Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1930. Heft II

Mai-Julisitzung

München 1930
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differenzengleichungen und Systemen von solchen.

Von **F. Lettenmeyer** in München.

Vorgelegt von O. Perron in der Sitzung am 10. Mai 1930.

§ 1. Stellung der Aufgabe.

In der folgenden Arbeit handelt es sich um Differenzengleichungssysteme der Form

$$x_i(t+1) = f(t) \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, x_k(t) + \varphi_i(x_1(t), \ldots, x_n(t), t), \qquad (i = 1, \ldots, n), \tag{I}$$

bei denen das asymptotische Verhalten der Lösungen für reell und ganzzahlig gegen $+\infty$ wachsendes t untersucht werden soll.

Wir beschränken uns hier auf folgende Fragestellung:

Die Existenz einer Lösung sei vorausgesetzt. Was läßt sich unter gewissen Voraussetzungen A über (I) von dem asymptotischen Verhalten dieser Lösung aussagen?

Voraussetzungen A über (I).

Die unabhängige Variable t sei auf reelle ganzzahlige Werte beschränkt[1]).

Für die x_i, die Konstanten a_{ik} und die Funktionen φ_i sind beliebige komplexe Werte zugelassen; jedoch seien die a_{ik} nicht alle gleich 0.

$f(t)$ sei eine für alle ganzen $t \geqq t_0$ definierte und *positive* reelle Funktion.

Für einen gewissen Bereich $\mathfrak{B}$ der x_i und alle ganzen $t \geqq t_0$ sei jede Funktion φ_i definiert und habe die Eigenschaft:

---

[1]) Dies gilt ausnahmslos durch die ganze Arbeit und wird später nicht mehr jedesmal erwähnt werden.

Bei beliebig vorgegebenem $\varepsilon > 0$ ist

$$|\varphi_i| \leq \varepsilon f(t) \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

für alle $t > T_\varepsilon$ und alle Wertsysteme (x_i) eines Teilbereiches $\mathfrak{B}_\varepsilon$ von $\mathfrak{B}$. (Dabei kann o. B. d. A. bei $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ der Bereich $\mathfrak{B}_{\varepsilon_2}$ als Teilbereich von $\mathfrak{B}_{\varepsilon_1}$ angenommen werden. Der Durchschnitt aller $\mathfrak{B}_\varepsilon$ darf leer sein; vgl. hiezu Annahme I S. 78).

Die Resultate der vorliegenden Arbeit samt den Beweisen sind ganz analog den Resultaten samt Beweisen bei der entsprechenden Fragestellung über *Differentialgleichungssysteme*, welche ich im vorigen Jahrgang dieser Berichte mitgeteilt habe[2]). Beide Arbeiten sind gleich gegliedert und entsprechende Sätze mit gleichen Nummern versehen; doch sind in der vorliegenden Arbeit solche Bemerkungen, Beweise und Rechnungen weggelassen, welche wörtlich oder nahezu wörtlich aus der früheren Arbeit übernommen werden können. Diese Teile oder Stellen der früheren Arbeit sind im folgenden angegeben, und die Darstellung ist so gehalten, daß die Kenntnis nicht zitierter Teile der früheren Arbeit nicht erforderlich ist.

Für $f(t)$ sind im Gegensatz zu der früheren Arbeit Nullstellen nicht zugelassen; im übrigen gilt wie l. c. S. 202f., daß die Einführung von $f(t)$ keine Erschwerung gegenüber dem Fall $f \equiv 1$ bedeutet[3]), daß damit aber Aussagen über Systeme möglich

[2]) Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von Differentialgleichungen und Differentialgleichungssystemen. Diese Sitzungsberichte, Jahrgang 1929, S. 201—252.

[3]) Dieser Fall wurde zuerst von Herrn O. Perron behandelt in: Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. 161 (1929), S. 41—64.

Die Resultate der vorliegenden Arbeit sind auch für $f \equiv 1$ durchweg neu; Vorgänger hatten lediglich Satz 3, der mit lim sup statt lim bekannt war, und Satz 6, von dem ein Teil in dem Spezialfall bekannt war, daß werden, deren rechte Seiten von der Form wie l. c. S. 203 sind[4]).

Zur Untersuchung von (I) bedient man sich einer linearen Transformation in ein einfacher gebautes System (II). Für die Behandlung des Systems (II) wird die von Herrn Perron[5]) angewandte Methode in vereinfachter Form benützt werden. Für die Rückübertragung der Resultate auf (I) werden dieselben Matrizen benützt, welche in § 3 der früheren Arbeit konstruiert wurden; sie liefern dem Problem besonders angepaßte lineare Transformationen, nämlich solche, welche erlauben, Aussagen über nur einige Komponenten einer Lösung von (II) auf die entsprechenden Komponenten der zugehörigen Lösung von (I) zu übertragen. Damit wird sich dann der Fall charakteristischer Wurzeln mit teilweise gleichen absoluten Beträgen behandeln lassen.

