

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften
zu München

1931. Heft III

November-Dezember-Sitzung

München 1932

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung



Über einen Approximationssatz von Hurwitz und über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers der dritten Einheitswurzeln.

Von Oskar Perron.

Vorgelegt in der Sitzung am 7. November 1931.

§ 1. Formulierung des Resultats.

Im Jahr 1891 hat A. Hurwitz den folgenden Satz bewiesen:¹

Satz 1. Zu jeder irrationalen Zahl ρ gibt es unendlich viele Paare ganzer rationaler Zahlen p, q derart, daß

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{5} q^2}$$

ist. Dagegen gibt es irrationale Zahlen ρ , für welche die Ungleichung

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c q^2},$$

wenn $c > \sqrt{5}$ ist, höchstens durch endlich viele Paare ganzer rationaler Zahlen p, q befriedigt werden kann;

z. B. ist $\rho = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ eine solche Zahl.

Der Hurwitzsche Beweis benutzt die Theorie der Kettenbrüche. Im Jahr 1917 hat Herr L. R. Ford einen neuen Beweis des Hurwitzschen Satzes gegeben, der auf einer von G. Humbert entwickelten mit der Modulgruppe zusammenhängenden geometrischen Interpretation der Kettenbrüche beruht.² Indem

¹ A. Hurwitz, Über die angenäherte Darstellung der Irrationalzahlen durch rationale Brüche. *Mathematische Annalen* 39. — Etwas modifizierte Beweise finden sich auch in den Büchern des Verfassers: *Die Lehre von den Kettenbrüchen*, 1913, 2. Aufl. 1929, S. 49 ff.; *Irrationalzahlen*, 1921, S. 129 ff.

² L. R. Ford, A geometrical proof of a theorem of Hurwitz. *Proceedings of the Edinburgh mathematical society*, vol. 35, part. 2. — Auf den gleichen Prinzipien beruht auch der Beweis von J. Züllig in der Schrift: *Geometrische Deutung unendlicher Kettenbrüche*, Zürich 1928.

Herr Ford sodann die Humbertsche Theorie ins Komplexe übertrug, wobei an Stelle der Modulgruppe die Picardsche Gruppe trat, gelangte er 1925 zu folgendem Analogon des Hurwitzschen Satzes:¹

Satz 2. Zu jeder komplexen Zahl ρ , die nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i)$ angehört, gibt es unendlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ derart, daß

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt{3} |q|^2}$$

ist. Dagegen gibt es komplexe nicht dem Körper $\mathfrak{R}(i)$ angehörende Zahlen ρ , für welche die Ungleichung

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c |q|^2},$$

wenn $c > \sqrt{3}$ ist, höchstens durch endlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{R}(i)$ befriedigt werden kann; z. B. ist $\rho = \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}$ eine solche Zahl.

Für diesen Satz habe ich kürzlich einen neuen Beweis gegeben, der auf einem Hilfssatz über Cassinische Kurven beruht.² Die gleiche Methode läßt sich auch im Körper der dritten Einheitswurzeln verwenden, und so bin ich heute in der Lage, den folgenden Satz 3 zu beweisen, der noch nicht bekannt zu sein scheint; dabei bedeutet, wie auch später stets in dieser Arbeit, ε die dritte Einheitswurzel

$$(1) \quad \varepsilon = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

Satz 3. Zu jeder komplexen Zahl ρ , die nicht dem Körper $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ angehört, gibt es unendlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{R}(\varepsilon)$ derart, daß

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{13} |q|^2}$$

¹ L. R. Ford, On the closeness of approach of complex rational fractions to a complex irrational number. Transactions of the American mathematical society, vol. 27.

² Über die Approximation einer komplexen Zahl durch Zahlen des Körpers $\mathfrak{R}(i)$. Mathematische Annalen 103 und 105.

ist. Dagegen gibt es komplexe nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehörende Zahlen ρ , für welche die Ungleichung

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{c|q|^2},$$

wenn $c > \sqrt[4]{13}$ ist, höchstens durch endlich viele Paare ganzer Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ befriedigt werden kann; z. B. ist $\rho = \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$, wo das Vorzeichen der

Quadratwurzel beliebig sein darf, eine solche Zahl.

Der erforderliche Hilfssatz über Cassinische Kurven hat mir allerdings, obwohl der Beweis ganz elementar ist, erheblich mehr Mühe verursacht als bei Satz 2. Der Hilfssatz läßt sich wohl in mannigfacher Weise modifizieren und vielleicht kürzer beweisen.

In § 8 gebe ich noch für den Hurwitzschen Satz einen neuen Beweis, der von jeder Kettenbruchtheorie frei ist und auf ähnlichen Prinzipien beruht wie meine Beweise der Sätze 2 und 3. Von den Cassinischen Kurven werden dabei nur ihre Durchmesser gebraucht.

§ 2. Beweis des zweiten Teiles von Satz 3.

Ganz leicht ist der zweite Teil von Satz 3 zu beweisen, weshalb dieser Teil zuerst behandelt werden soll. Zunächst sieht man leicht, daß die Zahl $\sqrt{\varepsilon^2 + 4}$ und also auch $\frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$ nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehört; denn sonst müßte auch die konjugierte Zahl $\sqrt{\varepsilon + 4}$ und folglich auch das Produkt $\sqrt{\varepsilon^2 + 4} \cdot \sqrt{\varepsilon + 4} = \sqrt{13}$ dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehören, was augenscheinlich nicht der Fall ist. Sind nun p, q ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$, und zwar $q \neq 0$, so definieren wir eine Zahl δ durch die Formel

$$(2) \quad \frac{\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}$$

und müssen dann zeigen, daß, wenn $c > \sqrt[4]{13}$ ist, die Ungleichung $|\delta| < \frac{1}{c}$ höchstens für endlich viele Paare p, q gelten kann.

Aus (2) folgt durch Multiplikation mit q und Gliederumstellung

$$q \frac{\sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2} - \frac{\delta}{q} = p - \frac{\varepsilon}{2} q,$$

und hieraus durch Quadrieren:

$$\frac{\delta^2}{q^2} - \delta \sqrt{\varepsilon^2 + 4} = p^2 - \varepsilon p q - q^2.$$

Nun steht auf der rechten Seite eine ganze von Null verschiedene¹ Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$. Ihr absoluter Betrag ist also mindestens gleich 1 und man erhält

$$\left| \frac{\delta}{q} \right|^2 + \left| \delta \sqrt{\varepsilon^2 + 4} \right| \geq 1,$$

oder, da $|\varepsilon^2 + 4| = \sqrt[4]{13}$ ist,

$$\left| \frac{\delta}{q} \right|^2 + |\delta| \sqrt[4]{13} \geq 1.$$

Wenn nun $|\delta| < \frac{1}{c}$, wo $c > \sqrt[4]{13}$, so ist erst recht

$$\frac{1}{c^2 q^2} + \frac{\sqrt[4]{13}}{c} > 1,$$

oder also

$$|q|^2 < \frac{1}{c(c - \sqrt[4]{13})}.$$

Daher ist q beschränkt und nach (2) ist dann auch p beschränkt. Also sind in der Tat nur endlich viele Paare p, q möglich.

§ 3. Ein Hilfssatz über Cassinische Kurven.

