Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1930. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1930
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Vom Normalenkegel der Zwischenebenen zweier getrennter Eikörper.

Von **Hermann Brunn.**

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung am 5. Juli 1930.

Unter Eigebieten in der Ebene oder im Raume verstehen wir abgeschlossene Gebiete im Endlichen, die mit einer treffenden Geraden nur ein Stück — Punkt oder Strecke — gemein haben.

Wir schicken zwei Hilfssätze voraus:

1. Zwischen zwei getrennten, d. h. keinen Punkt gemein habenden Ovalgebieten einer Ebene können immer Gerade — wir nennen sie „Zwischengerade" —, zwischen zwei getrennten Eikörpern im Raume immer „Zwischenebenen" hindurchgeführt werden, die weder mit dem einen noch dem andern Eigebiet einen Punkt gemein haben. (Schon bei Minkowski.)

Man zeigt leicht, daß z. B. die Normalen bzw. Normalebenen in Punkten der (bzw. einer) kürzesten Verbindungsstrecke zwischen den beiden Eigebieten zu diesen Zwischenelementen gehören.

2. Für zwei vollkommen getrennte Ovale E, F mit inneren Punkten in der Ebene gibt es immer vier verschiedene Gemeinstützen, zwei „innere" ι_1 und ι_2, und zwei „äußere" α_1 und α_2.

Die Ovale liegen für ein ι auf verschiedenen Seiten, für ein α auf der gleichen Seite.

Es wird gut sein, diesem schon von Juel bewiesenen Satze[1]) einen neuen Beweis zu geben, weil wir von einer anderen Ovaldefinition ausgehen als Juel, und damit wir einige besondere Schlüsse bequem anknüpfen können.

Man denke sich, um die Vorstellung zu fixieren und die gegenseitige Lage der Objekte bequem bezeichnen zu können,

[1]) S. „Inledning etc." D. Kgl. Danske Vidensk. Selsk. Skr. 6. Rekke, math. Afd. X. 1. 1899, S. 16f.

eine Zwischengerade ζ der Ovale wagrecht, E darüber, F darunter gelegen, und ziehe unterhalb von F noch eine Parallele ζ' zu ζ, die keinen Punkt mit F gemein hat. E hat zwei zu ζ parallele Stützen: ζ_1 oben und ζ_2 unten, und beide sind, wenn E nicht auf eine zu ζ parallele Strecke sich reduziert, sicher also, wenn E innere Punkte hat, wie wir annehmen, von einander verschieden. Auch von jeder anderen Richtung in der Ebene von E gibt es dann zwei verschiedene Stützen an E, die — wenn man die Richtung ζ hier ausschließt — immer als rechte und linke unterschieden werden können.

Unter dem Winkel ψ einer Geraden γ mit ζ_1 verstehe ich den Winkel $< \pi$ zwischen der unterhalb ζ_1 liegenden Hälfte $\underline{\gamma}$ von γ mit der vom Schnittpunkt $(\zeta_1, \gamma) \equiv c$ nach rechts laufenden Häfte $\vec{\zeta}_1$ von ζ_1. Wenn dann für eine zweite durch c gehende Gerade γ_ν der Richtungswinkel $\psi_\nu > \psi$ ist, liegt $\underline{\gamma}_\nu$ — abgesehen vom gemeinsamen Punkt c — ganz links von $\underline{\gamma}$, und daher auch von γ.

Analoges gilt für eine beliebige Parallelverschiebung unseres Systems, die etwa ζ_1 und c in ζ_1^* und c^* überführen möge, wobei dann ζ_1^* statt des ζ_1 für das „oben" und „unten" maßgebend ist.

Nun seien ϱ_ν und ϱ die rechten Stützen von E zu den Richtungswinkeln $\psi_\nu > \psi$, r und r' ihre Schnittpunkte mit ζ und ζ'. Der Schnittpunkt c^* von ϱ und ϱ_ν kann nicht auf oder unterhalb ζ fallen; denn dann würde wegen $\varphi_\nu > \varphi$ das $\underline{\varrho}_\nu$ links von $\underline{\varrho}$ und $\overline{\varrho}$, das $\overline{\varrho}_\nu$ rechts von ϱ und ϱ liegen (wobei der obere Strich obere Hälften andeutet). Da aber mit E auch der auf ϱ_ν vorhandene E-Punkt oberhalb ζ, also auf $\overline{\varrho}_\nu$ liegen würde, müßte er rechts von ϱ liegen, das dann keine rechte Stütze von E sein könnte, was es doch ist.

Also liegt c^* oberhalb ζ, r und r_ν liegen auf $\underline{\varrho}$ und $\underline{\varrho}_\nu$, und weil $\underline{\varrho}_\nu$ links von $\underline{\varrho}$, liegt auch r_ν links von r.

Innerhalb des Intervalls $0 \leqq \psi \leqq \pi$ rückt also r mit wachsendem ψ überall streng monoton — d. h. ohne stehen zu bleiben — von rechts nach links, und wenn man das ganze Intervall mit Einschluß der Grenzwerte 0 und π durchläuft, einmal über die ganze Gerade aus dem Unendlichen rechts in das Unendliche links.

Für die Stützen λ auf der linken Seite von E und ihren

Schnitt l auf ζ ist es, wie man leicht nachkontrolliert, genau dasselbe, wenn man sie von ζ_2 bis ζ_1 durchläuft, und man hat also im Ganzen:

Wenn man eine veränderliche Stütze an E aus der Lage ζ_1 stetig im Uhrzeigersinn um das ganze Oval E bis wieder in die Lage ζ_1 herumbewegt, durchläuft der Schnittpunkt monoton die Gerade ζ zweimal vollständig aus dem Unendlichen rechts in das Unendliche links. Natürlich gilt dasselbe für den Schnittpunkt r', bzw. l' der veränderlichen Stütze mit ζ'.

Daraus folgt: Wenn man die veränderliche Stütze aus der Lage ζ_1 um E herum in der besagten Weise wieder nach ζ zurückführt, bewegt sich auch die Strecke, die zuerst $\overline{rr'}$, dann $\overline{ll'}$ heißt, zweimal streng monoton über den ganzen Streifen zwischen ζ und ζ' aus dem Unendlichen rechts in das Unendliche links.

