Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1931. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1931

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über stetige Fortsetzung reeller Funktionen.

Von **Richard Rado** in Berlin.

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung am 9. Mai 1931.

Für viele Fragen der reellen Analysis ist folgender Satz von Wichtigkeit: Gegeben sei eine reelle Funktion f, die in einer abgeschlossenen Punktmenge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$ definiert und an deren Häufungspunkten stetig ist. Dann kann man f in $\mathfrak{R}^n - \mathfrak{M}$ so definieren, daß man eine in ganz $\mathfrak{R}^n$ stetige Funktion f erhält. Carathéodory beweist den Satz in seinem Buch über „Reelle Funktionen", 1. Auflage, §§ 541—543 sehr einfach mittels Lebesguescher Integrale. Es zeigte sich aber, daß man so tiefliegende Hilfsmittel zum Beweis des Satzes nicht benötigt. In der zweiten Auflage desselben Buches, §§ 541—543, wird er auf elementarem Wege bewiesen, sogar noch mit einer Verschärfung, daß nämlich die stetige Fortsetzung der Funktion in einer gewissen Umgebung von $\mathfrak{M}$ in bestimmter Weise nach oben oder nach unten beschränkt werden kann. Im Crelle-Journal, Bd. 145, Seite 9—14, beweist H. Tietze den Satz durch ähnliche, aber kompliziertere Bildungen wie die bei der folgenden zweiten Lösung, allerdings nur für den Fall, daß $|f|$ auf $\mathfrak{M}$ beschränkt ist. Im folgenden werden zwei weitere Möglichkeiten solcher stetigen Fortsetzung angegeben, von denen die zweite vielleicht die einfachste Lösung des Problems darstellt.

Gegeben ist also eine reelle Funktion f und eine abgeschlossene Menge $\mathfrak{M}$ des $\mathfrak{R}^n$. f ist in $\mathfrak{M}$ definiert und in den Häufungspunkten von $\mathfrak{M}$ stetig. Gesucht ist eine Funktion, die in $\mathfrak{R}^n$ definiert und stetig ist und in $\mathfrak{M}$ mit f übereinstimmt. Es bedeute $\varrho(P, Q)$ die Entfernung der Punkte P und Q, $\varrho(Q, \mathfrak{M})$ den Abstand von Q und $\mathfrak{M}$.

Die erste Methode von Carathéodory besteht darin, daß man als Funktionswert $f(Q)$ für $Q \not\prec \mathfrak{M}$ gewisse Mittelwerte von

Funktionswerten $f(P)$ definiert, die in Punkten $P < \mathfrak{M}$ angenommen werden, welche in immer kleineren Umgebungen von Q liegen, wenn sich Q der Menge $\mathfrak{M}$ nähert. Diese Mittelwerte sind Lebesguesche Integrale. Man kann letztere dadurch vermeiden, daß man nur abzählbar viele Funktionswerte von f zur Definition von $f(Q)$ verwertet. f ist vollständig dadurch charakterisiert, daß ich $f(P_\nu)$ für eine auf $\mathfrak{M}$ überall dichte Punktfolge $P_\nu < \mathfrak{M}$ kenne. Von diesen Funktionswerten nehme ich jetzt einen gewissen Mittelwert, der durch passende Gewichtsfunktionen so eingerichtet werden muß, daß er sich erstens mit Q stetig ändert und daß ferner bei der Mittelbildung hauptsächlich solche $f(P_\nu)$ einen Einfluß haben, für die $\varrho(Q, P_\nu)$ klein wird, wenn Q sich $\mathfrak{M}$ nähert. Letzteres gewährleistet den stetigen Anschluß von $f(Q)$ an die Funktionswerte in $\mathfrak{M}$. Außerdem brauche ich noch von Q unabhängige Gewichte a_ν, welche die Konvergenz der zur Mittelbildung benötigten unendlichen Reihen erzeugen. So kommt man auf die folgende Lösung der Aufgabe:

1. Lösung: $Q_\nu (\nu = 1, 2, \ldots)$ sei eine in $\mathfrak{R}^n$ überall dichte Punktfolge (z. B. die Menge aller Punkte, die in irgend einem Koordinatensystem nur rationale Koordinaten haben). Es gibt $P_\nu < \mathfrak{M}$ mit $\varrho(Q_\nu, \mathfrak{M}) = \varrho(Q_\nu, P_\nu)$.

