinerem κ ab. Rechts und links von der Schicht liegen Raumladungen entgegengesetzten Vorzeichens (eine Doppelschicht) und von halbem Höchstwert der Ladung für $\kappa = 1$ beim Nullwert des Stromes, deren Kraftlinien das hohe E -Feld bedingen.

In beiden Bildern ist noch der augenblickliche Verlauf der Elektronengeschwindigkeiten eingezeichnet, der bei zu vernachlässigender Dämpfung durch $v = -j \frac{E e}{m \omega}$ gegeben ist. Der Verlauf von E in einer Schwingungsphase bestimmt den Raumladungsverlauf für eine Viertelperiode später. Für kleine Dämpfung, $\nu \ll \mu$, verlaufen alle Kurven in der Nähe des Resonanzpunktes, $\kappa = 1$, sehr steil.

Zerlegt man ρ in einen reellen und imaginären Teil, so ergibt sich

$$\frac{\rho}{\Delta} = -G \cdot \frac{v^3 x^2 - \mu^2 v (1 - x^2) + j \{-\mu v^2 x^2 - \mu (1 - x) [2 v^2 x - \mu^2 (1 - x)]\}}{[v^2 x^2 + \mu^2 (1 - x)^2]^2} \cdot \frac{dx}{dx},$$

woraus alle Einzelheiten abgelesen werden können.

Liegt eine Spannung an einer inhomogenen Plasmaschicht, $x = f(x)$, so ist

$$U = \int_{x_1}^{x_2} E(x) \cdot dx = \int_{x_1}^{x_2} E(x) \frac{dx}{dx} \cdot dx,$$

d. h. jedes Element liefert einen Beitrag, der nicht nur von $E(x)$, sondern auch vom Verlauf von x abhängig ist. Ist z. B. $\frac{dx}{dx}$ sehr klein, d. h. $\frac{dx}{dx}$ sehr groß, eine sehr rasche Änderung von x mit x vorhanden, so ist der Beitrag dieses Elementes gering. Die Stellen, wo sich x mit x nur wenig ändert, tragen am meisten zum Integral bei. Nur bei $\frac{dx}{dx} = \text{const.}$ tragen alle Stellen gleichmäßig bei.

Verlauf der Spannung bei linear zunehmender Dichte des Plasmas.

Als praktisch wichtiger Fall sei $x = mx$ gesetzt, die Dichte des Plasmas wachse linear mit dem Abstand. Die Spannung U ist dann

$$U = \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{1}{m} \int_{x_1}^{x_2} E dx = \frac{1}{m} G \frac{1}{v - j\mu} \ln \left[j\mu (1 - x) + vx \right]_{x_1}^{x_2}.$$

Ist speziell $x_1 = 0$, $x_2 = x$, so wird

$$\begin{aligned} U &= \frac{G}{m} \cdot \frac{1}{v - j\mu} \ln \frac{j\mu (1 - x) + vx}{j\mu} = \frac{G}{m} \frac{1}{v - j\mu} \ln \left[1 - x - j \frac{v}{\mu} x \right] \\ &= \frac{G}{m} \frac{1}{v - j\mu} \ln \left[1 - x \left(1 + j \frac{v}{\mu} \right) \right] = \frac{G \ln z}{m (v - j\mu)}. \end{aligned}$$

Der Verlauf von U abhängig von x ist sehr stark von der Größe der Dämpfung, d. h. vom Verhältnis $\frac{v}{\mu}$ abhängig. Am wichtigsten und interessantesten ist der Fall schwacher Dämpfung, $v \ll \mu$. Dann beginnt die Spannung bei $x = 0$ mit dem Werte Null.