Die Monotonie der Bewegung bedeutet hier, daß jede Folgelage von $\overline{rr'}$ auf dem Streifen $\overline{\zeta\zeta'}$ vollständig links von jeder vorhergehenden Lage $\overline{rr'}$, jede Folgelage $\overline{ll'}$ vollständig links von jeder vorhergehenden Lage $\overline{ll'}$ fällt.

Von der bewegten Strecke rr' (ll') wird nun das Oval F vollständig überfahren, es ist eine erste, zu einem ϱ_1 (λ_1) gehörige Lege von rr' (ll') vorhanden, die mit E etwas gemein hat, und eine letzte entsprechende zu einem ϱ_2 (λ_2).

ϱ_1, ϱ_2, λ_1, λ_2 sind offenbar Gemeinstützen von E und F, und die Monotonie der Streckenbewegung verhindert, daß weitere Gemeinstützen vorhanden sind. Denn wäre z. B. ϱ_3 eine weitere rechte Stütze von F, so könnte sie — nach der Definition von ϱ_1 — nicht *vor* ϱ_1 erreicht worden sein; *nachher* aber auch nicht, denn dann würde sie mit dem ganzen ϱ_1 auch den notwendig auf ϱ_1 liegenden F-Punkt zur Rechten haben, was für eine *rechte* Stütze von F ausgeschlossen ist. Man hat nun

ϱ_1 ist rechte Stütze von E, rechte von F, also eine äußere Gemeinstütze α_1 von E und F,

ϱ_2 ist rechte Stütze von E, linke von F, also eine innere Gemeinstütze ι_1 von E und F,

λ_1 ist linke Stütze von E, rechte von F, also eine innere Gemeinstütze ι_2 von E und F,

λ_2 ist linke Stütze von E, linke von F, also eine äußere Gemeinstütze α_2 von E und F.

Wir werden es ausschließlich mit den inneren Gemeinstützen zu tun haben.

Die beiden inneren Stützen ϱ_2 und λ_1 sind von einander verschieden.

Der Beweis dafür muß sich auf das Vorhandensein eines inneren Punktes i von E (oder F) stützen, denn hätten E und F keinen inneren Punkt, so könnten ϱ_2 und λ_1 tatsächlich zusammenfallen. Aber einen Punkt i von E muß ϱ_2 zu seiner Linken, λ_1 zu seiner Rechten haben, wodurch die Verschiedenheit von ϱ_2 und λ_1 gesichert ist.

Es darf aber hier nicht übersehen werden, daß die Stütze ζ_2 (ebenso ζ_1) sowohl als eine rechte wie als eine linke an E angesehen werden kann und daß hier das Rechts- und Linksliegen eines inneren Punktes von der Stütze seine unterscheidende Kraft verliert, so daß es zunächst denkbar wäre, daß ϱ_2 und λ_1 gelegentlich in ζ_2 zusammenfielen. Angenommen, sie täten es, so müßte ζ_2, da es Punkte von E und F enthält, von der zu ihr parallelen Zwischengeraden ζ, die keine solchen enthält, verschieden sein und also ganz auf einer Seite von ζ liegen, was doch die auf ζ_2 enthaltenen Punkte von E und F nicht tun können. Also auch auf ζ_2 (ζ_1) können ϱ_2 und λ_1 nicht zusammenfallen; darauf mußte um so mehr hingewiesen werden, also eine Annäherung an dieses Zusammenfallen von ϱ_2, λ_1 und ζ_2 bis zu jedem beliebigen Grade möglich ist.

Die inneren Gemeinstützen ϱ_2 und λ_1 können auch nicht parallel sein; denn — da ihr Zusammenfallen jetzt ausgeschlossen ist — müßte ϱ_2 als parallel zu λ_1 ganz auf einer Seite von λ_1 liegen, was doch die auf ϱ_2 vorhandenen Punkte von E und F nach der für λ_1 einschlägigen Definition einer inneren Gemeinstütze nicht tun können.

In Summa haben wir nun streng die fürs Folgende wichtige Tatsache bewiesen:

Die inneren Gemeinstützen zweier eigentlichen getrennten Ovalgebiete in einer Ebene bilden, im Endlichen sich schneidend, sicher vier vom ι-Schnittpunkt s ausgehende Halbstrahlenwinkel größer als Null und kleiner als π.

Da E nur auf einer Seite von ι_1 und auf einer Seite von ι_2 liegt, muß es ganz auf denjenigen dieser vier Winkel — heiße er φ_1 — beschränkt sein, welcher ebenso gegen die ι gelegen ist; und da F sich bezüglich der Seiten entgegengesetzt verhält, muß es ganz im Scheitelwinkel φ_2 von φ_1 liegen; übrigens erreichen E und F mit Punkten e, f die Schenkel ihrer Halbstrahlenwinkel[1]). Wir fassen φ_1 und φ_2 zu dem Vollstrahlenwinkel φ zusammen.

Für das Spätere ist von Belang, daß alle von s ausgehenden in φ verlaufenden Vollstrahlen V Punkte e, f enthalten. Denn auf jedem Schenkel von φ_1 liegt mindestens ein e, die Verbindungsstrecke beider Punkte überspannt $\varphi_1 < \pi$ vollständig, gehört vollständig zu E und muß von V geschnitten werden; Analoges gilt für F und φ_2. Allerdings kann die Überspannungssehne sowohl bei φ_1 als bei φ_2 auf den Winkelscheitel s zusammenschrumpfen, oder sich von s aus an einen der Winkelschenkel anlegen, s. Fig. 1 und Fig. 2.

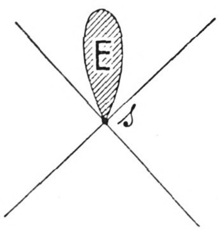

Fig. 1

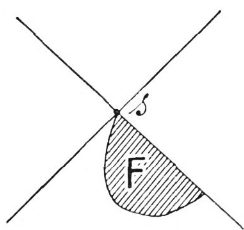

Fig. 2

Aber dann ist eben in s ein unumgehbares e oder f für V gegeben; auch ist ausgeschlossen, daß s von beiden Ovalen zugleich erreicht wird, sie wären ja dann nicht mehr getrennt. Man kann also, wenn $E(F)$ bis s reicht, um s immer einen endlichen, wenn auch kleinen Kreis $\varkappa$ legen, der keinen Punkt von $F(E)$ enthält. Auch dies für später.