§ 2. Über die Bestimmtheit der Konstanten a_{ik} und der Funktion f im System (I).

Die Konstanten a_{ik} und die Funktion f sind durch die Voraussetzungen A über die rechten Seiten von (I) *nicht* eindeutig festgelegt. Man kann nämlich leicht die a_{ik} und f in der Weise abändern, daß bei Hineinnahme der die Abänderung korrigierenden Zusatzglieder in die Funktionen φ_i die so entstehenden neuen Funktionen dieselben Voraussetzungen wie die ursprünglichen Funktionen φ_i erfüllen. Es läßt sich sogar unter gewissen Zusatzvoraussetzungen zu A die allgemeinste derartige Abänderung der a_{ik} und der Funktion f explizit angeben.

Da diese Betrachtungen sich nur auf die rechten Seiten von (I) beziehen, also unabhängig davon sind, ob diese rechten Seiten gleich $x_i(t+1)$ oder gleich $x'_i(t)$ gesetzt werden, kann der § 2

---

sämtliche charakteristischen Wurzeln *verschiedene* absolute Beträge haben (insbesondere sei darauf hingewiesen, daß in Satz 6 die Limesbeziehung für die Funktion $x(t)$ selbst, nicht nur für $|x(t)|$ aufgestellt ist). Im Fall der Poincaré-Perronschen Differenzengleichung (§ 9) gilt das Analoge von den Sätzen 10 und 11.

[4]) Man dürfte in der vorliegenden Arbeit auch $f(t)$ als komplexwertig zulassen; es wäre dann lediglich von § 5 an stets $|f|$ statt f zu schreiben.

[5]) Siehe Fußnote 3.

der in Fußnote 2 zitierten Arbeit hier unverändert übernommen werden; es tritt hier lediglich eine Vereinfachung dadurch ein, daß Nullstellen von $f(t)$ ausgeschlossen sind.

§ 3. Sätze über Matrizen.

Der § 3 der in Fußnote 2 zitierten Arbeit ist hier wörtlich zu übernehmen. Er enthält insbesondere **Satz 1** und **Satz 2**, welche hier nicht nochmals abgedruckt, aber unter diesen Nummern später zitiert werden sollen.

§ 4. Transformation des Systems (I).

Die zur Anwendung der Sätze 1 und 2 eventuell nötige Umordnung der Matrix (a_{ik}) kann von vornherein dadurch erreicht werden, daß im System (I) die Variabeln $x_1, \ldots, x_n$ geeignet umnumeriert werden. Vgl. hiezu l. c. § 4, 1. und 2. Absatz.

Die lineare Transformation

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, y_k, \tag{1}$$

wo die b_{ik} die in § 3 bestimmten Zahlen sind, führt das System (I) über in

$$\begin{aligned} y_i(t+1) = \varrho_i f(t)\, y_i(t) + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} c_{ik} f(t)\, y_k(t) \\ + \psi_i(y_1(t), \ldots, y_n(t), t), \quad (i = 1, \ldots, n); \end{aligned} \tag{II}$$

dabei sind nach § 3 $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die charakteristischen Wurzeln der Matrix (a_{ik}) in irgend einer vorgegebenen Reihenfolge, die c_{ik} gewisse Zahlen, und, wenn $(b_{ik})^{-1} = (b'_{ik})$ gesetzt wird:

$$\psi_i = \sum_k b'_{ik}\, \varphi_k, \quad {}^{6)}$$

woraus leicht folgt, daß die Funktionen ψ_i analogen Bedingungen wie die φ_i genügen (l. c. S. 216).

(I) und (II) sind *äquivalent*; insbesondere entspricht jeder Lösung von (I), welche für alle $t \geq t_0$ vorhanden ist und deren x_i zuletzt[7]) für keine Stelle t sämtlich verschwinden, mittels (1)

[6]) $\sum$, $\sum\limits_i$, $\sum\limits_k$ soll stets die Summation von 1 bis n bedeuten.

[7]) „*Zuletzt*" soll in dieser Arbeit stets heißen: für alle $t \geq T$, wo T meist von einem vorgegebenen $\varepsilon > 0$ abhängen wird.

umkehrbar eindeutig eine Lösung von (II) mit denselben Eigenschaften.

Bezeichnet nun F vorläufig irgend eine positive Funktion von t, so gilt für Lösungen der ebengenannten Art:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\sum |x_i|}}{F} = \limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\sum |y_i|}}{F}, \quad {}^{8})$$

wie man auf Grund der Ungleichungen

$$\frac{1}{n\beta} \sum |y_i| \leqq \sum |x_i| \leqq n\beta \sum |y_i|$$

(β = Maximum der absoluten Beträge aller b_{ik} und b'_{ik}) und der Beziehung $\sqrt[t]{n\beta} \to 1$ sofort erkennt.