Wir nennen zwei Zahlen bzw. Punkte der komplexen Ebene z_1, z_2 homolog, wenn die Differenz $z_1 - z_2$ eine ganze Zahl des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ ist, also die Form $m + n\varepsilon$ hat, wo m, n ganze rationale Zahlen sind. Wir schreiben dann $z_1 \equiv z_2$. Mit dieser Terminologie beweisen wir den

¹ Wenn nämlich $p^2 - \varepsilon p q - q^2 = 0$ wäre, so wäre $\frac{p}{q} = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 + 4}}{2}$, was aber nicht sein kann, weil die Zahl $\sqrt{\varepsilon^2 + 4}$ nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehört.

Hilfssatz. Ist a irgendeine komplexe Zahl, so gibt es zu jeder komplexen Zahl z_1 eine homologe Zahl z , für welche die Ungleichung

$$|z^2 - a|^2 < \frac{1}{3} + |a|^2$$

besteht.¹ Falls $\frac{3}{4} \leq |a| \leq \frac{\sqrt{13}}{4}$ ist, gibt es sogar eine homologe Zahl z , für welche die schärfere Ungleichung

$$|z^2 - a|^2 \leq \frac{4}{\sqrt{13}} |a|$$

besteht, und zwar mit dem Kleinerzeichen außer in den folgenden sechs Fällen, in welchen Gleichheit gilt:

$$\begin{array}{c}
 a = \left| \frac{4 + \varepsilon}{4} \right| \quad \left| \frac{4 + \varepsilon}{4} \varepsilon \right| \quad \left| \frac{4 + \varepsilon}{4} \varepsilon^2 \right| \quad \left| \frac{4 + \varepsilon^2}{4} \right| \quad \left| \frac{4 + \varepsilon^2}{4} \varepsilon \right| \quad \left| \frac{4 + \varepsilon^2}{4} \varepsilon^2 \right| \\
 z_1 \equiv \left| \frac{\varepsilon^2}{2} \right| \quad \left| \frac{\varepsilon^2}{2} \varepsilon^2 = \frac{\varepsilon}{2} \right| \quad \left| \frac{\varepsilon^2}{2} \varepsilon = \frac{1}{2} \right| \quad \left| \frac{\varepsilon}{2} \right| \quad \left| \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon^2 = \frac{1}{2} \right| \quad \left| \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon = \frac{\varepsilon^2}{2} \right|
 \end{array}$$

Die Gleichung

$$|z^2 - a|^2 = \frac{1}{3} + |a|^2 \text{ bzw. } \frac{4}{\sqrt{13}} |a|$$

stellt bei konstantem a und variabelm z in der z -Ebene eine Cassinische Kurve mit den Brennpunkten $\pm \sqrt{a}$ dar, und der Satz kann auch so ausgesprochen werden, daß diese Cassinische Kurve zu jedem Punkt der Ebene wenigstens einen homologen Punkt im Innern enthält, abgesehen von den sechs Ausnahmefällen, in welchen zwar kein homologer Punkt im Innern, wohl aber einer auf dem Rand liegt.

Beachtet man, daß mit $z \equiv z_1$ stets auch $z\varepsilon \equiv z_1\varepsilon$ und $z\varepsilon^2 \equiv z_1\varepsilon^2$ ist, so sieht man sofort, daß die Behauptungen des Hilfssatzes ungeändert bleiben, wenn man a , z_1 , z durch $a\varepsilon$, $z_1\varepsilon^2$, $z\varepsilon^2$ oder auch durch $a\varepsilon^2$, $z_1\varepsilon$, $z\varepsilon$ ersetzt. Daher genügt es, den

¹ Der Beweis liefert sogar $\leq \frac{75}{256} + |a|^2$ statt $< \frac{1}{3} + |a|^2$, eine Verschärfung, die aber für die beabsichtigte Anwendung keinen Vorteil bietet.

Beweis für den Fall zu führen, daß der Arcus von a zwischen $-\frac{\pi}{3}$ und $+\frac{\pi}{3}$ (einschließlich) liegt. Setzt man demgemäß

$$(3) \quad a = \alpha + \beta i \quad (\alpha, \beta \text{ reell}),$$

so ist also

$$(4) \quad |\beta| \leq \alpha \sqrt{3}.$$

Von den sechs Ausnahmefällen bleiben dann nur der erste und vierte übrig, aus welchen die vier anderen durch die angegebenen Ersetzungen hervorgehen.

Zu jeder Zahl z_1 gibt es unendlich viele homologe Zahlen $z = x + yi$ (x, y reell), für welche

$$(5) \quad -\frac{\sqrt{3}}{4} < y \leq \frac{\sqrt{3}}{4}$$

ist, und unter diesen wieder genau eine, für welche

$$(6) \quad -\frac{1}{2} < x \leq \frac{1}{2}$$

ist. Da aber die Behauptungen des Hilfssatzes offenbar un geändert bleiben, wenn man z durch $-z$ oder wenn man z durch $\pm \bar{z}$ und zugleich a durch \bar{a} ersetzt, wo der Querstrich die konjugiert-komplexe Zahl andeutet, so genügt es, von dem durch die Ungleichungen (5), (6) charakterisierten Bereich nur den folgenden Quadranten zu betrachten:

$$(7) \quad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Alsdann scheidet auch der vierte Ausnahmefall aus und es bleibt nur noch der erste übrig, wobei zu beachten ist, daß $\frac{\epsilon^2}{2} \equiv -\frac{\epsilon^2}{2}$ ist und daß die Zahl $-\frac{\epsilon^2}{2} = \frac{1 + \sqrt{3}i}{4}$ wirklich im Bereich (7) liegt.

Setzen wir nun, wenn $z = x + yi$ eine Zahl des Bereiches (7) bedeutet,

$$(8) \quad |z^2 - a|^2 - |a|^2 = P,$$

$$(9) \quad |(z - 1)^2 - a|^2 - |a|^2 = Q,$$

$$(10) \quad |(z + 1)^2 - a|^2 - |a|^2 = R,$$

so wird der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen sein, wenn wir zeigen können, daß immer wenigstens eine der Zahlen P , Q , R kleiner als $\frac{1}{3}$ ist. In ausführlicherer Schreibweise ist

$$(11) \quad P = (x^2 + y^2)^2 - 2\alpha(x^2 - y^2) - 4\beta xy,$$

$$(12) \quad Q = [(1-x)^2 + y^2]^2 - 2\alpha[(1-x)^2 - y^2] + 4\beta(1-x)y,$$

$$(13) \quad R = [(1+x)^2 + y^2]^2 - 2\alpha[(1+x)^2 - y^2] - 4\beta(1+x)y.$$

Hieraus bilden wir die beiden Linearkombinationen

$$(14) \quad \begin{cases} (1-x)P + xQ = u - 3u^2 + 2uv + v^2 + 2(v-u)\alpha, \\ \text{wobei } u = x(1-x), v = y^2, \end{cases}$$

$$(15) \quad \begin{cases} (1-x^2-y^2)P + \frac{1}{2}(x^2+y^2+x)Q + \frac{1}{2}(x^2+y^2-x)R \\ = y^2 - 3x^2 + 3y^4 + 6y^2x^2 + 3x^4. \end{cases}$$

Aus (14) folgt, da die Multiplikatoren von P und Q wegen (7) nicht negativ sind,

$$\text{Min}(P, Q) \leq u - 3u^2 + 2uv + v^2 + 2(v-u)\alpha$$

und hieraus speziell für $v \leq u$, weil α wegen (4) nicht negativ ist,

$$\text{Min}(P, Q) \leq u - 3u^2 + 2u^2 + u^2 = u = x(1-x) \leq \frac{1}{4} < \frac{1}{3}.$$