Die von s aus innerhalb φ_0 verlaufenden Vollstrahlen sind „im allgemeinen" von Punkten e und f frei und dann Zwischengerade von E und F, nur mögen sie gelegentlich in s ein e oder f enthalten.

---

[1]) Auch im folgenden wird unter e, bzw. f immer ein Punkt von E, bzw. F, später von $\mathfrak{E}$, bzw. $\mathfrak{F}$ verstanden.

Nun zu unserem eigentlichen Thema!

Wir wollen den Satz beweisen:

Die von einem Punkt a auf die Zwischenebenen zweier getrennten Eikörper $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ gefällten Normalen erfüllen einen Ovalkegel.

Beweis. Es sei Z_0 eine bestimmte, übrigens beliebige Zwischenebene der beiden Eikörper, B ein in ihr liegendes Strahlenbüschel mit Strahlen β. Nach jeder Richtung β denken wir uns eine Parallelprojektion von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ auf eine zu β normale Ebene N entworfen. Die Projektion besteht jedesmal aus zwei offenbar ebenfalls völlig getrennten Ovalen E und F, zwischen denen die Gerade ζ_0, nach der N und Z_0 sich schneiden, als „Zwischengerade" hindurchläuft.

Wir setzen zunächst voraus, $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ seien eigentliche Eikörper, mit inneren Punkten, worauf dann auch E und F eigentliche Ovale sein werden, die nach unserem zweiten Hilfssatz zwei innere Gemeinstützen haben, und auf die wir die ganzen Bezeichnungen von früher übertragen. Durch die Projektion entsprechen den Gemeinstützen ι_1, ι_2 jetzt innere Gemeinstützebenen (auch sie meist kurz als „Gemeinstützen" bezeichnet) J_1 und J_2 an $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$; dem s entspricht die Schnittlinie σ von J_1 und J_2, welche die Projektionsrichtung β hat. Wir haben zwischen J_1 und J_2 wieder die Winkel φ_1, φ_2, φ_3, φ_4, bzw. φ und φ_0, es ist $0 < \varphi$, $\varphi_0 < \pi$ und die Winkel φ_1, φ_2 sind sicher von ganz zu $\mathfrak{E}$ bzw. $\mathfrak{F}$ gehörigen Sehnen überspannt, wobei aber singuläre Fälle eintreten können, wie sie denen in der Projektion auf N entsprechen, und also die eine Überspannung das σ in einem Punkt oder einer Strecke erreichen kann.

Alle Ebenen aus σ, die durch das Innere von φ_0 hindurchziehen — wir bezeichnen ihre Gesamtheit mit $m(Z)$ — sind im allgemeinen von den Eikörpern völlig getrennt und damit Zwischenebenen Z, während die durch φ ziehenden einschließlich der J — nennen wir sie einzeln D und ihre Gesamtheit $m(D)$ — sowohl Punkte e als f auf sich liegen haben, wie aus den Überspannungen ersichtlich ist.

Die Ebenen von $m(Z)$ sind untereinander nach ihrer Richtung, besser „Stellung" alle voneinander verschieden. Es gibt nun wohl noch andere Zwischenebenen parallel zu σ, aber keine, deren

Stellung nicht schon in $m(Z)$ vertreten ist. Denn in $m(D)$ befindet sich ja kein Z; aber auch keine Parallelebene D' zu einem D kann ein Z sein; denn dann müßte D' — wie jedes Z — jede Strecke ef schneiden. Auf D befindet sich aber sicher mindestens ein ef, und dies kann wegen seiner Parallelität zu D' von D' nicht geschnitten werden.

Man ist nun auch sicher, daß die Stellung der Zwischenebene Z_0, das ja für jede Projektionsrichtung β gleichmäßig in Betracht kommt, in jedem $m(Z)$ durch eine Ebene Z_0' vertreten ist. Diese unendlich vielen Z_0' können alle voneinander verschieden sein.

Wo wir oben „im allgemeinen" sagten, ist ein Ausnahmefall zu bedenken. Wenn — wir können jetzt wieder auf die Projektion zurückgehn — E oder F bis an den Winkelscheitel s herandringt, so sind die von s aus durch φ_0 ziehenden Geraden γ nicht im strengen Sinn Zwischengerade von E und F und auch die oben mit $m(Z)$ bezeichnete Menge enthält nicht eigentliche Z, weil die Forderung der vollständigen Trennung von den Eigebilden nicht erfüllt ist. Der Zwischenfall wird sich aber als harmlos herausstellen.

Denn wenn z. B. — vgl. Figur 3 — E das nach s vordringende Oval, $s\,a\,b$ der Sektor des früher erwähnten kleinen Kreises $\varkappa$ ist, den φ_2 ausschneidet, so kann man jeder Geraden γ eine kleine Parallelverschiebung gegen unten erteilen, so daß sie von φ_2 (und dem ganzen φ) nur den genannten Sektor schneidet, im übrigen in φ_0 verläuft, daher weder ein e noch ein f enthält und eine eigentliche Zwischengerade von E und F ist. Das Ergebnis überträgt sich auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ und ihre Zwischenebenen, und so kommt es bei unsrem Ausnahmefall darauf hinaus, daß genau wie beim regulären Fall die Stellungen der zu σ parallelen Zwischenebenen gegeben und erschöpft werden durch die Stellungen der aus σ durch φ_0 hindurchziehenden Ebenen, deren Menge wir uns auch in diesem Falle noch durch $m(Z)$ zu bezeichnen erlauben wollen.

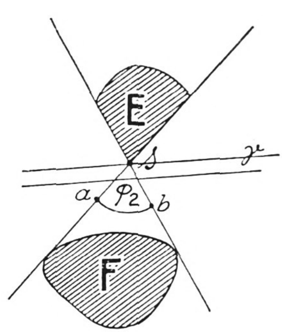

Fig. 3

Es ist klar, daß irgend zwei Mengen $m(Z)$ von verschiedener Projektionsrichtung β, abgesehen von den beiden Z_0', lauter Z verschiedener Stellung enthalten und daß — dies ist für uns wichtiger — die möglichen Stellungen der Z durch die aus den sämtlichen $m(Z)$ gebildeten Menge $M(Z)$ erschöpft werden.

Aus den unabgeschlossenen Mengen $m(Z)$ werden abgeschlossene $m'(Z)$, wenn man zu jedem $m(Z)$ die Grenzebenen J_1, J_2 hinzunimmt.