Ebenso für lim inf.

Mit L sei der gemeinsame Zahlwert der beiden limites superiores, mit l derjenige der beiden limites inferiores bezeichnet.

§ 5. Asymptotisches Verhalten einer Lösung von (I).

Festsetzung: $F(t)$ bezeichne von jetzt an stets die positive Funktion

$$\sqrt[t]{f(t-1)\, f(t-2) \cdots f(t_0)}\,.$$

1. Hilfssatz: $H(t)$ sei zuletzt positiv; $f(t)$ für $t \geqq t_0$ positiv. Für jedes $\varepsilon > 0$ sei zuletzt

$$H(t+1) \leqq (a+\varepsilon)\, f(t)\, H(t).$$

Dann ist

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{H}}{F} \leqq a.$$

2. Hilfssatz: H und f wie soeben.

Für jedes $\varepsilon > 0$ sei zuletzt

$$H(t+1) \geqq (a-\varepsilon)\, f(t)\, H(t).$$

Dann ist

---

[8]) Lediglich das Argument t wird meist weggelassen, niemals dagegen $t+1$ und dgl.

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{H}}{F} \geqq a.$$

Beweis des 1. Hilfssatzes: $\varepsilon > 0$ vorgegeben; die vorausgesetzte Ungleichung gilt für alle $t \geqq T_\varepsilon$ ($> t_0$). Ferner sei T_ε so groß gewählt, daß $H(t) > 0$ für $t \geqq T_\varepsilon$.

Aus

$$\begin{aligned} H(T_\varepsilon + 1) &\leqq (a+\varepsilon) f(T_\varepsilon) \quad H(T_\varepsilon) \\ H(T_\varepsilon + 2) &\leqq (a+\varepsilon) f(T_\varepsilon + 1)\, H(T_\varepsilon + 1) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H(t) \quad &\leqq (a+\varepsilon) f(t-1) \;\; H(t-1) \end{aligned}$$

folgt

$$H(t) \leqq (a+\varepsilon)^{t-T_\varepsilon} f(t-1)\cdots f(T_\varepsilon)\, H(T_\varepsilon)$$
$$\text{für alle } t \geqq T_\varepsilon + 1.$$

Hieraus

$$\frac{\sqrt[t]{H}}{F} \leqq \frac{a+\varepsilon}{\sqrt[t]{(a+\varepsilon)^{T_\varepsilon}}} \cdot \frac{1}{\sqrt[t]{f(T_\varepsilon - 1)\cdots f(t_0)}} \cdot \sqrt[t]{H(T_\varepsilon)}.$$

Also

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{H}}{F} \leqq a + \varepsilon.$$

Da dieser lim sup von ε nicht abhängt, folgt sofort die Behauptung.

Analog wird der 2. Hilfssatz bewiesen, wobei nur $a > 0$ in Betracht kommt, da die Behauptung für $a \leqq 0$ trivial ist.

Die ϱ_i seien so numeriert, daß

$$|\varrho_1| > |\varrho_2| \geqq \cdots \geqq |\varrho_n|.$$

Annahme I: Es gebe eine Lösung $(x_i(t))$ des Systems (I), welche für alle ganzen $t \geqq t_0$ existiert und die jedem Bereich $\mathfrak{B}_\varepsilon$ zuletzt angehört.

Dann besitzt (II) nach § 4 eine entsprechende Lösung (y_i), welche mit der Lösung von (I) durch (1) zusammenhängt.

Bei vorgegebenem $\varepsilon > 0$ und $c > 0$ (alle $|c_{ik}| < c$, s. § 3) lassen sich nun aus (II) folgende *zuletzt geltende* Ungleichungen gewinnen:

$$|y_i(t+1)| \begin{cases} \leq |\varrho_i f y_i| + (c+\varepsilon) f \sum |y_k| \quad [9] & (2) \\ \geq |\varrho_i f y_i| - (c+\varepsilon) f \sum |y_k| . & (3) \end{cases}$$

Über $i = 1, \ldots, n$ summiert:

$$\sum |y_i(t+1)| \begin{cases} \leq (|\varrho_1| + nc + n\varepsilon) f \sum |y_i| & (4) \\ \geq (|\varrho_n| - nc - n\varepsilon) f \sum |y_i| . & (5) \end{cases}$$