Für $v > u$ dagegen, also für $y^2 + x^2 - x > 0$, sind die Multiplikatoren von P , Q , R in (15) positiv, so daß aus (15) folgt:

$$\text{Min}(P, Q, R) \leq y^2 - 3x^2 + 3y^4 + 6y^2x^2 + 3x^4$$

und mit Rücksicht auf (7):

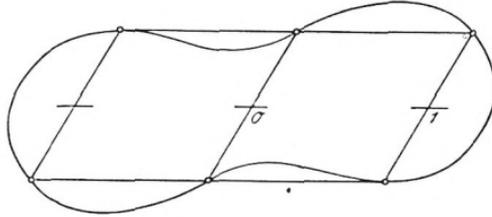
$$\begin{aligned} \text{Min}(P, Q, R) &\leq \frac{3}{16} - 3x^2 + \frac{27}{256} + \frac{9}{8}x^2 + 3x^4 \\ &= \frac{75}{256} - 3x^2 \left(\frac{5}{8} - x^2 \right) \leq \frac{75}{256} < \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Damit ist der erste Teil des Hilfssatzes bewiesen. Der zweite Teil ist bedeutend schwieriger. Was zunächst den verbliebenen Ausnahmefall anbelangt, so bestätigt man leicht, daß der Ausdruck

$\left| z^2 - \frac{4+\varepsilon}{4} \right|$ für die sechs untereinander homologen Zahlen

$$z = \frac{\varepsilon^2}{2}, \frac{\varepsilon^2}{2} + 1, \frac{\varepsilon^2}{2} - 1, -\frac{\varepsilon^2}{2}, -\frac{\varepsilon^2}{2} + 1, -\frac{\varepsilon^2}{2} - 1$$

gleich 1 wird, während er für jede andere dazu homologe Zahl größer als 1 wird. In Fig. 1 ist die Cassinische Kurve $\left| z^2 - \frac{4 + \varepsilon}{4} \right| = 1$ mit den sechs homologen Punkten auf dem Rand gezeichnet; man sieht ohne weiteres, daß alle anderen homologen Punkte im Äußern liegen.



Figur 1

Nachdem der Ausnahmefall hiermit erledigt ist, schicken wir dem allgemeinen Fall drei Bemerkungen voraus. Zunächst gilt von jetzt an, da es sich nur noch um den zweiten Teil des Hilfssatzes handelt, die Ungleichung

$$(16) \quad \frac{3}{4} \leq |a| \leq \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

Wegen (3) und (4) ist

$$|a|^2 = \alpha^2 + \beta^2 \leq 4\alpha^2,$$

und da α wegen (4) nicht negativ sein kann, ergibt sich

$$(17) \quad \alpha \geq \frac{|a|}{2} \geq \frac{3}{8}.$$

Ferner hat die Funktion $\frac{4}{\sqrt{13}}x - x^2$ im Intervall $\frac{3}{4} \leq x \leq \frac{\sqrt{13}}{4}$

ihr Minimum nur am Endpunkt und es ist gleich $\frac{3}{16}$. Da die

Zahl $|a|$ nach (16) in diesem Intervall liegt, ist also

$$(18) \quad \frac{3}{16} \leq \frac{4}{\sqrt{13}}|a| - |a|^2, \text{ Gleichheit nur für } |a| = \frac{\sqrt{13}}{4}.$$

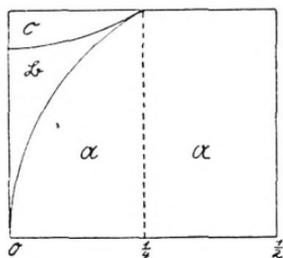
Nunmehr teilen wir den Bereich (7) in die folgenden drei Teilbereiche \mathfrak{A} , \mathfrak{B} , \mathfrak{C} :

$$\mathfrak{A}: \quad \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2} \leq x \leq \frac{1}{2}, \quad 0 \leq y \leq \frac{\sqrt{3}}{4},$$

$$\mathfrak{B}: 0 \leq x < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}, 0 < y \leq \frac{5 + 16x^2}{8\sqrt{3}},$$

$$\mathfrak{C}: 0 \leq x < \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}, \frac{5 + 16x^2}{8\sqrt{3}} < y \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Die drei Bereiche, von denen jeder eine andere Behandlung erforderlich macht, sind in Fig. 2 gezeichnet; Kreis und Parabel



Figur 2

berühren sich dabei. Die Bereiche \mathfrak{B} und \mathfrak{C} lassen sich augenscheinlich auch durch folgende Ungleichungen charakterisieren:

$$\mathfrak{B}': 0 \leq x < \frac{1}{4}, \sqrt{x-x^2} < y \leq \frac{5 + 16x^2}{8\sqrt{3}},$$

$$\mathfrak{C}': 0 \leq x < \frac{1}{4}, \frac{5 + 16x^2}{8\sqrt{3}} < y \leq \frac{\sqrt{3}}{4}.$$

Das Programm zum Beweis des zweiten Teiles des Hilfssatzes gliedert sich nun folgendermaßen:

Im Bereich \mathfrak{A} werden wir beweisen:

$$(19) \quad \text{Min}(P, Q) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \quad \text{in } \mathfrak{A}.$$

Im Bereich \mathfrak{B} werden wir beweisen:

$$(20) \quad \text{Min}(P, Q, R) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \quad \text{in } \mathfrak{B}.$$

Im Bereich \mathfrak{C} kommen wir mit den Ausdrücken P, Q, R nicht aus; wir benötigen noch die beiden folgenden:

$$(21) \quad S = |(z + \varepsilon^2)^2 - a|^2 - |a|^2,$$

$$(22) \quad T = |(z - \varepsilon)^2 - a|^2 - |a|^2,$$

oder ausführlicher geschrieben:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} S &= \left[\left(\frac{1}{2} - x \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 \right]^2 - 2\alpha \left[\left(\frac{1}{2} - x \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 \right] \\ &\quad - 4\beta \left(\frac{1}{2} - x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y \right), \end{aligned} \right.$$

$$(24) \left\{ \begin{aligned} T &= \left[\left(\frac{1}{2} + x \right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 \right]^2 - 2\alpha \left[\left(\frac{1}{2} + x \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y \right)^2 \right] \\ &\quad + 4\beta \left(\frac{1}{2} + x \right) \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - y \right); \end{aligned} \right.$$

Alsdann werden wir beweisen:

$$(25) \quad \text{Min}(P, Q, S, T) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \quad \text{in } \mathfrak{C}.$$

Mit (19), (20), (25) wird dann auch der zweite Teil des Hilfssatzes vollständig bewiesen sein.

§ 4. Der zweite Teil des Hilfssatzes für die Bereiche \mathfrak{A} und \mathfrak{B} .