Wir können die J als „uneigentliche Zwischenebenen" bezeichnen, wenn wir darunter Ebenen verstehen, welche die inneren Punkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ auf verschiedenen Seiten von sich liegen haben, aber Randpunkte von $\mathfrak{E}$ oder $\mathfrak{F}$, oder auch von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ enthalten, somit von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ nicht vollständig getrennt sind. Analog sind „uneigentliche Zwischengrade" von E und F zu definieren.

In der Gesamtmenge $M'(Z)$ der $m'(Z)$ ist jede mögliche Stellung der Z und der Gemeinstützebenen J einmal vertreten — nur die Stellung Z_0 kann mehrfach vorkommen — und andere Stellungen kommen in $M'(Z)$ nicht vor. Daß auch $M'(Z)$ abgeschlossen ist, wird erst im folgenden vollständig evident werden.

Wir bilden jetzt jede Ebene von $M'(Z)$ auf eine Kugeloberfläche K ab, indem wir ihr den Berührpunkt z einer zu Z parallelen Berührebene von K entsprechen lassen. Wir bekommen zunächst für jedes Z zwei gleichberechtigte, einander diametral gegenüberliegende Berührpunkte, also doppeldeutige Abbildungen, deren Symbole wir mit dem Index 2 auszeichnen. Die Abbildung $M_2'(z)$ von $M'(Z)$ bauen wir mittels der Abbildungen $m_2'(z)$ der $m'(Z)$ auf; $m_2'(z)$ muß auf dem größten Kreise $\varkappa_\beta$ liegen, in den sich die Ebenen der Projektionsrichtung β abbilden, und besteht aus zwei einander diametral gegenüberliegenden einheitlich zusammenhängenden Bögen vom Ausmaß $\varphi_0 < \pi$, die keinen Punkt miteinander gemein haben. Die Abbildungspunkte z_0 und z_0' von Z_0 müssen nach Früherem zu jedem $m_2'(z)$ gehören. Wir gelangen zu eindeutigen Abbildungen $m'(z)$ und $M'(z)$, indem wir diejenigen Bögen der $m_2'(z)$ wählen, die z_0 enthalten. $M'(z)$ baut sich nun aus den $m'(z)$ offenbar so auf, daß wir behaupten können:

Die Figur $M'(z)$ hat mit allen durch z_0 gehenden größten Kreisen $\varkappa_\beta$ nur je einen zusammenhängenden Bogen gemein.

Da aber Z_0 ein ganz beliebiges Z war, so folgt unter Anwendung eines abkürzenden Ausdrucks:

$M'(z)$ verhält sich gegenüber allen größten Kreisen, die einen Punkt z mit ihr gemein haben, „eintriftig."

Der Nachweis, daß hier unter den z auch die Abbildungspunkte i der „uneigentlichen" Zwischenebenen mit einbegriffen werden dürfen, $M'(z)$ also gegenüber treffenden größten Kreisen bedingungslos eintriftig ist, macht leider einige Umstände.

Für eine Richtung β des nun in einer Ebene J zu denkenden Büschels B projiziert sich offenbar die Ebene J selbst immer in eine innere Gemeinstützgerade δ von E und F. Im allgemeinen werden die Berührstellen von E und F auf δ und damit auch E und F selbst voneinander getrennt liegen, so daß eine zweite innere Gemeinstützgerade gesichert ist, deren Winkel mit δ ganz die Rolle von φ und φ_0 übernehmen. Der einzige Unterschied vom Verhalten einer Zwischenebene ist der, daß δ nicht, wie ζ, ein innerer Strahl, sondern ein Schenkel des Winkels φ (und φ_0) ist, so auch der dem J in $M'(z)$ entsprechende Punkt i nicht ein innerer, sondern ein Endpunkt des Bogens auf $\varkappa_\beta$ ist, der den durch φ_0 ziehenden Ebenen der Richtung β entspricht.