Mit wachsendem κ nimmt der Realteil von z ab, er wird kleiner wie 1, während der Imaginärteil von z klein bleibt. $|U|$ wächst erst langsam, dann immer rascher an und der Phasenwinkel liegt sehr nahe bei $-\pi$, d. h. die Spannung eilt dem Strom um etwa 90° nach wie bei einem Kondensator. Erreicht κ den Wert 1, so ist $z = -j\frac{\mu}{\nu}$, negativ imaginär und sehr klein, der $\ln$ erreicht einen höchsten Absolutwert und die Spannung eilt dem Strom immer noch erheblich nach. Wird $\kappa > 1$, so nimmt der Absolutwert der Spannung wieder ab und der Phasenwinkel zwischen U und G wird immer kleiner. Wird $\kappa \approx 2$, so wird $z = -1 - j\frac{2\nu}{\mu}$, der Absolutwert des $\ln$ nähert sich für kleine Dämpfung dem Maximalwerte π und der Phasenwinkel von $\ln z$ dem Wert $-\frac{\pi}{2}$, d. h. die Spannung kommt mit dem Strom praktisch in Phase. Wächst κ über 2 hinaus, so wächst der Absolutwert des $\ln$ wieder an und sein Phasenwinkel geht von $-\frac{\pi}{2}$ zu immer kleineren negativen Werten. Die Spannung in diesem Gebiet fängt an

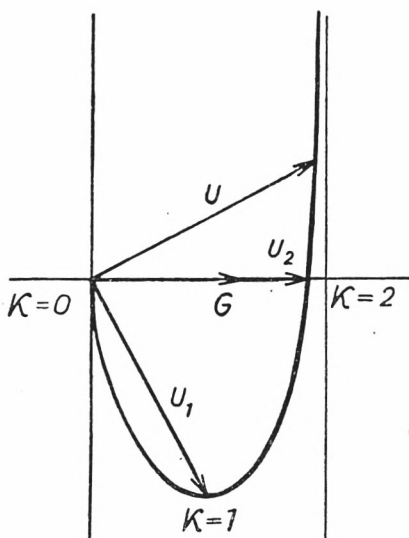


Abb. 3

dem Strom vorzueilen, um so mehr, je größer κ ist. Man sieht dies bequem aus dem Relief der komplexen $\ln$ -Funktion. Eine Skizze des Verlaufs gibt vorstehende Abbildung 3:

Die Werte der Spannungen für $\kappa = 1$ sind $U_1 \approx \frac{G}{m\mu} \left[\frac{\pi}{2} - j \ln \frac{\mu}{\nu} \right]$ und für $\kappa = 2$, $U_2 \approx \frac{G}{m\mu} \cdot \pi$. Es tritt also ein Resonanzphänomen auf, was damit zusammenhängt, daß die Schichten von $\kappa = 0$ bis $\kappa = 1$ eine geringere Eigenfrequenz haben, als die aufgeprägte und deshalb kapazitiv wirken. Umgekehrt haben die Schichten mit $\kappa > 1$ eine höhere Eigenfrequenz und wirken deshalb induktiv. Resonanz tritt dann ein, wenn die Wirkungen der induktiven und der kapazitiven Kette sich kompensieren, und das ist etwa bei $\kappa = 2$ der Fall. Bei größerer Dämpfung tritt das Spannungsmaximum nicht auf, sondern die Spannung steigt von $\kappa = 0$ monoton an.

Soll ein solches Plasma mit Resonanz betrieben werden, so muß die aufgeprägte Frequenz $\frac{1}{\sqrt{2}}$ mal so groß wie die höchste Eigenfrequenz sein, und die schwingende Resonanzschicht liegt räumlich genau in der Mitte des Plasmas. Ändert sich die aufgeprägte Frequenz, so ist keine Resonanz mehr da, und die Schwingschicht verschiebt sich mit steigender Frequenz ins Gebiet größerer κ bzw. x , bei fallender Frequenz umgekehrt. Wirken mehrere Frequenzen gleichzeitig, so können mehrere räumlich getrennte Schwingschichten entstehen.

Schließt sich an die betrachtete lineare Dichteänderung noch ein längerer homogener Plasmablock an, so wird die Zahl der Schichten mit höherer Eigenfrequenz, die sich induktiv verhalten, größer und aus diesem Grund wird jetzt das ganze Gebilde bei der gleichen Frequenz induktiv. Um nun wieder in Resonanz zu kommen, muß die Frequenz ansteigen, da hierdurch die Zahl der induktiven Schichten abnimmt und die der kapazitiven anwächst. Also verschiebt sich die Resonanzfrequenz nach oben und auch die Lage der Resonanzschicht verschiebt sich räumlich gegen die Kante, bei der das homogene Plasma beginnt. Umgekehrt verschiebt sich die Resonanzfrequenz nach unten, wenn räumliche Gebiete mit geringer Dichte, also kleiner Eigenfrequenz, überwiegen gegenüber den Gebieten mit großer Dichte, also hoher Eigenfrequenz. Derartige Verteilungen können bei Messungen ergeben, daß die „gemessene“ Resonanzfrequenz erheblich kleiner ist, als die Eigenfrequenz in den

dichtesten Teilen des Plasmas. Durchläuft die Dichte ein Maximum mit einem Abfall an beiden Seiten, so ist die Möglichkeit des Auftretens zweier Resonanzschichten rechts und links vom Maximum gegeben.