Im Bereich \mathfrak{A} ist $0 \leq \frac{1}{2} - x \leq \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$, also durch Quadrieren $\left(\frac{1}{2} - x \right)^2 \leq \frac{1}{4} - y^2$ oder schließlich: $y^2 \leq x - x^2$. Mit der bei Formel (14) angewandten Bezeichnung ist also $v \leq u$ und aus (14) folgt

$$\text{Min}(P, Q) \leq u - 3u^2 + 2uv + v^2.$$

Wenn nun $u < \frac{3}{16}$, so ist also wegen $v \leq u$

$$\text{Min}(P, Q) \leq u - 3u^2 + 2u^2 + u^2 = u < \frac{3}{16}$$

und folglich wegen (18)

$$(26) \quad \text{Min}(P, Q) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \quad \left(\text{für } u < \frac{3}{16} \right).$$

Wenn dagegen $u \geq \frac{3}{16}$, aber natürlich $u = x(1-x) \leq \frac{1}{4}$, so

ist nach (14), weil nach (7) ja $v = y^2 \leq \frac{3}{16}$ ist,

$$\begin{aligned} \text{Min}(P, Q) &\leq u - 3u^2 + 2u \cdot \frac{3}{16} + \frac{9}{256} + 2 \left(\frac{3}{16} - u \right) \alpha \\ &= \left(\frac{11}{8} - 2\alpha \right) u - 3u^2 + \frac{9}{256} + \frac{3}{8} \alpha = f(u), \end{aligned}$$

und zwar Gleichheit höchstens für $v = \frac{3}{16}$. Für die Ableitung von $f(u)$ gilt mit Rücksicht auf (17) die Ungleichung

$$f'(u) = \frac{11}{8} - 2\alpha - 6u \leq \frac{11}{8} - \frac{6}{8} - 6 \cdot \frac{3}{16} < 0.$$

Folglich nimmt $f(u)$ mit wachsendem u ab, und man erhält

$$\begin{aligned} \text{Min}(P, Q) &\leq f(u) \leq f\left(\frac{3}{16}\right) = \left(\frac{11}{8} - 2\alpha\right) \cdot \frac{3}{16} - 3 \cdot \frac{9}{256} \\ &\quad + \frac{9}{256} + \frac{3}{8} \alpha = \frac{3}{16}, \end{aligned}$$

und zwar Gleichheit höchstens für $u = \frac{3}{16}$, $v = \frac{3}{16}$. Daraus folgt weiter mit Rücksicht auf (18)

$$(26a) \quad \text{Min}(P, Q) \leq \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \quad \left(\text{für } u \geq \frac{3}{16} \right),$$

und zwar ist Gleichheit höchstens möglich, wenn gleichzeitig

$$|a| = \frac{\sqrt{13}}{4}, \quad u = \frac{3}{16}, \quad v = \frac{3}{16},$$

$$\text{also } x = \frac{1}{4}, \quad y = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{4} = -\frac{\varepsilon^2}{2}$$

ist. Alsdann ist aber nach (11) und (12)

$$P = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} \alpha - \frac{\sqrt{3}}{4} \beta = \frac{1}{16} + \frac{1}{4} (\alpha - \beta \sqrt{3}),$$

$$Q = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} \alpha + \frac{3\sqrt{3}}{4} \beta = \frac{9}{16} - \frac{3}{4} (\alpha - \beta \sqrt{3}).$$

Daher ist $\text{Min}(P, Q) = \frac{3}{16}$ nur für $\alpha - \beta \sqrt{3} = \frac{1}{2}$. Zusammen

mit $\alpha^2 + \beta^2 = |a|^2 = \frac{13}{16}$ und $\alpha > 0$ gibt das:

$$\alpha = \frac{7}{8}, \quad \beta = \frac{\sqrt{3}}{8}; \quad \text{also } a = \frac{7 + \sqrt{3}i}{8} = \frac{4 + \varepsilon}{4}.$$

Das ist also der bereits erledigte Ausnahmefall. Von diesem abgesehen gilt daher in (26a) nicht das Gleichheitszeichen. Mit (26) und (26a) ist die Gültigkeit von (19) nachgewiesen, also der Bereich \mathfrak{A} erledigt.

Wir wenden uns zum Bereich \mathfrak{B} . In diesem ist $\frac{1}{2} - x > \sqrt{\frac{1}{4} - y^2}$ und folglich durch Quadrieren $x^2 - x + y^2 > 0$. Daher sind die Multiplikatoren von P, Q, R in (15) positiv und aus (15) folgt:

$$\begin{aligned} \text{Min}(P, Q, R) &\leq y^2 - 3x^2 + 3y^4 + 6y^2x^2 + 3x^4 \\ &\leq \frac{(5 + 16x^2)^2}{8^2 \cdot 3} - 3x^2 + 3 \frac{(5 + 16x^2)^4}{8^4 \cdot 3^2} \\ &\quad + 6 \frac{(5 + 16x^2)^2}{8^2 \cdot 3} x^2 + 3x^4. \end{aligned}$$

Durch Auspotenzieren und Ordnen erhält man

$$\text{Min}(P, Q, R) \leq \frac{5 \cdot 5 \cdot 89}{8^4 \cdot 3} - \frac{47}{64} x^2 + \frac{299}{24} x^4 + \frac{44}{3} x^6 + \frac{16}{3} x^8.$$

Wegen $x < \frac{1}{4}$ (vgl. \mathfrak{B}') folgt hieraus:

$$\text{Min}(P, Q, R) < \frac{5 \cdot 5 \cdot 89}{8^4 \cdot 3} - \frac{47}{64} x^2 + \frac{299}{24} x^4 + \frac{44}{3 \cdot 4^6} + \frac{16}{3 \cdot 4^8}$$

mit Ausschluß der Gleichheit. Dieses quadratische Polynom von x^2 hat sein Maximum nur am Rand des zulässigen Intervalles, also für $x^2 = 0$ oder für $x^2 = \frac{1}{16}$. Für $x^2 = \frac{1}{16}$ kommt der grö-

Bere Wert heraus, und zwar $\frac{3}{16}$. Daher ist

$$\text{Min}(P, Q, R) < \frac{3}{16}$$

und folglich mit Rücksicht auf (18) auch

$$\text{Min}(P, Q, R) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2.$$

Damit ist die Gültigkeit von (20) nachgewiesen, also der Bereich \mathfrak{B} erledigt.

§ 5. Der zweite Teil des Hilfssatzes für den Bereich \mathfrak{C} .

Wir machen die Transformation

$$(27) \quad x = \frac{1 - \xi}{4}, \quad y = \sqrt{3} \frac{1 - \eta}{4}.$$

Dadurch gehen die den Bereich \mathfrak{C} charakterisierenden Ungleichungen \mathfrak{C}' über in

$$\mathfrak{C}'': \quad 0 < \xi \leq 1, \quad 0 \leq 6\eta < 2\xi - \xi^2.$$

Die Ausdrücke (11), (12) transformieren sich in

$$(28) \quad \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{[(1 - \xi)^2 + 3(1 - \eta)^2]^2}{256} - 2\alpha \frac{(1 - \xi)^2 - 3(1 - \eta)^2}{16} \\ &\quad - \beta \sqrt{3} \frac{(1 - \xi)(1 - \eta)}{4}, \end{aligned} \right.$$

$$(29) \quad \left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{[(3 + \xi)^2 + 3(1 - \eta)^2]^2}{256} - 2\alpha \frac{(3 + \xi)^2 - 3(1 - \eta)^2}{16} \\ &\quad + \beta \sqrt{3} \frac{(3 + \xi)(1 - \eta)}{4}, \end{aligned} \right.$$

und die Ausdrücke (23), (24) in

$$(30) \quad \left\{ \begin{aligned} S &= \frac{[(1 + \xi)^2 + 3(1 + \eta)^2]^2}{256} - 2\alpha \frac{(1 + \xi)^2 - 3(1 + \eta)^2}{16} \\ &\quad - \beta \sqrt{3} \frac{(1 + \xi)(1 + \eta)}{4}, \end{aligned} \right.$$

$$(31) \quad \left\{ \begin{aligned} T &= \frac{[(3 - \xi)^2 + 3(1 + \eta)^2]^2}{256} - 2\alpha \frac{(3 - \xi)^2 - 3(1 + \eta)^2}{16} \\ &\quad + \beta \sqrt{3} \frac{(3 - \xi)(1 + \eta)}{4}. \end{aligned} \right.$$

Man sieht, daß S , T aus P , Q hervorgehen, indem man ξ , η durch $-\xi$, $-\eta$ ersetzt.