Mindestens eine Richtung β macht eine Ausnahme, da J mindestens einen Punkt e und einen davon getrennten f aufweist. In der Richtung ef erzeugt liegen E und F nicht mehr getrennt, sondern haben den Schnittpunkt g von δ und ef gemein. Von g gehen zwei Halbtangenten an E und F; wir können sie — E sei wieder oben, F unten, δ wagrecht gedacht — als linke L_e, L_f und rechte R_e, R_f unterscheiden. Durch einen Grenzübergang von den Sekanten her läßt sich leicht zeigen, daß L_e, ebenso R_e, wie E über, höchstens auf δ liegt. Entsprechend liegen L_f und R_f unter oder auf δ. Die Gerade δ ist unter allen Umständen eine uneigentliche Zwischengerade U. Gibt es noch weitere? Sicher muß jedes U durch g gehen. Denn läge g auf einer bestimmten Seite von U, to täte das auch ein kleiner um g geschlagener Kreis, und in und mit dem Kreise würden unendlich viele Punkte von E und F auf der nämlichen Seite von U liegen, was auch bei einer uneigentlichen Zwischengeraden nicht sein darf. Sicher darf ein U auch weder in den oberhalb δ liegenden Winkel $L_e R_e$, noch in den unterhalb liegenden $L_f R_f$ eindringen, denn dann hätte es Punkte eines Ovals zu verschiedenen Seiten liegen, was der Definition eines U widerspricht. Wenn aber eine Gerade aus g in einen dieser Winkel eindringt, so dringt sie auch in seinen Scheitelwinkel $L'_e R'_e$, bzw. $L'_f R'_f$ ein, und umgekehrt. Wir können daher den Winkel $L_f R_f$ sozusagen über δ hinüberwerfen, indem wir ihn durch $L'_f R'_f$ ersetzen, und brauchen dann bloß die über δ liegende Hälfte der Figur zu studieren, wodurch die entscheidenden Verhältnisse leichter vorstellbar werden. Die Winkel $L_e R_e$ und $L'_f R'_f$ können nun einen Winkelteil gemein haben und dadurch zu einem einzigen zusammenhängenden Winkel ($\leqq \pi$) „belegter" — d. h. in mindestens eins der Ovale eindringender — Strahlen werden. Möglicherweise aber haben sie auch keinen Teil gemeinsam, sondern einen mittleren Winkel μ von unbelegten Strahlen zwischen sich. Ein Strahl aus g durch μ kann aber auch kein U sein. Denn weil er die Winkel $L_e R_e$ und $L'_f R'_f$ zu verschiedenen Seiten liegen hat, hat er $L_e R_e$ und $L_f R_f$, somit auch E und F auf der nämlichen Seite liegen, ist sicher kein U und auch kein Grenzstrahl von Zwischenstrahlen. Das gilt auch noch für den Fall, daß μ Null wird, auch der den beiden Winkeln gemeinsame Schenkel, auf den sich μ dann zusammenzieht, kann kein U sein. Uneigentliche Zwischenstrahlen können also höchstens noch in den oberhalb δ liegenden, von g nach rechts und links ziehenden Flügelwinkeln liegen; der linke χ_l liegt zwischen dem linken Halbstrahl von δ und dem weiter links gelegenen der beiden Winkel $R_e L_e$, $R'_f L'_f$, der rechte χ_r zwischen dem rechten Halbstrahl von δ und dem weiter rechts gelegenen der beiden ebengenannten Winkel. Jeder g-Strahl X durch χ_l oder χ_r ist nun in der Tat ein U; denn da X die Winkel $L_e R_e$ und $L'_f R'_f$ auf der nämlichen Seite hat, kommen $L_e R_e$ und $L_f R_f$ und damit E und F — abgesehen von g — auf verschiedene Seiten von X zu liegen. Die Ergebnisse übertragen sich nun auf die die X projizierenden Ebenen $\mathfrak{X}$ der Richtung ef. Auch erweisen sich die $\mathfrak{X}$ sämtlich als Grenzebenen eigentlicher Zwischenebenen. Ein $\mathfrak{X}$ hat mit $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, sie berührend, allgemein gesprochen Ovalgebiete O_e und O_f gemein, und zwar im allgemeinen uneigentliche (Punkte oder Strecken, die sich in g projizieren). O_e und O_f sind getrennt, weil $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ es sind, haben also sicher eine eigentliche Zwischengerade γ. Um γ läßt sich $\mathfrak{X}$ in eine Nachbarlage $\mathfrak{X}'$ so drehen, daß sich gleichzeitig die $\mathfrak{E}$ berührende Halbebene von $\mathfrak{E}$ und die $\mathfrak{F}$ berührende Halbebene von $\mathfrak{F}$ entfernt, weil $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zu verschiedenen Seiten von $\mathfrak{X}$ liegen. $\mathfrak{X}'$ hat dann mit den Körpern keinen Punkt mehr gemein, ist ein Z und liegt auch $\mathfrak{X}$ so nahe, wie man will, so daß $\mathfrak{X}$ als Grenzlage der $\mathfrak{X}'$ erscheint.

Das Wichtigste für uns aber ist, daß die durch χ_l und χ_r ziehenden X, und mit ihnen die $\mathfrak{X}$, einen einzigen zusammenhängenden Winkel χ bilden, der zur Erscheinung kommt, wenn man den Winkeln χ_l und χ_r die Scheitelwinkel χ_l' und χ_r' hinzufügt. Daher ergeben die $\mathfrak{X}$, der Menge $M'(Z)$ beigerechnet, bei der Abbildung auf K auch nur einen einzigen (i enthaltenden) zusammenhängenden Kreisbogen, und der größte Kreis $\varkappa_{ef}$, in den sich die durch ef gehenden Ebenen abbilden, hat mit $M'(z)$ nur ein Stück gemein, genau wie die größten Kreise, die durch ein z gehen.

Nach diesem Ergebnis haben wir keinen zwingenden Anlaß, hier auf eine genauere Beschreibung der regulären und möglichen singulären Vorkommnisse bei unserer Abbildung einzugehen. Nur einige Andeutungen.

Die Winkel χ_l, χ_r, χ können natürlich Null werden, anders ausgedrückt, sich auf δ zusammenziehen, ja es ist das sogar der reguläre Fall, in welchem $\varkappa_{ef}$ die Figur $M'(z)$ in dem einzigen Punkte i berührt. Liegt δ innerhalb des von Null verschiedenen Winkels χ, so ersieht man leicht, daß $\varkappa_{ef}$ die Figur $M'(z)$ nach einem Bogen (eines größten Kreises) von endlicher Länge berührt[1]), für den i ein innerer Punkt ist. Sind in J mehrere Richtungen ef vorhanden, so müssen ihre Richtungen *einen* zusammenhängenden Winkel füllen, und $M'(z)$ erhält eine „Ecke", durch die größte Kreise $\varkappa$ von K hindurchlaufen, die auch nur *einen* zusammenhängenden Winkel bilden, und sämtlich als Stützkreise der sphärischen Figur bezeichnet werden können usw. Weil die Ebenen $M'(Z)$ sich in Punkte von $M'(z)$ abbilden, herrscht natürlich auch in allen abgeleiteten Eigenschaften unserer beiden Mannigfaltigkeiten die Beziehung der Polarität.

Nachdem für $M'(z)$ die Eintriftigkeit nachgewiesen ist, fragen

[1]) Das entspricht dem Fall bei einem ebenen Oval — $M'(z)$ wird als ein sphärisches nachgewiesen werden — daß sein Umfang eine endliche gerade Strecke enthält.

wir uns unwillkürlich, ob wir die Figur nicht als sphärisches Oval bezeichnen dürfen, d. h. als eine Figur auf der Kugel, die vom Mittelpunkt c der Kugel aus in ein ebenes Oval projiziert werden kann, oder — was auf dasselbe hinausläuft — deren Projektionskegel von c aus ein Ovalkegel ist. Diese projektive Beziehung gibt Aufschluß, wie sich die definierenden Eigenschaften der ebenen Ovale auf die sphärischen übertragen. Die Eintriftigkeit gegenüber Geraden einer Ebene geht in der Tat in Eintriftigkeit gegenüber den größten Kreisen der Kugelfläche über. Wie übersetzen sich Endlichkeit und Abgeschlossenheit? Letztere offenbar wieder in Abgeschlossenheit. Die Endlichkeit freilich auch wieder in Endlichkeit, aber das ist auf der selbst völlig endlichen Kugelfläche keine distinktive Eigenschaft der Teilfiguren mehr.