Aus (4) folgt: Wenn für irgend ein (hinreichend großes) t alle $x_i = 0$, mithin auch alle $y_i = 0$ sind, so ist dies auch für alle folgenden t der Fall; es liegt also eine zuletzt identisch verschwindende Lösung vor: $x_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Sehen wir von diesem trivialen Fall ab, so ist also zuletzt $\sum |y_i| > 0$; dann folgt aus (4) nach dem 1. Hilfssatz und aus (5) nach dem 2. Hilfssatz:

$$\left.\begin{aligned} L &\leq |\varrho_1| + nc \\ l &\geq |\varrho_n| - nc . \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Da L und l nach § 4 von der Transformation, also von c, unabhängig sind und c eine beliebig kleine positive Zahl sein kann, folgt hieraus

$$L \leq |\varrho_1|, \quad l \geq |\varrho_n| .$$

Ist $l = |\varrho_1|$, so ist wegen $l \leq L$:

$$l = L = |\varrho_1| .$$

Andernfalls gibt es ein m mit $1 \leq m \leq n-1$ derart, daß

$$|\varrho_{m+1}| \leq l < |\varrho_m| . \quad (7)$$

Wir werden zeigen, daß hieraus $l = L = |\varrho_{m+1}|$ folgt.

Wir setzen

$$\sum_{i=1}^{m} |y_i| = \Phi_m(t); \quad \sum_{i=m+1}^{n} |y_i| = \Psi_m(t).$$

Summation der Ungleichungen (3) über $i = 1, \ldots, m$ und (2) über $i = m+1, \ldots, n$ liefert

$$\Phi_m(t+1) \geq |\varrho_m| f \Phi_m - n(c+\varepsilon) f (\Phi_m + \Psi_m) \quad (5\,\mathrm{a})$$
$$\Psi_m(t+1) \leq |\varrho_{m+1}| f \Psi_m + n(c+\varepsilon) f (\Phi_m + \Psi_m). \quad (4\,\mathrm{a})$$

Hieraus

[9] Siehe Fußnote 8.

$$\begin{aligned}\Phi_m(t+1)-\Psi_m(t+1) \geq (|\varrho_m| &- 2n(c+\varepsilon))f\,\Phi_m \\ &-(|\varrho_{m+1}|+2n(c+\varepsilon))f\,\Psi_m.\end{aligned} \tag{8}$$

Nun sei σ eine Zahl mit $l < \sigma < |\varrho_m|$. ε und c seien so klein gewählt, daß

$$|\varrho_m| - 2n(c+\varepsilon) > \sigma > |\varrho_{m+1}| + 2n(c+\varepsilon);$$

dann ist nach (8) zuletzt

$$\Phi_m(t+1) - \Psi_m(t+1) \geq \sigma f(\Phi_m - \Psi_m), \tag{9}$$

etwa für alle $t \geq T_\varepsilon$. Wäre nun für $t > T_\varepsilon$ einmal $\Phi_m(t) - \Psi_m(t) > 0$, so würde dies wegen $\sigma > 0$, $f > 0$ und (9) auch für alle größeren t gelten und es würde genau wie im Beweis des 2. Hilfssatzes folgen:

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\Phi_m - \Psi_m}}{F} \geq \sigma.$$

A fortiori

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\Phi_m + \Psi_m}}{F} \geq \sigma > l,$$

im Widerspruch zur Definition von l. Es ist also zuletzt

$$\Phi_m \leq \Psi_m.$$

Wegen $\Phi_m + \Psi_m > 0$ (Ergänzung zur Annahme I, S. 79) folgt hieraus, daß zuletzt $\Psi_m > 0$ ist.

Nun liefert (4a)

$$\Psi_m(t+1) \leq (|\varrho_{m+1}| + 2n(c+\varepsilon))\,\Psi_m,$$

woraus nach dem 1. Hilfssatz folgt:

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\Psi_m}}{F} \leq |\varrho_{m+1}| + 2nc.$$

Mithin

$$\begin{aligned}L = \limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\Phi_m + \Psi_m}}{F} &\leq \limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{2\Psi_m}}{F} \\ &= \limsup_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{\Psi_m}}{F} \leq |\varrho_{m+1}| + 2nc.\end{aligned}$$

Hieraus folgt wie bei (6):

$$L \leq |\varrho_{m+1}|,$$

woraus wegen $|\varrho_{m+1}| \leq l \leq L$ die Behauptung

$$l = L = |\varrho_{m+1}|$$

hervorgeht. Damit ist gewonnen der

Satz 3: Für jede Lösung des Systems (I), welche für alle $t > t_0$ existiert, deren x_i nicht von einer Stelle an sämtlich identisch verschwinden und die jedem Bereich $\mathfrak{B}_\varepsilon$ zuletzt angehört, existiert der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i(t)|}}{F(t)}$$

und ist gleich einem $|\varrho_\nu|$, $1 \leq \nu \leq n$.

Definition: Wir sagen in diesem Fall, die Lösung (x_i) gehöre zu den charakteristischen Wurzeln mit dem gleichen absoluten Betrag $|\varrho_\nu|$.