Ich wähle $a_\nu > 0$, so daß die Reihen

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \quad \text{und} \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cdot |f(P_\nu)|$$

konvergieren $\left(\text{z. B. } a_\nu = \dfrac{2^{-\nu}}{1 + |f(P_\nu)|}\right)$. Für $Q \not< \mathfrak{M}$ definiere ich dann:

$$(1) \qquad f(Q) = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu f(P_\nu) \cdot \operatorname{Max}(0, 2\varrho(Q, \mathfrak{M}) - \varrho(Q, P_\nu))}{\sum\limits_{\nu=1}^{\infty} a_\nu \cdot \operatorname{Max}(0, 2\varrho(Q, \mathfrak{M}) - \varrho(Q, P_\nu))}$$

Die so erweiterte Funktion f ist überall stetig.

Beweis: Die P_ν liegen in $\mathfrak{M}$ überall dicht. Zu $Q \not< \mathfrak{M}$ gibt es also ein P_μ mit $2\varrho(Q, \mathfrak{M}) - \varrho(Q, P_\mu) > 0$. Wegen $a_\mu > 0$ verschwindet der Nenner von (1) also nie. $\mathfrak{R}$ sei eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{R}^n - \mathfrak{M}$. Dann gibt es A mit $\varrho(Q, \mathfrak{M}) \leq A$ für $Q < \mathfrak{N}$.

Für $Q < \mathfrak{N}$ folgt dann:

$$|a_\nu f(P_\nu) \cdot \operatorname{Max}(0, 2\varrho(Q, \mathfrak{M}) - \varrho(Q, P_\nu))| \leq 2A \cdot a_\nu |f(P_\nu)|$$
$$|a_\nu \cdot \operatorname{Max}(0, 2\varrho(Q, \mathfrak{M}) - \varrho(Q, P_\nu))| \leq 2A \cdot a_\nu$$

Wegen der Wahl der a_ν sind also Zähler und Nenner von (1) in $\mathfrak{N}$ gleichmäßig konvergente Reihen stetiger Funktionen, also selbst stetige Funktionen von Q für alle $Q \not< \mathfrak{M}$. Es bleibt noch zu zeigen, daß f in einem Randpunkt $\overline{P}$ von $\mathfrak{M}$ stetig ist. Es sei $Q \not< \mathfrak{M}$. Aus der Form von (1) sieht man, daß $f(Q)$ ein Mittelwert aller derjenigen $f(P_\nu)$ ist, für die $\varrho(Q, P_\nu) \leq 2\varrho(Q, \mathfrak{M})$ ist. Für $Q \to \overline{P}$ rücken diese P_ν in immer kleinere Umgebungen von $\overline{P}$, also folgt aus der Stetigkeit des gegebenen f in $\overline{P}$: $f(Q) \to f(\overline{P})$.

Ausführlicher:

$$|f(Q) - f(\overline{P})| =$$
$$\left| \frac{\sum\limits_{\varrho(Q, P_\nu) \leq 2\varrho(Q, \mathfrak{M})} a_\nu \cdot [f(P_\nu) - f(\overline{P})] \cdot [2\varrho(Q, \mathfrak{M})\varrho - (Q, P_\nu)]}{\sum\limits_{\varrho(Q, P_\nu) \leq 2\varrho(Q, \mathfrak{M})} a_\nu \cdot [2\varrho(Q, \mathfrak{M}) - \varrho(Q, P_\nu)]} \right|$$
$$\leq \operatorname*{Max}_{\substack{P < \mathfrak{M} \\ \varrho(Q, P) \leq 2\varrho(Q, \mathfrak{M})}} |f(P) - f(\overline{P})|$$

Wegen $\varrho(Q, \mathfrak{M}) \leq \varrho(Q, \overline{P})$ ist daher $\lim\limits_{Q \to \overline{P}} f(Q) = f(\overline{P})$.

Die erweiterte Funktion f ist überall stetig.