Der Endlichkeit beim ebenen Oval entspricht beim sphärischen die Eigenschaft, daß es ganz im Innern einer Halbkugelfläche H liegen, also ganz auf der einen Seite eines größten Kreises η, der ein solches H begrenzt, sich befinden muß. Indem wir η als „Kreisschranke" bezeichnen, stellen wir somit die Forderung auf: Ein sphärisches Oval muß eine Kreisschranke haben. Sobald eine sphärische Figur Projektion eines ebenen Ovals aus c ist, erweist sich sofort der Kreis, nach dem die Parallelebene durch c zur Ovalebene die Kugelfläche schneidet, als Kreisschranke; und umgekehrt, eine abgeschlossene eintriftige Figur auf der Kugel, die eine Kreisschranke η hat, projiziert sich auf eine zu η parallele Ebene sicher als endliche, abgeschlossene, eintriftige Figur, somit als Oval.

Mittels der Kreisschranke läßt sich nun auch die Eigenschaft, die ich bei den ebenen Ovalgebieten als „Streckeneigenschaft" bezeichne:

„Die endliche Verbindungsstrecke zwischen zwei Punkten eines Ovalgebietes gehört ganz zum Ovalgebiet"

für sphärische Ovale wie folgt ausdrücken:

Derjenige Bogen des größten Kreises zwischen zwei Punkten p, q eines sphärischen Ovals, der mit diesem auf derselben Seite — wir nennen das „im Innern" — der Kreisschranke liegt[1]), somit ersichtlich der kürzere der

[1]) Wer sich bezüglich des Umstandes, daß einer der beiden Bögen pq

beiden in Betracht kommenden Verbindungsbögen und $< \pi$ ist, gehört ganz zum Oval.

Wir bezeichnen ihn als „Hauptverbindungsbogen“ oder „Hauptverbindungsstrecke“ (auf der Kugelfläche) der beiden Punkte und symbolisieren ihn mit $\frown{pq}$, den anderen Bogen mit $\smile{pq}$.

Wie beim ebenen so sind auch beim sphärischen Oval die *Streckeneigenschaft und die Eintriftigkeit einander äquivalent*. Benützt man die eine Eigenschaft zur Definition, so ergibt sich die andere immer als unmittelbare Folgerung aus der Definition.

Daraus, daß für ein sphärisches Oval nicht nur eine, sondern unendlich viele Kreisschranken vorhanden sind, ergeben sich keine Widersprüche, worauf wir indessen hier nicht eingehen.

Soviel von sphärischen Ovalen im allgemeinen. Nun zurück zu $M'(z)$! Läßt sich für $M'(z)$ eine Kreisschranke nachweisen? Sehr einfach: Man bilde nur ein Ebenenbüschel mit einer Axe ef — wo e und f jetzt innere Punkte von $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ sein sollen — nach unserer Vorschrift, diesmal doppeldeutig, auf die Kugel ab, so ergibt sich ein größter Kreis ϑ, auf dem kein z und auch kein i liegen können, weil in Richtung ef kein Z oder J laufen kann, wofür schon früher ein Beweis gegeben wurde, der nur wegen der J einer leicht zu gebenden Ergänzung bedarf. Wenn aber $M'(z)$ von ϑ nicht geschnitten und berührt wird, muß $M'(z)$, als einheitlich zusammenhängende Figur, ganz auf einer Seite von ϑ im Innern der betreffenden Halbkugel liegen. Der einheitliche Zusammenhang von $M'(z)$ erhellt allein schon aus der Gemeinsamkeit des Punktes z_0 für alle Aufbaubögen $m'(z)$.

So fehlt nur noch der Nachweis der Abgeschlossenheit, um $M'(z)$ vollkommen als sphärisches Oval zu charakterisieren. Damit, daß $M'(z)$ sich aus abgeschlossenen Bögen $m'(z)$ durch z_0 aufbaut, ist natürlich noch nichts bewiesen. Nachdem aber auch durch jeden anderen Punkt z nur abgeschlossene Bögen laufen,

---

diese Bedingung sicher erfüllt, nicht auf die Anschauung verlassen will, schließe wie folgt: Ein Bogen pq kann η nur nach einer geraden Anzahl von Punkten schneiden. Da aber der ganze Kreis $\frown{pq} + \smile{pq}$ den Kreis η nur nach zwei Punkten schneidet, ist nur die eine Möglichkeit, daß der eine Bogen, sei's $\smile{pq}$, den Kreis η in zwei, der andere, $\frown{pq}$ in gar keinem Punkte schneidet, also ganz auf einer Seite von η liegt, und zwar auf der, wo mit p und q die ganze Figur liegt.

wird niemand mehr an der Abgeschlossenheit von $M'(z)$ zu zweifeln wagen. Zu völliger Beruhigung aber kann folgender indirekter Beweis dienen:

Gäbe es einen Punkt u, der Häufungspunkt von Punkten der Figur wäre, ohne ihr selbst anzugehören, so könnte er weder mit z_0 noch seinem Gegenpol z_0' zusammenfallen, es müßte also durch ihn ein ganz bestimmter Halbmeridian $\widehat{z_0 u z_0'} \equiv \mu$ gehen, und zu μ müßte ein ganz zu M' gehöriger endlich ausgedehnter Teilbogen $\widehat{z_0 z_u}$ mit Einschluß seines Endpunktes z_u gehören; denn z_0 war innerer Punkt jedes durch ihn gehenden abgeschlossenen Bogens $m'(z)$. Der Punkt z_u müßte auf μ zwischen z_0 und u liegen, weil sonst u zu $\widehat{z_0 z_u}$ und $M'(z)$ gehören würde. Sicher ist also u nicht Häufungspunkt von Figurpunkten, die auf μ liegen, er könnte es nur für seitlich herandringende Figurpunkte sein. Es sei nun t ein Punkt auf μ zwischen u und z_u, der also sicher nicht mehr zu M' gehört, τ sei ein von μ verschiedener größter Kreis durch t, etwa der zu μ senkrechte, $\bar{\tau}$ der etwa auf ihm liegende, abgeschlossene, zu M' gehörige Teilbogen. Weiter sei ω ein kleiner Kreis um den Mittelpunkt u, der $\bar{\tau}$ nicht schneidet, in dem unendlich viel Figurpunkte h_ν liegen müssen, die u zum Häufungspunkte haben. Jedes $\widehat{z_0 h_\nu}$ schneidet τ in einem Punkte t_ν, der zu M' gehört, weil nach dem Streckensatz der ganze Bogen $\widehat{z_0 h_\nu}$ zu M' und t_ν somit zu $\bar{\tau}$ gehören muß. Wie die h_ν den Punkt u, haben die t_ν den Punkt t zum Häufungspunkt, der somit — wegen der Abgeschlossenheit von $\bar{\tau}$ — ein Punkt von $\bar{\tau}$ und M' sein müßte, was t doch nicht ist.