Anmerkung: Der Satz 3 gilt übrigens (trivialerweise) auch, wenn in (I) alle a_{ik} gleich 0, also auch alle ϱ_i gleich 0 sind. Denn dann folgt aus (I) direkt

$$\sum |x_i(t+1)| \leq n\,\varepsilon f \sum |x_i| \quad \text{(zuletzt)},$$

und hieraus nach dem 1. Hilfssatz, daß der fragliche Limes gleich 0 ist.

Zusatz zu Satz 3: Wir interessieren uns besonders für folgende Fälle:

1. Es gelte $F(t) \to \infty$ mit $t \to \infty$.

Ist dann in Satz 3 $|\varrho_\nu| > 0$, so folgt a fortiori: $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i| \to \infty$.

Der Fall $F(t) \to \infty$ findet insbesondere statt für

$$f(t) \equiv t^\mu \quad (\mu > 0 \text{ ganz}; \; t_0 \geq 1);$$

(also z. B. bei einem homogenen linearen System (I), dessen Koeffizienten Polynome von t sind). Man beweist leicht auf Grund der Beziehung

$$\frac{1}{t}\sqrt[t]{t(t-1)\cdots t_0} \to \frac{1}{e},$$

daß dann gilt:

$$F \cdot \frac{e^{\mu}}{t^{\mu}} \to 1;$$

unter dem Limeszeichen des Satzes 3 darf also $F(t)$ durch $\frac{t^{\mu}}{e^{\mu}}$ ersetzt werden.

2. $f(t) \equiv 1$; also auch $F(t) \equiv 1$.

Ist nun in Satz 3 $|\varrho_r| > 1$, so folgt $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \to \infty$; ist

$|\varrho_r| < 1$, so folgt $\sum_{i=1}^{n} |x_i| \to 0$.

Um an die letzten Rechnungen ohne weiteres anknüpfen zu können, bleiben wir bei der Annahme (7), welche sich auf Grund des inzwischen Bewiesenen jetzt auch so aussprechen läßt:

Annahme IIa: Der Limes des Satzes 3 sei gleich einem $|\varrho_{m+1}|$ mit $|\varrho_{m+1}| < |\varrho_m|$; $1 \leq m \leq n-1$.

Wegen $\Phi_m \leq \Psi_m$ und $\Psi_m > 0$ ist

$$0 < \tfrac{1}{2}(\Phi_m + \Psi_m) \leq \Psi_m \leq \Phi_m + \Psi_m;$$

folglich

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\Psi_m}}{F} = |\varrho_{m+1}|, \tag{10}$$

was sich aber mit den bis jetzt angewandten Mitteln (l. c. S. 207) nicht auf die x_i übertragen läßt. Verwenden wir jedoch (unter Berücksichtigung der Bemerkung am Anfang des § 4) solche Transformationen (1), wie sie Satz 2 liefert (mit dem jetzigen m), so ist

$$x_i = \sum_{k=m+1}^{n} b_{ik} y_k \quad (i = m+1, \ldots, n); \tag{11}$$

es transformieren sich also die $x_{m+1}, \ldots, x_n$ und die $y_{m+1}, \ldots, y_n$ unter sich allein; analog wie in § 4 folgt aus (10)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\sum_{i=m+1}^{n} |x_i|}}{F} = |\varrho_{m+1}|. \tag{12}$$

Für den Fall, daß alle charakteristischen Wurzeln gleichen absoluten Betrag haben, ist schon Satz 3 das der Formel (12) entsprechende Ergebnis.

Es sei nun $\varrho_{m+1}, \ldots, \varrho_{m+p}$ die Gruppe der charakteristischen Wurzeln mit gleichem absoluten Betrag wie ϱ_{m+1}; ferner sei $m+p<n$:

$$|\varrho_m| > |\varrho_{m+1}| = \cdots = |\varrho_{m+p}| > |\varrho_{m+p+1}| \geqq 0.$$

Wir setzen

$$\sum_{i=m+1}^{m+p} |y_i| = S_m(t); \qquad \sum_{i=m+p+1}^{n} |y_i| = X_m(t). \tag{13}$$

Also

$$S_m + X_m = \Psi_m.$$

Aus (3) und (2) ergibt sich auf die schon zweimal angewandte Art:

$$\begin{aligned} S_m(t+1) &\geqq |\varrho_{m+p}|\, f S_m - n(c+\varepsilon) f(\Phi_m + \Psi_m) \\ &> |\varrho_{m+p}|\, f S_m - 2n(c+\varepsilon) f(S_m + X_m) \end{aligned} \tag{5b}$$

$$\begin{aligned} X_m(t+1) &\leqq |\varrho_{m+p+1}|\, f X_m + n(c+\varepsilon) f(\Phi_m + \Psi_m) \\ &< |\varrho_{m+p+1}|\, f X_m + 2n(c+\varepsilon) f(S_m + X_m). \end{aligned} \tag{4b}$$