Bestimmt man bei einer solchen linear verlaufenden Schicht experimentell das Maximum von U , so wird man dieses bei geringer Dämpfung immer sehr nahe bei $z = 1$ finden, und zugleich wird man eine große kapazitive Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom feststellen. Die aufgeprägte Frequenz ist dann gleich der höchsten vorkommenden Schichtfrequenz am Ende der Schicht, wo die größte Dichte herrscht.

Als Beispiele für 2 Typen, bei denen die Schichtdichte konkav bzw. konvex gegen die Abszissenachse verläuft, seien noch kurz betrachtet 1. der Verlauf $z = m \sqrt{x}$ und 2. $z = mx^2$.

1. $z = m \sqrt{x}$. Jetzt wird die Spannung

$$U = \int_0^x \frac{G dx}{j\mu + (\nu - j\mu) m \sqrt{x}} =$$

$$= \frac{2G}{m(\nu - j\mu)} \left\{ \sqrt{x} - \frac{j\mu}{m(\nu - j\mu)} \ln \left[1 + \frac{\nu - j\mu}{j\mu} m \sqrt{x} \right] \right\}$$

und für kleine Dämpfungen, $\nu \ll \mu$,

$$U \approx \frac{2G}{-j\mu m} \left[\sqrt{x} + \frac{1}{m} \ln(1 - m \sqrt{x}) \right].$$

Der Maximalwert von U tritt wieder nahe bei $m \sqrt{x} = 1$, d. h. $z = 1$ auf. Für Resonanz muß die Klammer rein imaginär werden.

$$\sqrt{x} + \frac{1}{m} \ln[-(m \sqrt{x} - 1)] = \sqrt{x} + m[-j\pi + \ln(m \sqrt{x} - 1)]$$

d. h. $U_R \approx \frac{2G}{\mu} \cdot \frac{\pi}{m^2}$ und $e^{-m \sqrt{x}} = m \cdot \sqrt{x} - 1$, woraus ein Wert von $m \cdot \sqrt{x}$ folgt, der etwas über 1 liegt, d. h. ziemlich nahe dem Werte für die Maximalspannung. Die Resonanzschicht ($z = 1$) liegt in diesem Fall nahe dem Ende der ganzen Schicht.

2. Umgekehrt ist es für $\kappa = mx^2$. Jetzt wird

$$U = \int_0^x \frac{G dx}{j\mu + (v - j\mu) mx^2} = \frac{G}{\sqrt{j\mu m (v - j\mu)}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{m(v - j\mu)}{j\mu}} \cdot x,$$

was für sehr kleine Dämpfung übergeht in

$$U = \frac{G}{\mu \sqrt{m}} \operatorname{arctg} \sqrt{-m} \cdot x = -j \frac{G}{\mu \sqrt{m}} \cdot \frac{1}{2} \ln \frac{1 + \sqrt{m} \cdot x}{1 - \sqrt{m} \cdot x}.$$

Der maximale Spannungswert U_m wird wieder erreicht bei $\sqrt{m} \cdot x \approx 1$, d. h. $\kappa \approx 1$. Resonanz tritt ein, wenn der ln rein imaginär wird

$$\ln \frac{1 + m\sqrt{x}}{1 - m\sqrt{x}} = j\pi + \ln \frac{\sqrt{mx} + 1}{\sqrt{mx} - 1}.$$

Es wird also $U_R \approx \frac{1}{2} \frac{G}{\mu \sqrt{m}} \cdot \pi$ und $\sqrt{m} \cdot x \gg 1$, $\kappa \gg 1$, d. h. bei sehr großer Dicke der Gesamtschicht.

Es liegt also in diesem Fall die Resonanzschicht ($\kappa = 1$) räumlich ganz am Anfang des Gebildes und die Resonanzfrequenz ist außerordentlich viel kleiner als die höchste vorkommende Eigenfrequenz des Plasmas am Ende des Gebildes.