Nun definieren wir eine Zahl γ durch die Formel

$$(32) \quad \beta \sqrt{3} = \alpha - \gamma.$$

Nach (4) ist dann $|\alpha - \gamma| \leq 3\alpha$; also insbesondere $\gamma - \alpha \leq 3\alpha$ oder

$$(33) \quad 4\alpha \geq \gamma.$$

Setzt man den Wert für $\beta \sqrt{3}$ aus (32) in die Formeln (28), (29) ein und ordnet nach Potenzen von ξ , η , so erhält man:

$$(34) \left\{ \begin{aligned} P &= \frac{1}{16} + \frac{\gamma}{4} - \frac{1-8\alpha+4\gamma}{16} \xi - \frac{3+8\alpha+4\gamma}{16} \eta \\ &+ \frac{1}{64} [(3-8\alpha)\xi^2 + 2(3-8\alpha+8\gamma)\xi\eta + 3(5+8\alpha)\eta^2] \\ &- \frac{1}{64} (\xi+3\eta)(\xi^2+3\eta^2) + \frac{1}{256} (\xi^2+3\eta^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(35) \left\{ \begin{aligned} Q &= \frac{9}{16} - \frac{3\gamma}{4} + \frac{9-8\alpha-4\gamma}{16} \xi + \frac{-9-24\alpha+12\gamma}{16} \eta \\ &+ \frac{1}{64} [(15-8\alpha)\xi^2 - 2(9+8\alpha-8\gamma)\xi\eta + 3(9+8\alpha)\eta^2] \\ &+ \frac{3}{64} (\xi-\eta)(\xi^2+3\eta^2) + \frac{1}{256} (\xi^2+3\eta^2)^2, \end{aligned} \right.$$

und die Größen S , T gehen hieraus hervor, indem man ξ , η durch $-\xi$, $-\eta$ ersetzt. Aus P , Q , S , T bilden wir die folgenden Linearkombinationen

$$(36) \left\{ \begin{aligned} \frac{P+S}{2} &= \frac{1}{16} + \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{64} [(3-8\alpha)\xi^2 + 2(3-8\alpha+8\gamma)\xi\eta \\ &+ 3(5+8\alpha)\eta^2] + \frac{1}{256} (\xi^2+3\eta^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(37) \left\{ \begin{aligned} \frac{Q+T}{2} &= \frac{9}{16} - \frac{3\gamma}{4} + \frac{1}{64} [(15-8\alpha)\xi^2 - 2(9+8\alpha-8\gamma)\xi\eta \\ &+ 3(9+8\alpha)\eta^2] + \frac{1}{256} (\xi^2+3\eta^2)^2, \end{aligned} \right.$$

$$(38) \left\{ \begin{aligned} \frac{Q+3S}{4} &= \frac{3}{16} + \frac{3-8\alpha+2\gamma}{16} \xi + \frac{6\gamma}{16} \eta \\ &+ \frac{1}{64} [(6-8\alpha)\xi^2 - 2(8\alpha-8\gamma)\xi\eta + 3(6+8\alpha)\eta^2] \\ &+ \frac{3}{128} (\xi+\eta)(\xi^2+3\eta^2) + \frac{1}{256} (\xi^2+3\eta^2)^2. \end{aligned} \right.$$

Nach (17) ist $\alpha \geq \frac{3}{8}$ und wegen \mathcal{C}'' ist $0 \leq \eta < \frac{\xi}{3}$. Daher folgt aus (36)

$$\begin{aligned}
\text{Min}(P, S) &< \frac{1}{16} + \frac{\gamma}{4} + \frac{1}{64} [0 + 2(3 - 8\alpha + 8\gamma)\xi\eta + (5 + 8\alpha)\xi\eta] \\
&\quad + \frac{1}{256} \left(\frac{4}{3} \xi^2 \right)^2 \\
&= \frac{1}{16} + \frac{\gamma}{4} + \frac{11 - 8\alpha + 16\gamma}{64} \xi\eta + \frac{\xi^4}{144} \\
&\leq \frac{1}{16} + \frac{\gamma}{4} + \frac{11 - 3 + 16\gamma}{64} \xi\eta + \frac{\xi^4}{144}.
\end{aligned}$$

Falls $\gamma \leq \frac{1}{3}$ ist, folgt daher:

$$\text{Min}(P, S) < \frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{5}{24} \xi\eta + \frac{\xi^4}{144}.$$

Wegen \mathcal{C}'' ist $\xi^4 \leq 1$ und außerdem

$$\xi\eta \leq \eta < \frac{2\xi - \xi^2}{6} \leq \frac{1}{6},$$

so daß sich weiter ergibt:

$$\text{Min}(P, S) < \frac{1}{16} + \frac{1}{12} + \frac{5}{24} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{144} = \frac{3}{16},$$

also auch wegen (18)

$$\text{Min}(P, S) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2.$$

Damit ist für $\gamma \leq \frac{1}{3}$ die Ungleichung (25) nachgewiesen, also der Fall $\gamma \leq \frac{1}{3}$ erledigt.

Aus (37) folgt, weil wegen \mathcal{C}'' ja $0 \leq \eta < \frac{\xi}{3}$ ist,

$$\begin{aligned}
\text{Min}(Q, T) &< \frac{9}{16} - \frac{3\gamma}{4} + \frac{1}{64} [(15 - 8\alpha)\xi^2 - 2(9 + 8\alpha - 8\gamma)\xi\eta \\
&\quad + (9 + 8\alpha)\xi\eta] + \frac{1}{256} \left(\frac{4}{3} \xi^2 \right)^2 \\
&= \frac{9}{16} - \frac{3\gamma}{4} + \frac{1}{64} [(15 - 8\alpha)\xi^2 + (-9 - 8\alpha + 16\gamma)\xi\eta] \\
&\quad + \frac{\xi^4}{144}.
\end{aligned}$$

Faßt man hier die Glieder mit γ zusammen, so erhält γ den negativen Faktor $\frac{-3 + \xi\eta}{4}$; die rechte Seite nimmt also mit

wachsendem γ ab. Wenn daher speziell $\gamma \geq \frac{3}{4}$ ist, ergibt sich:

$$\text{Min}(Q, T) < \frac{9}{16} - \frac{9}{16} + \frac{1}{64} [(15 - 8\alpha)\xi^2 + (-9 - 8\alpha + 12)\xi\eta] + \frac{\xi^4}{144}.$$

Nun ist $\xi^2 \leq 1$, $\xi\eta \geq 0$; der Faktor von ξ^2 ist wegen $\alpha \leq |a| < 1$ positiv und der von $\xi\eta$ ist gleich $3 - 8\alpha$, also ≤ 0 wegen (17).