Hieraus

$$\begin{aligned} S_m(t+1) - X_m(t+1) \geqq (|\varrho_{m+p}| &- 4n(c+\varepsilon)) f S_m \\ - (|\varrho_{m+p+1}| &+ 4n(c+\varepsilon)) f X_m. \end{aligned} \tag{8b}$$

Nun sei σ_1 eine Zahl mit $|\varrho_{m+p+1}| < \sigma_1 < |\varrho_{m+p}|$, dann ist nach (8b) für hinreichend kleines ε und c zuletzt

$$S_m(t+1) - X_m(t+1) \geqq \sigma_1 f(S_m - X_m)$$

oder

$$\frac{S_m(t+1) - X_m(t+1)}{\sigma_1^{t+1} f(t) f(t-1) \cdots f(t_0)} \geqq \frac{S_m(t) - X_m(t)}{\sigma_1^t f(t-1) \cdots f(t_0)};$$

d. h. die Funktion

$$\frac{S_m - X_m}{\sigma_1^t F^t} \tag{14}$$

wächst zuletzt monoton.

Es läßt sich zeigen, daß (14) $\to \infty$ wächst. Zu diesem Zweck schätzen wir anstelle von (8b) die Differenz

$$\tfrac{1}{2} S_m(t+1) - X_m(t+1)$$

nach unten ab:

$$\tfrac{1}{2} S_m(t+1) - X_m(t+1) \geqq (|\varrho_{m+p}| - 6n(c+\varepsilon)) f \tfrac{1}{2} S_m$$
$$- (|\varrho_{m+p+1}| + 3n(c+\varepsilon)) f X_m,$$

woraus analog wie bei (14) folgt, daß auch die Funktion

$$\frac{\tfrac{1}{2} S_m - X_m}{\sigma_1^t F^t} \tag{14*}$$

zuletzt monoton wächst.

Würde nun (14) nicht $\rightarrow \infty$ wachsen, dann auch (14*) nicht, also beide, weil monoton, gegen je einen endlichen Limes; also würden auch ihre Differenz und daher die Funktionen

$$\frac{S_m}{\sigma_1^t F^t} \quad \text{und} \quad \frac{X_m}{\sigma_1^t F^t}$$

einzeln und mithin auch schließlich deren Summe je einen endlichen Limes besitzen. Letzteres ist aber nicht der Fall; denn aus (10) folgt wegen $|\varrho_{m+1}| = |\varrho_{m+p}| > \sigma_1$, daß, wenn σ_2 eine Zahl mit $|\varrho_{m+1}| > \sigma_2 > \sigma_1$ ist, zuletzt

$$\frac{\sqrt[t]{\Psi_m}}{F} > \sigma_2 \quad \text{oder} \quad \frac{S_m + X_m}{\sigma_1^t F^t} > \left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1}\right)^t,$$

wo die rechte Seite $\rightarrow \infty$ strebt.

Die Funktion (14) wächst also $\rightarrow \infty$, sodaß zuletzt gilt:

$$X_m < S_m; \quad \text{insbesondere also } S_m > 0.$$

Aus

$$0 < \tfrac{1}{2} \Psi_m = \tfrac{1}{2}(S_m + X_m) < S_m \leqq \Psi_m$$

folgt wegen (10)

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{S_m}}{F} = |\varrho_{m+1}|. \tag{15}$$

Da nun mittels (11) die $x_{m+1}, \ldots, x_{m+p}$ und die $y_{m+1}, \ldots, y_{m+p}$ unter sich allein transformiert werden, folgt aus (15) (wie (12) aus (10)):

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\sum_{i=m+1}^{m+p} |x_i|}}{F} = |\varrho_{m+1}|. \tag{16}$$

Für den Fall $m + p = n$, wo also $\varrho_{m+1}, \ldots, \varrho_{m+p}$ die Gruppe der Wurzeln mit dem kleinsten absoluten Betrag sind, ist schon (12) das der Formel (16) entsprechende Ergebnis.

Die Annahme IIa umfaßt natürlich alle Fälle, wo der Limes des Satzes 3 kleiner als $|\varrho_1|$ ist; das ϱ_ν des Satzes 3 kann ja stets durch diejenige charakteristische Wurzel mit gleichem absolutem Betrag ersetzt werden, welche den kleinsten Index hat.

Es ist also lediglich noch folgender Fall zu prüfen:

Annahme IIb: Der Limes des Satzes 3 sei gleich $|\varrho_1|$.