2. Lösung: Wenn die Aufgabe für f_1 und $\mathfrak{M}$ einerseits, für f_2 und $\mathfrak{M}$ andrerseits gelöst ist, so ist die Differenz der gefundenen stetigen Fortsetzungen eine stetige Erweiterung von $f_1 - f_2$. Wegen $f = \frac{|f| + f}{2} - \frac{|f| - f}{2}$ genügt es also, $f(P) \geq 0$ für $P < \mathfrak{M}$ anzunehmen. Dann definiere ich für $Q \not< \mathfrak{M}$:

$$f(Q) = \operatorname*{Max}_{P < \mathfrak{M}} \left[f(P) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q, P)}{\varrho(Q, \mathfrak{M})}\right)\right]. \tag{2}$$

Diese Funktion erfüllt die obigen Forderungen.

Beweis: Zu $Q \not< \mathfrak{M}$ gibt es $P_0 < \mathfrak{M}$ mit $\varrho(Q, P_0) = \varrho(Q, \mathfrak{M})$. Dann ist:

$$f(P_0) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q, P_0)}{\varrho(Q, \mathfrak{M})}\right) = f(P_0) \geq 0.$$

Für $P < \mathfrak{M}$ mit $\varrho(Q, P) > 2\varrho(Q, \mathfrak{M})$ ist aber

$$f(P) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q, P)}{\varrho(Q, \mathfrak{M})}\right) \leq 0.$$

Das Maximum in (2) wird also in einem Punkte $P_1 < \mathfrak{M}$ mit $\varrho(Q, P_1) \leq 2\varrho(Q, \mathfrak{M})$ angenommen.

$\mathfrak{N}$ sei eine beschränkte, abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{R}^n - \mathfrak{M}$. Die Menge der zu $Q < \mathfrak{N}$ gehörigen P_1 ist dann beschränkt, die zugehörigen $f(P_1)$ sind also auch beschränkt. Für $Q, Q' < \mathfrak{N}$ folgt daher:

$$\begin{aligned} f(Q') &\geq f(P_1) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q', P_1)}{\varrho(Q', \mathfrak{M})}\right) \\ &\geq f(P_1) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q, P_1)}{\varrho(Q, \mathfrak{M})}\right) - \varepsilon \\ &\geq f(Q) - \varepsilon \quad \text{für} \quad \varrho(Q, Q') \leq \delta(\varepsilon). \end{aligned}$$

Entsprechend ist umgekehrt:

$$f(Q) \geq f(Q') - \varepsilon \quad \text{für} \quad \varrho(Q, Q') \leq \delta_1(\varepsilon).$$

f ist daher in $\mathfrak{N}$, also in jedem Punkte $Q \not< \mathfrak{M}$ stetig.

Ferner sei $\overline{P}$ ein Randpunkt von $\mathfrak{M}$, $Q \not< \mathfrak{M}$. Dann ist:

$$\begin{aligned} f(Q) &= f(P_1) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q, P_1)}{\varrho(Q, \mathfrak{M})}\right) \\ &< f(P_1) \leq f(\overline{P}) + \varepsilon \quad \text{für} \quad \varrho(Q, \overline{P}) \leq \delta_2(\varepsilon) \\ f(Q) &\geq f(P_0) \cdot \left(2 - \frac{\varrho(Q, P_0)}{\varrho(Q, \mathfrak{M})}\right) \\ &= f(P_0) \geq f(\overline{P}) - \varepsilon \quad \text{für} \quad \varrho(Q, \overline{P}) \leq \delta_3(\varepsilon). \end{aligned}$$

f ist also auch in $\overline{P}$ stetig.

Wenn die gegebene Funktion f in $\mathfrak{M}$ halbstetig ist, etwa nach oben, dann liefert (1) eine Funktion, die in $Q \not< \mathfrak{M}$ stetig, in $P < \mathfrak{M}$ nach oben halbstetig ist. Die zweite Methode leistet das im allgemeinen nicht, da die obige Zerlegung von f in die Differenz zweier nicht negativer Funktionen nicht zulässig ist, weil sie die Halbstetigkeit evtl. vernichtet.