Der Widerspruch zeigt, daß die Annahme eines Punktes u ausgeschlossen und $M'(z)$ abgeschlossen ist.

Da wir nun sicher sind, in $M'(z)$ ein sphärisches Oval vor uns zu haben, das von c aus auf einer passenden Ebene sich in ein ebenes projiziert, so ist der Projektionskegel der Figur aus c ein Ovalkegel O, die radialen Projektionsstrahlen stehen senkrecht auf den Tangentialebenen der projizierten Punkte z und somit auf den Z. Der Normalenkegel auf die Z von irgendeinem andern Punkte aus ist aber kongruent zu O. Hiemit ist nun der Satz bewiesen, daß die aus irgendeinem Punkt auf die Zwischenebenen zweier eigentlichen Eikörper gefällten Normalen einen Ovalkegel erfüllen[1].

[1]) Schon oben wurde einmal von Ebenen D gesprochen. Wir wollen

Wir weisen noch auf eine andere Einkleidung des Satzes hin. Jedes Z läßt sich parallel mit sich selbst stetig nach oben oder unten verschieben, bis es in einer Lage Z_e bzw. Z_f zum ersten Male Stütze von 𝔈 bzw. 𝔉 wird. Die Punkte oder Punktmengen e_z bzw. f_z, welche Z_e und Z_f mit 𝔈 und 𝔉 gemein haben, machen auf der Oberfläche von 𝔈 und 𝔉 Figuren E_z, F_z aus, deren Ränder bedingt werden durch die Doppelgemeinstützen J und deren Berührpunkte oder Berührpunktmengen e_i, f_i. Die J sind sozusagen Z, die mit ihrem Z_e und Z_f zusammenfallen. Ersichtlich ist es nur eine andere Form unseres Hauptsatzes, wenn wir behaupten:

Die Figuren E_z, F_z bilden sich auf die Kugel in sphärische Ovale ab, wenn bei der Abbildung die Berührpunkte paralleler Stützebenen einander zugeordnet werden, und zwar paralleler Stützebenen, die an dem betr. Körper und der Kugel immer nach derselben Seite oder immer nach entgegengesetzten Seiten liegen. Die Abbildungsfiguren K_e und K_f werden dann kongruent und diametral zueinander.

Bei stetig doppelt gekrümmten Oberflächen von 𝔈 und 𝔉 behalten E_z und F_z — die nun auch umgekehrt als Abbildungen sphärischer Ovale auf die Eiflächen bezeichnet werden können —

jetzt unter dem Symbol D ganz allgemein eine „Gemeinschnittebene", d. h. eine sowohl 𝔈 als 𝔉 schneidende Ebene verstehen. Dann lassen sich recht analoge Betrachtungen wie an die Z, φ_0, $m(Z)$, $m'(Z)$, $M'(Z)$, $m(z)$ usw. anknüpfen an die D, φ, $m(D)$, $m'(D)$, $M(D)$, $M'(D)$, $m(d)$ usw. Trotzdem läuft alles schließlich anders. Die $m'_2(d)$ liegen auf den nämlichen größten Kreisen wie die $m'_2(z)$, aber die Schnittpunkte z_0, z'_0 dieser Kreise gehören diesmal nicht zur Abbildungsfigur $M'_2(d)$, die deshalb nicht aus zwei sphärischen Ovalen, sondern einer Ringfläche auf der Kugel besteht. Dies erkennt man auch daran, daß $M_2(z)$ und $M'_2(d)$ oder auch $M'_2(z)$ und $M_2(d)$ sich zur ganzen Kugelfläche zusammensetzen müssen, da durch die Stellungen der Z, J und D die sämtlichen möglichen Ebenenstellungen erschöpft werden. Die J können ebensowohl als uneigentliche D wie als uneigentliche Z betrachtet werden. $M'(d)$ enthält offenbar die Kreisschranken η von $M'(z)$; und ein einziger solcher Kreis η reicht hin, um darzutun, daß $M'(d)$ — d. h. eine Hälfte von $M'_2(d)$ — kein sphärisches Oval sein kann. Denn zu $M'(d)$ müßte eine Hälfte von η gehören, welche aber doch nicht ins Innere eines größten Kreises, als einer Kreisschranke von $M'(d)$, gebracht werden kann, auch wenn man, unter Aufopferung der Abgeschlossenheit, dem Halbkreis den einen Endpunkt nimmt.

auch für das Auge eine gewisse Ähnlichkeit mit den sphärischen Ovalen. Man muß aber nicht meinen, daß das ganz allgemein so ist. Dadurch, daß ein J die Körper $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ nach ganzen Ovalen, auch Polygonen, berühren kann und die Ein-Eindeutigkeit der Punktbeziehungen am Rande der Kugel- und der Eiflächenfiguren gestört wird, kann die Begrenzung von E_z und F_z zackige Gestalt annehmen.

Bei einem regulären Dodekaëder $\mathfrak{D}$ schneiden sich die von den Eckpunkten a_i einer Seitenfläche (a_i) ausgehenden dritten Kanten α_i $(i = 1, 2, 3, 4, 5)$ und die von den Kanten $\overline{a_i a_{i+1}}$ $(a_6 \equiv a_1)$ der Fläche (a_i) ausgehenden zweiten Seitenflächen P_i verlängert alle in einem Punkte s. Bei einem zweiten regulären Dodekaëder sollen die Bezeichnungen $\mathfrak{D}'$, a_i', α_i', P_i', s' analoge Bedeutung haben.

Man kann $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ einander perspektivisch so gegenüberstellen, daß $s \equiv s'$ wird, zwischen den Ebenen der Flächen (a_i) und (a_i') liegt, und die Kanten α_i und α_i' immer in eine Gerade γ_i, die Flächen P_i und P_i' immer in eine Ebene E_i zu liegen kommen.