Aus der vorigen Ungleichung ergibt sich daher weiter:

$$\begin{aligned} \text{Min}(Q, T) &< \frac{1}{64} (15 - 8\alpha) + \frac{1}{144} \\ &\leq \frac{1}{64} (15 - 4|a|) + \frac{1}{144} \quad [\text{wegen (17)}]. \end{aligned}$$

Daher ist auch

$$\begin{aligned} \text{Min}(Q, T) - \left(\frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \right) &< \frac{15}{64} + \frac{1}{144} - \frac{1}{16} |a| \\ &- \frac{4}{\sqrt{13}} |a| + |a|^2. \end{aligned}$$

Hier hat die rechte Seite als quadratisches Polynom von $|a|$ ihr Maximum am Rand des zulässigen Intervalles, also für $|a| = \frac{3}{4}$

oder für $|a| = \frac{\sqrt{13}}{4}$. In beiden Fällen ergibt die Ausrechnung einen negativen Wert und folglich ist

$$\text{Min}(Q, T) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2.$$

Damit ist auch für $\gamma \geq \frac{3}{4}$ die Ungleichung (25) nachgewiesen, also der Fall $\gamma \geq \frac{3}{4}$ erledigt.

Somit bleibt nur noch der Fall

$$(39) \quad \frac{1}{3} < \gamma < \frac{3}{4}$$

übrig. In diesem Fall folgt aus (38), weil nach \mathcal{C}'' ja $0 \leq \eta < \frac{2\xi - \xi^2}{6} < \frac{\xi}{3}$ ist,

$$\begin{aligned}
\text{Min}(Q, S) &< \frac{3}{16} + \frac{3-8\alpha+2\gamma}{16} \xi + \frac{\gamma}{16} (2\xi - \xi^2) \\
&+ \frac{1}{64} [(6-8\alpha)\xi^2 - 2(8\alpha-8\gamma)\xi\eta + (6+8\alpha)\xi\eta] \\
&+ \frac{3}{128} \left(\xi + \frac{2\xi - \xi^2}{6} \right) \cdot \frac{4}{3} \xi^2 + \frac{1}{256} \left(\frac{4}{3} \xi^2 \right)^2 \\
&= \frac{3}{16} + \frac{3-8\alpha+4\gamma}{16} \xi \\
&+ \frac{1}{64} [(6-8\alpha-4\gamma)\xi^2 + (6-8\alpha+16\gamma)\xi\eta] \\
&+ \frac{\xi^3}{24} + \frac{\xi^4}{576}.
\end{aligned}$$

Hier ist nun der Faktor von $\xi\eta$ gleich

$$6 - 8\alpha + 16\gamma > 6 - 8\alpha + \frac{16}{3} > 8 - 8\alpha > 0.$$

Daher ergibt sich mit Rücksicht auf $\eta < \frac{\xi}{3}$ und auf $0 < \xi \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\text{Min}(Q, S) &< \frac{3}{16} + \frac{3-8\alpha+4\gamma}{16} \xi \\
&+ \frac{1}{64} \left[(6-8\alpha-4\gamma)\xi^2 + (6-8\alpha+16\gamma)\frac{\xi^2}{3} \right] \\
&+ \frac{\xi^2}{24} + \frac{\xi^2}{576} \\
&= \frac{3}{16} + \frac{3-8\alpha+4\gamma}{16} \xi + \frac{\xi^2}{576} (97-96\alpha+12\gamma).
\end{aligned}$$

Jetzt ist der Faktor von ξ^2 positiv und wegen $0 < \xi \leq 1$ folgt:

$$\begin{aligned}
\text{Min}(Q, S) &< \frac{3}{16} + \frac{3-8\alpha+4\gamma}{16} \xi + \frac{\xi}{576} (97-96\alpha+12\gamma) \\
&= \frac{3}{16} + \frac{\xi}{576} (205-384\alpha+156\gamma).
\end{aligned}$$

Nun ist

$$|a|^2 = \alpha^2 + \beta^2 = \alpha^2 + \frac{(\alpha-\gamma)^2}{3} = \frac{4\alpha^2 - 2\alpha\gamma + \gamma^2}{3}.$$

Hieraus folgt durch Auflösung nach α :

$$4\alpha = \gamma \pm \sqrt{12|a|^2 - 3\gamma^2}$$

und wegen (33) gilt dabei nur das obere Vorzeichen. Durch Einsetzen dieses Ausdrucks in die letzte Ungleichung erhält man

$$\text{Min}(Q, S) < \frac{3}{16} + \frac{\xi}{576} (205 + 60\gamma - 96 \sqrt{12|a|^2 - 3\gamma^2}).$$

Die rechte Seite wächst mit γ , und da jetzt $\gamma < \frac{3}{4}$ ist, ergibt sich

$$\text{Min}(Q, S) < \frac{3}{16} + \frac{\xi}{576} \left(205 + 45 - 96 \sqrt{12|a|^2 - \frac{27}{16}} \right),$$

und hieraus weiter

$$(40) \left\{ \begin{array}{l} \text{Min}(Q, S) - \left(\frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2 \right) \\ < \frac{3}{16} + \frac{\xi}{288} (125 - 12 \sqrt{192|a|^2 - 27}) - \frac{4}{\sqrt{13}} |a| + |a|^2. \end{array} \right.$$

Bezeichnet man die rechte Seite zur Abkürzung mit $f(|a|)$, so erhält man durch Differentiation:

$$f'(|a|) = -\frac{\xi}{288} \frac{12 \cdot 192 |a|}{\sqrt{192|a|^2 - 27}} - \frac{4}{\sqrt{13}} + 2|a|,$$

$$f''(|a|) = \frac{\xi}{288} \frac{12 \cdot 192 \cdot 27}{\sqrt{192|a|^2 - 27}^3} + 2 > 0.$$

Daher hat die Funktion $f(|a|)$ im Innern des zulässigen Intervalles kein Maximum; das Maximum kann sich also nur am Rand finden, d. h. für $|a| = \frac{3}{4}$ oder für $|a| = \frac{\sqrt{13}}{4}$. Nun ist aber erstens

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3}{4}\right) &= \frac{3}{16} + \frac{\xi}{288} (125 - 12 \sqrt{81}) - \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{9}{16} \\ &\leq \frac{3}{16} + \frac{17}{288} - \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{9}{16} \\ &< \frac{3}{16} + \frac{1}{16} - \frac{3}{\sqrt{13}} + \frac{9}{16} = \frac{13}{16} - \frac{3}{\sqrt{13}} < 0, \end{aligned}$$

und zweitens

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\sqrt{13}}{4}\right) &= \frac{3}{16} + \frac{\xi}{288} (125 - 12 \sqrt{129}) - 1 + \frac{13}{16} \\ &= \frac{\xi}{288} (125 - 12 \sqrt{129}) < \frac{\xi}{288} (125 - 12 \cdot 11) < 0. \end{aligned}$$

Daher ist $f(|a|)$, d. h. die rechte Seite von (40), in jedem Fall negativ und aus (40) folgt

$$\text{Min}(Q, S) < \frac{4}{\sqrt{13}} |a| - |a|^2.$$

Damit ist auch im Fall $\frac{1}{3} < \gamma < \frac{3}{4}$ die Ungleichung (25) nachgewiesen, womit nun alles erledigt ist.

§ 6. Anwendung des Dirichletschen Schubladenverfahrens.