Es seien $\varrho_1, \ldots, \varrho_p$ die charakteristischen Wurzeln mit gleichem absolutem Betrag wie ϱ_1; ferner sei $p < n$.

Setzt man in (13) $m = 0$, so lassen sich die dort beginnenden Rechnungen mit $m = 0$ nahezu wörtlich übertragen (von (5b) und (4b) ist nur je die erste Zeile mit $\Phi_m = 0$ zu benützen) und liefern die Beziehung (16) mit $m = 0$.

Für $p = n$ ist schon Satz 3 das entsprechende Ergebnis.

Wir fassen zusammen:

Satz 4: Ist der Grenzwert im Satze 3 gleich $|\varrho_\nu|$ und haben im ganzen p der charakteristischen Wurzeln (mehrfache mehrfach gezählt) den absoluten Betrag $|\varrho_\nu|$, so existiert bei geeigneter Numerierung der x_i auch der Grenzwert

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\sum_{i=m+1}^{m+p} |x_i|}}{F(t)}$$

und ist ebenfalls gleich $|\varrho_\nu|$.

1. Anmerkung: Für $\sum_{i=m+1}^{m+p} |x_i|$ gilt dasselbe, was im Zusatz zu Satz 3 über $\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ ausgesagt wurde.

2. Anmerkung: Wörtlich wie die 2. Anmerkung l. c. S. 224, nur daß als Beispiel jetzt eine partikuläre Lösung $x_i = a_i \varrho_\nu^t$

($\varrho_\nu \neq 0$) eines linearen homogenen Systems von Differenzengleichungen mit konstanten Koeffizienten, wo alle $a_i \neq 0$ sind, einzusetzen ist. Im 2. Absatz ist $|\varrho_\nu|$ statt $\Re(\varrho_\nu)$ einzusetzen.

3. Anmerkung: Wörtlich wie die 3. Anmerkung l. c. S. 225, nur daß als Beispiel jetzt die Lösung $\left\{\begin{array}{l} x_1 = \cos\frac{\pi}{2}\,t \\ x_2 = \sin\frac{\pi}{2}\,t \end{array}\right\}$ des Systems $\left\{\begin{array}{l} x_1(t+1) = -x_2(t) \\ x_2(t+1) = x_1(t) \end{array}\right\}$ mit den beiden charakteristischen Wurzeln von gleichem absolutem Betrag i und $-i$ einzusetzen ist, wo $\sqrt[t]{|x_1|}$ und $\sqrt[t]{|x_2|}$ keine Grenzwerte haben.

§ 6. Verschärfung der vorhergehenden Untersuchung.

Wir knüpfen an die Untersuchungen zur Annahme IIa an und verwenden jetzt die noch nicht benützte Tatsache, daß in Satz 2 gewisse c_{ik} gleich Null sind; es genügt zunächst, daß dies für $i \leq m$, $k > m$ feststeht. Damit läßt sich für $i = 1, \ldots, m$ anstelle von (3) die schärfere Abschätzung erhalten:

$$|y_i(t+1)| \geq |\varrho_i f y_i| - cf\sum_{k=1}^{m}|y_k| - \varepsilon f\sum_{k=1}^{n}|y_k|.$$

Summation über $i = 1, \ldots, m$ ergibt:

$$\Phi_m(t+1) \geq |\varrho_m| f\,\Phi_m - n\,c\,f\,\Phi_m - n\,\varepsilon f(\Phi_m + \Psi_m);$$

die Konstante c kommt nun bei Ψ_m nicht vor, was für (8c) nötig sein wird.

Wegen $\Phi_m \leq \Psi_m = S_m + X_m < 2\,S_m$[10]) folgt

$$\Phi_m(t+1) \geq |\varrho_m| f\,\Phi_m - n\,c\,f\,\Phi_m - 4\,n\,\varepsilon f S_m.$$

Aus (2) folgt auf die übliche Art (vgl. (5b)):

$$\begin{aligned} S_m(t+1) &\leq |\varrho_{m+1}| f S_m + n(c+\varepsilon) f(\Phi_m + \Psi_m) \\ &< |\varrho_{m+1}| f S_m + 4\,n(c+\varepsilon) f S_m. \end{aligned}$$

Hieraus

$$\begin{aligned} \Phi_m(t+1) - \sqrt{\varepsilon}\,S_m(t+1) \geq (|\varrho_m| - n\,c) f\,\Phi_m \\ - (|\varrho_{m+1}| + 4\,n\sqrt{\varepsilon} + 4\,n(c+\varepsilon)) f\sqrt{\varepsilon}\,S_m. \end{aligned} \tag{8c}$$

Nun sei σ_3 eine Zahl mit $|\varrho_m| > \sigma_3 > |\varrho_{m+1}|$; dann ist nach (8c) für hinreichend kleines ε und c zuletzt