Betrachtet man dann $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{D}'$ als $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$, so bestehen die J aus den fünf E_i und fünf Teilbüscheln, deren Ebenen je durch ein γ_i gehen und diese J bilden sich auf der Kugel in ein aus Bögen größter Kreise gebildetes reguläres Fünfeck ab, dessen Ecken den E_i, dessen Seiten den Teilbüscheln entsprechen. Ersichtlich besteht hier E_z aus dem Fünfeck $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5$ nebst den P_i, also aus einer fünfzackigen Figur, und F_z ist ähnlich zu E_z.

Trotz ihrer Abbildbarkeit in sphärische Ovale werden wir die Flächenkappen E_z und F_z nicht als Ovale auf den Eiflächen bezeichnen. Bei der Übertragung von Begriffen und Sätzen der Ebene auf Flächen haben ja den Geraden die geodätischen Linien zu entsprechen, nicht, wie hier, gewisse Berührlinien von Stützenzylindern.

Bei der Kugel ist es ausnahmsweise so, daß diese Berührlinien mit den geodätischen Linien in den größten Kreisen zusammenfallen.

Wir wollen nun sehen, wie weit unser Satz auch für degenerierende Eikörper $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{F}$ Geltung behält.

Wir lassen also nun für $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ auch Punkte, Strecken und ebene Ovalgebiete zu.

Wenn nun diese degenerierenden Eikörper nicht in einer Ebene liegen, so zeigt genauere Untersuchung, daß auch jetzt $M'(z)$ immer ein richtiges sphärisches Ovalgebiet wird; z. B. im Fall zweier Strecken im Raume auf sich überkreuzenden Geraden ein ovales Viereck, das von Bögen größter Kreise begrenzt wird.

Bemerkenswert ist, daß alle Möglichkeiten der Gestaltung von $M'(z)$ und dem zugehörigen Normalenkegel, wie sie aus eigentlichen Eikörpern $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ ableitbar sind, auch schon bei zwei Ovalen im Raume erzeugt werden, wie ich an anderer Stelle zu beweisen gedenke.

Wenn dagegen $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ in einer Ebene P liegen, sind die einzigen Richtungen, parallel zu denen keine Z laufen können, die Richtungen der Strahlen eines einzigen Winkels ψ in P. $M'(z)$ wird daher ein Kugelzweieck L_0 zwischen zwei größten Kreisen, das Supplementarzweieck zu dem Zweieck L, in welches sich die durch die ψ-Strahlen gehenden Ebenen abbilden.

Auf L_0 ist eine Ebenenstellung, nämlich die von P, durch die Tangentialebenen der Ecken doppelt vertreten. Dies deutet darauf hin, daß P — in jedem das Zweieck durchziehenden, die Ecken verbindenden (größten) Halbkreise zwei für gewöhnlich verschiedene J, ein J_1 und ein J_2, vertritt, die hier ausnahmsweise zusammenfallen.

Unser Satz erleidet hier eine Ausnahme, insofern das Kugelzweieck $M'(z)$ kein richtiges sphärisches Oval mehr ist. Es hat keine Kreisschranke, die Eintriftigkeit ist durch die Zweiheit der Eckpunkte gestört, und läßt man den einen Endpunkt weg, um die Eintriftigkeit herzustellen, so wird wieder die Abgeschlossenheit aufgegeben, ohne daß eine Kreisschranke gewonnen würde. Immerhin: Das Kugelzweieck ist noch eine Grenzfigur streng definitionsgemäßer Ovale.

Wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ nicht nur in einer Ebene, sondern in einer Geraden liegen, also aus zwei Punkten, oder einer Strecke und einem Punkt auf ihrer Verlängerung, oder aus zwei Strecken auf einer Geraden bestehen, so wird der Zweieckswinkel zu π, das Zweieck zur Halbkugelfläche, die natürlich auch kein richtiges sphärisches Oval, nur eine Grenzfigur von sphärischen Ovalen ist. —

Es ist hier noch etwas zu sagen mit Bezug auf die zweite Einkleidungsform unseres Satzes. Wenn $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ zu Punkten oder Strecken entarten, ist natürlich an ihnen überhaupt kein Flächenstück E_z oder F_z wie an eigentlichen Eiflächen vorhanden. Aber die flächenhafte Ausbreitung der Berührpunkte der zu den Z parallelen Stützebenen auf $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ ist für die 2. Form des Satzes auch nicht wesentlich; es ist nur, weil sie im allgemeinen erfolgt, naheliegend und bequem, sie zum Ausdruck des Satzes zu benutzen. Im Grund handelt es sich immer um aufeinander bezogene Ebenengebilde; und bei den degenerierenden Eikörpern bestehen diese aus Teilen von Ebenenbündeln oder Ebenenbüscheln, die sich an die Punkte, Strecken oder an den Rand der Ovale anhängen, in welche $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ entartet sind. Im Falle zweier sich überkreuzenden Strecken $\mathfrak{E} \equiv \overline{e_1 e_2}$, $\mathfrak{F} \equiv \overline{f_1 f_2}$ macht man sich diese Ebenen am leichtesten vorstellig als Stützebenen an die zwei Keile, die von den Schneiden $\overline{e_1 e_2}$ und $\overline{f_1 f_2}$ ausgehen und durch Erweiterungen der Seitenflächen des endlichen Tetraëders $e_1 e_2 f_1 f_2$ begrenzt werden.

Unser Satz kann sofort verallgemeinert werden. Man weiß, daß zu jeder im Endlichen liegenden Punktmenge m des Raumes ein kleinster m enthaltender Eikörper μ gehört, und daß m und μ sehr viele Eigenschaften gemein haben. Ebenso haben zwei solche Punktmengen m_1, m_2 sehr vieles gemeinsam mit ihren kleinsten Eikörpern μ_1, μ_2. Zum Beispiel ist das System der Z — sei es unter Weglassung, sei es unter Zuziehung der J — für m_1 und m_2 genau dasselbe, wie für μ_1 und μ_2.

Daher gilt:

Wenn zwei aufs Endliche beschränkte Punktmengen im Raume Zwischenebenen haben, füllen die von einem Punkte aus auf die Zwischenebenen gefällten Lote einen Ovalkegel.

Nur wenn die Punktmengen in eine einzige Ebene zu liegen kommen, schneidet dieser Kegel auf einer Kugel mit dem Kegelscheitel als Mittelpunkt ein Kugelzweieck, evtl. eine Halbkugel aus, ist also kein eigentliches Oval mehr, sondern nur eine Grenzfigur von Ovalkegeln.

Auf eine weitere mögliche Verallgemeinerung sei hier nicht eingegangen.