Sei ρ eine komplexe Zahl, die nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehört. Wir betrachten, unter n eine beliebig große natürliche Zahl verstandend, die $(n+1)^2$ ganzen Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$

$$q = a + b\varepsilon \quad (a, b = 0, 1, \dots, n)$$

und bestimmen zu jeder eine ganze Zahl p des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ eindeutig durch die Forderung, daß, wenn

$$(41) \quad \rho q - p = x + yi \quad (x, y \text{ reell})$$

gesetzt wird,

$$0 \leq x < 1, \quad 0 \leq y < \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ist. Die $(n+1)^2$ Zahlen (41) sind alle voneinander verschieden, weil ρ nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehört. Teilt man das Rechteck mit den Ecken

$$0, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}i, 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

in n^2 ähnliche Teilrechtecke mit den Seitenlängen $\frac{1}{n}$ und $\frac{\sqrt{3}}{2n}$, so müssen von den $(n+1)^2$ Zahlen der Form (41) notwendig einmal zwei verschiedene dem gleichen Teilrechteck angehören, etwa $\rho q_1 - p_1$ und $\rho q_2 - p_2$. Dann ist aber

$$|\rho(q_1 - q_2) - (p_1 - p_2)| \leq \frac{1}{n} \sqrt{1 + \frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2n}.$$

Für $n > 1$ folgt hieraus $q_1 \neq q_2$, und außerdem ist $|q_1 - q_2| \leq n\sqrt{3}$. Daher ist

$$\left| \rho - \frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2} \right| \leq \frac{\sqrt{7}}{2n |q_1 - q_2|} \leq \frac{\sqrt{21}}{2 |q_1 - q_2|^2}.$$

Setzt man also $\frac{p_1 - p_2}{q_1 - q_2} = \frac{p}{q}$, wo p, q relativ prime ganze Zahlen des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ sind,¹ so ist erst recht

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\sqrt{7}}{2n|q|} \leq \frac{\sqrt{21}}{2|q|^2}.$$

Da n beliebig groß sein darf, ist hiermit die Existenz unendlich vieler Paare ganzer relativ primen Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ nachgewiesen, für welche die Ungleichung gilt:

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| \leq \frac{\sqrt{21}}{2|q|^2}.$$

§ 7. Beweis des ersten Teiles von Satz 3.

Nunmehr sind wir in der Lage, auch den ersten Teil von Satz 3 zu beweisen. Wir definieren eine Zahl δ durch die Formel

$$(42) \quad \rho - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2}.$$

Dann gibt es nach § 6 unendlich viele Paare von ganzen relativ primen Zahlen p, q des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$, für welche

$$|\delta| \leq \frac{\sqrt{21}}{2}$$

ist, und weil ρ nicht dem Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ angehören soll, ist $\delta \neq 0$. Zu jedem solchen Paar p, q kann man zwei ganze Zahlen p_1, q_1 des Körpers $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ so bestimmen, daß

$$(43) \quad pq_1 - qp_1 = 1$$

ist. Die Zahl q_1 ist dadurch nicht eindeutig bestimmt, sondern nur modulo q . Der Bruch $\frac{q_1}{q}$ darf also durch jede homologe Zahl (Definition siehe Anfang des § 3) ersetzt werden, die wir noch geeignet auswählen wollen.

Für $|q| > 1$ ist nach (43) gewiß $q_1 \neq 0$. Setzt man daher analog zu (42)

$$(44) \quad \rho - \frac{p_1}{q_1} = \frac{\delta_1}{q_1^2},$$

¹ Das kann man, weil im Körper $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ bekanntlich jedes Ideal ein Hauptideal ist; es gibt sogar einen Euklidischen Algorithmus.

so ist

$$\frac{\delta_1}{q_1^2} = \rho - \frac{p_1}{q_1} = \frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} + \frac{\delta}{q^2} = \frac{1}{qq_1} + \frac{\delta}{q^2},$$

also

$$(45) \quad \delta_1 = \frac{q_1}{q} + \delta \left(\frac{q_1}{q}\right)^2 = \delta \left[\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2} \right].$$

Indem man $\frac{q_1}{q}$ erlaubterweise durch eine geeignete homologe Zahl ersetzt, kann man den Ausdruck

$$\left| \left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta}\right)^2 - \frac{1}{4\delta^2} \right|^2$$

nach dem Hilfssatz des § 3 abschätzen und erhält dann:

$$(46) \quad |\delta_1|^2 < |\delta|^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{16|\delta|^4} \right) = \frac{|\delta|^2}{3} + \frac{1}{16|\delta|^2}.$$

Nach dem zweiten Teil des Hilfssatzes ist für $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{4|\delta|^2} \leq \frac{\sqrt{13}}{4}$,

also für $\frac{1}{\sqrt{13}} \leq |\delta|^2 \leq \frac{1}{3}$ sogar

$$|\delta_1|^2 \leq |\delta|^2 \cdot \frac{4}{\sqrt{13}} \cdot \frac{1}{4|\delta|^2} = \frac{1}{\sqrt{13}},$$

und zwar Gleichheit nur in den sechs Fällen

$$\frac{1}{4\delta^2} = \left| \begin{array}{c|c|c|c|c|c} \frac{4+\varepsilon}{4} & \frac{4+\varepsilon}{4} & \frac{4+\varepsilon}{4} & \frac{4+\varepsilon^2}{4} & \frac{4+\varepsilon^2}{4} & \frac{4+\varepsilon^2}{4} \\ \hline \frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta} \equiv & \frac{\varepsilon^2}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\varepsilon}{2} & \frac{1}{2} \\ \hline & & & & & \frac{\varepsilon^2}{2} \end{array} \right|.$$

In allen sechs Fällen wäre nach der zweiten Zeile $\frac{1}{2\delta}$ in $\mathfrak{K}(\varepsilon)$ enthalten, nach der ersten Zeile aber nicht (vgl. den Beginn des § 2), so daß keiner dieser Fälle eintreten kann. Somit gilt in der letzten Ungleichung nie das Gleichheitszeichen und es ist

$$(47) \quad |\delta_1|^2 < \frac{1}{\sqrt{13}}, \text{ falls } \frac{1}{\sqrt{13}} \leq |\delta|^2 \leq \frac{1}{3}.$$

Zu jedem der unendlich vielen relativ primen Paare p, q , für welche $|\delta| \leq \frac{\sqrt{21}}{2}$, also $|\delta|^2 \leq \frac{21}{4}$ ist, wählen wir nun ein Paar p_1, q_1

gemäß den Forderungen (43), (46) und gegebenenfalls auch (47) aus, was offenbar wieder unendlich viele verschiedene relativ prime Paare p_1, q_1 gibt.¹ Wenn dabei einmal $|\delta|^2 \geq 2$ ist, so ist nach (46)

$$|\delta_1|^2 < \text{Max}_{2 \leq x \leq \frac{21}{4}} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{16x} \right) = \frac{21}{3 \cdot 4} + \frac{4}{16 \cdot 21} < 2.$$

Daher ist von den beiden Zahlen $|\delta|^2, |\delta_1|^2$ immer wenigstens eine kleiner als 2. Es gibt also auch unendlich viele Paare p, q , für welche $|\delta|^2 < 2$ ist. Wenn dabei einmal $|\delta|^2 \geq \frac{3}{4}$ ist, so ist nach (46)

$$|\delta_1|^2 < \text{Max}_{\frac{3}{4} \leq x \leq 2} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{16x} \right) = \frac{2}{3} + \frac{1}{16 \cdot 2} < \frac{3}{4}.$$

Daher ist unendlich oft auch $|\delta|^2 < \frac{3}{4}$. Wenn dabei $|\delta|^2 \geq \frac{1}{3}$ ist, so ist nach (46)

$$|\delta_1|^2 < \text{Max}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{3}{4}} \left(\frac{x}{3} + \frac{1}{16x} \right) = \frac{3}{3 \cdot 4} + \frac{4}{16 \cdot 3} = \frac{1}{3}.$$

Daher ist unendlich oft auch $|\delta|^2 < \frac{1}{3}$. Wenn dabei $|\delta|^2 \geq \frac{1}{\sqrt{13}}$ ist, so können wir (47) anwenden und finden $|\delta_1|^2 < \frac{1}{\sqrt{13}}$. Da-

¹ Allerdings ist nicht ausgeschlossen, daß einmal zu zwei verschiedenen Paaren p, q dasselbe Paar p_1, q_1 gehört. Da aber die Brüche $\frac{p}{q}$ mit wachsendem $|q|$ die nicht in $\bar{\Omega}(\varepsilon)$ enthaltene Zahl ρ beliebig approximieren, und da nach (43)

$$\left| \frac{p}{q} - \frac{p_1}{q_1} \right| = \frac{1}{|qq_1|} \leq \frac{1}{|q|}$$

ist, so kommen die Brüche $\frac{p_1}{q_1}$ ebenfalls der Zahl ρ beliebig nahe; es sind also unendlich viele verschiedene. Zugleich sieht man, daß mit $|q|$ auch das zugehörige $|q_1|$ beliebig groß wird, weil dann $\frac{p_1}{q_1}$ beliebig nahe an ρ herankommt.

her ist auch unendlich oft $|\delta|^2 < \frac{1}{\sqrt{13}}$; d. h. es gibt unendlich viele Paare p, q , für die

$$\left| p - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{\sqrt[4]{13} |q|^2}$$

ist. W. z. b. w.

§ 8. Neuer Beweis des Hurwitzschen Satzes (Satz I).

Der zweite Teil von Satz 1 läßt sich ohne Benutzung von Kettenbrüchen ganz leicht analog zu dem Verfahren des § 2 beweisen. Das ist bereits in meinem erwähnten Buch „Irrationalzahlen“ durchgeführt (Satz 53) und mag hier übergangen werden. Es handelt sich um den schwierigeren ersten Teil. Dazu beweisen wir als Analogon zu dem Hilfssatz des § 3 den

Hilfssatz.¹ Für $\frac{20}{81} \leq a \leq \frac{5}{4}$ gibt es zu jeder reellen Zahl z_1 eine modulo 1 kongruente Zahl z , für welche die Ungleichung

$$|z^2 - a| \leq \sqrt[5]{\frac{4a}{5}}$$

besteht, und zwar mit dem Kleinerzeichen, außer im Fall $a = \frac{5}{4}$, $z_1 \equiv \frac{1}{2} \pmod{1}$, in welchem Gleichheit gilt.

Der Ausnahmefall ist klar, da $\left| \left(\pm \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right| = 1$ und auch $\left| \left(\pm \frac{3}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \right| = 1$ ist. Für den allgemeinen Fall bemerken wir, daß es zu jeder reellen Zahl z_1 eine modulo 1 kongruente

¹ Der Hilfssatz läßt sich in mannigfacher Weise modifizieren. Beispielsweise hat mir Herr Hausdorff die folgende brauchbare Variante brieflich mitgeteilt:

Ist $a \geq 0$, so gibt es zu jeder reellen Zahl z_1 eine modulo 1 kongruente Zahl z , für welche die Ungleichung gilt:

$$|z^2 - a| \leq \sqrt{\frac{3}{28} + \frac{4}{7} a^2}.$$

Zahl z sowohl im Intervall $-\frac{1}{2} < z \leq \frac{1}{2}$ als auch in einem der beiden Intervalle $-1 < z < -\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ gibt. Man kann also z nach Bedarf so wählen, daß $0 \leq z^2 \leq \frac{1}{4}$ oder so, daß $\frac{1}{4} \leq z^2 \leq 1$ ist.

Wenn nun erstens $\frac{20}{81} \leq a < \frac{4}{9}$ ist, wählen wir $0 \leq z^2 \leq \frac{1}{4}$ und erhalten

$$|z^2 - a| < \frac{4}{9} \leq \sqrt{\frac{4a}{5}}.$$

Wenn zweitens $\frac{4}{9} \leq a \leq \frac{5}{8}$ ist, wählen wir $\frac{1}{4} \leq z^2 \leq 1$ und erhalten

$$z^2 - a \leq 1 - a \leq \frac{5}{9},$$

$$a - z^2 \leq \frac{5}{8} - \frac{1}{4} = \frac{3}{8} < \frac{5}{9},$$

also zusammenfassend

$$|z^2 - a| \leq \frac{5}{9} \leq \frac{5}{9} + \frac{2}{\sqrt{5}} \left(\sqrt{a} - \frac{2}{3} \right) = \sqrt{\frac{4a}{5}} + \frac{5\sqrt{5-12}}{9\sqrt{5}} < \sqrt{\frac{4a}{5}}.$$

Wenn schließlich drittens $\frac{5}{8} < a \leq \frac{5}{4}$ ist, wählen wir ebenfalls $\frac{1}{4} \leq z^2 \leq 1$ und erhalten

$$z^2 - a \leq 1 - a < a - \frac{1}{4},$$

$$a - z^2 \leq a - \frac{1}{4},$$

also zusammenfassend

$$|z^2 - a| \leq a - \frac{1}{4} = \sqrt{\frac{4a}{5}} - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - \sqrt{a} \right) \left(\sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{5}} \right) \leq \sqrt{\frac{4a}{5}}.$$

Dabei kommen lauter Gleichheitszeichen nur, wenn $a = \frac{5}{4}$ und zugleich $z^2 = \frac{1}{4}$, also $z = \frac{1}{2}$ ist; das ist aber der angegebene Ausnahmefall. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Ist nun ρ eine irrationale Zahl, so liefert das Schubladenverfahren in bekannter Weise unendlich viele Paare relativ primer Zahlen p, q , für die

$$\left| \rho - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

ist. Setzt man analog zu (42) wieder

$$(48) \quad \rho - \frac{p}{q} = \frac{\delta}{q^2},$$

so ist also $|\delta| < 1$. Bestimmt man dann die ganzen Zahlen p_1, q_1 so, daß $pq_1 - qp_1 = 1$ ist, und setzt man weiter

$$(49) \quad \rho - \frac{p_1}{q_1} = \frac{\delta_1}{q_1^2},$$

so ist q_1 nur modulo q , der Quotient $\frac{q_1}{q}$ also nur modulo 1 bestimmt. Der Hurwitzsche Satz wird bewiesen sein, wenn sich zeigen läßt, daß bei geeigneter Wahl von q_1 immer wenigstens eine der beiden Zahlen $|\delta|, |\delta_1|$ kleiner als $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ist.

Nun ist aber wieder [vgl. (45)]

$$(50) \quad \delta_1 = \delta \left[\left(\frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta} \right)^2 - \frac{1}{4\delta^2} \right],$$

und wenn $|\delta| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$, also $\frac{1}{4} < \frac{1}{4\delta^2} \leq \frac{5}{4}$, so ist der absolute Betrag der eckigen Klammer bei geeigneter Wahl von q_1 nach dem Hilfssatz

$$< \sqrt{\frac{4}{5 \cdot 4\delta^2}} = \frac{1}{|\delta| \sqrt{5}},$$

und daher nach (50)

$$|\delta_1| < \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Eine Ausnahme könnte nach dem Hilfssatz nur stattfinden, wenn

$$\frac{1}{4\delta^2} = \frac{5}{4}, \quad \frac{q_1}{q} + \frac{1}{2\delta} = \frac{1}{2} + \text{ganze Zahl}$$

wäre. Nach der zweiten Gleichung wäre dann δ rational, nach der ersten irrational, so daß die Ausnahme nicht Platz greifen kann. Für $|\delta| \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$ ist daher immer $|\delta_1| < \frac{1}{\sqrt{5}}$. W. z. b. w.