[10]) Im Fall $m + p = n$, wo $S_m = \Psi_m$, ebenfalls richtig.

$$\Phi_m(t+1) - \sqrt{\varepsilon}\, S_m(t+1) \geqq \sigma_3 f(\Phi_m - \sqrt{\varepsilon}\, S_m),$$

etwa für alle $t \geqq T_\varepsilon$. Wäre nun für $t \geqq T_\varepsilon$ einmal $\Phi_m - \sqrt{\varepsilon}\, S_m > 0$, so würde dies dann auch für alle größeren t gelten und es würde genau wie im Beweis des 2. Hilfssatzes folgen:

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\Phi_m - \sqrt{\varepsilon}\, S_m}}{F} \geqq \sigma_3.$$

A fortiori

$$\liminf_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{\Sigma\, |y_i|}}{F} \geqq \sigma_3 > |\varrho_{m+1}|,$$

während doch nach Annahme IIa $\lim\limits_{t \to \infty} \dfrac{\sqrt[t]{\Sigma\, |y_i|}}{F} = |\varrho_{m+1}|$ ist.

Es ist also zuletzt

$$\Phi_m \leqq \sqrt{\varepsilon}\, S_m.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig klein sein darf, ohne daß c weiter verkleinert zu werden braucht, und wegen $S_m > 0$ (zuletzt), bedeutet dies:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{\Phi_m}{S_m} = 0. \tag{17}$$

Es sei nun $m + p < n$, sodaß die Funktion X_m vorhanden ist; wir benützen jetzt die Tatsache in Satz 2, daß für $i \geqq m+2$ die $c_{i,m+1}, \ldots, c_{i,i-1}$ gleich 0 sind. Dann erhält man für $i \geqq m+1$ anstelle von (2):

$$|y_i(t+1)| \leqq |\varrho_i f y_i| + c f \left(\sum_{k=1}^{m} |y_k| + \sum_{k=i+1}^{n} |y_k| \right) + \varepsilon f \sum_{k=1}^{n} |y_k|.$$

Summation über $i = m + p + 1, \ldots, n$ liefert:

$$\begin{aligned} X_m(t+1) \leqq |\varrho_{m+p+1}| f X_m + n c f (\Phi_m + X_m) \\ + n \varepsilon f (\Phi_m + S_m + X_m). \end{aligned}$$

Die Konstante c kommt nun bei S_m nicht vor, was nachher nötig sein wird.

Wegen $\Phi_m \leqq \sqrt{\varepsilon}\, S_m$ und $\Phi_m + S_m + X_m < 4\, S_m$ (zuletzt) folgt:

$$X_m(t+1) \leqq |\varrho_{m+p+1}| f X_m + n c f (\sqrt{\varepsilon}\, S_m + X_m) + 4 n \varepsilon f S_m.$$

Ferner aus (5b) wegen $X_m < S_m$:

$$S_m(t+1) \geqq |\varrho_{m+p}| f S_m - 4 n (c + \varepsilon) f S_m.$$

Hieraus:

$$\sqrt{\varepsilon}\, S_m(t+1) - X_m(t+1) \geq (|\varrho_{m+p}| - 5nc - 4n(\varepsilon + \sqrt{\varepsilon}))f\sqrt{\varepsilon}\, S_m$$
$$- (|\varrho_{m+p+1}| + nc) f X_m.$$

Genau wie bei (8b) folgt, daß die Funktion

$$\frac{\sqrt{\varepsilon}\, S_m - X_m}{\sigma_1^t F^t}$$

zuletzt monoton wächst. Durch Wiederholung des letzten Schrittes mit $\frac{1}{2}\varepsilon$ statt ε beweist man genau wie damals, daß sie sogar $\to \infty$ wächst.

Also ist zuletzt

$$X_m < \sqrt{\varepsilon}\, S_m,$$

was bedeutet (vgl. bei (17)):

$$\lim_{t \to \infty} \frac{X_m}{S_m} = 0. \tag{18}$$

Bei der Annahme IIb mit $p < n$ (sonst X_m nicht vorhanden) folgt (18) ebenfalls, mit nur unwesentlich abgeänderter Rechnung.

In (17) und (18) ersetzen wir den Zähler a fortiori durch einen einzigen seiner Summanden $|y_i|$ und haben dann folgendes Ergebnis:

Satz 5: Es sei $|\varrho_1| \geq |\varrho_2| \geq \cdots \geq |\varrho_n|$. $\varrho_{m+1}, \ldots, \varrho_{m+p}$ seien sämtliche charakteristischen Wurzeln mit gleichem absolutem Betrag wie ϱ_{m+1}.

Wenn dann nach geeigneter Numerierung der x_i das System (I) gemäß Satz 1 (für $m = 0$) bzw. Satz 2 (für $m > 0$) derart in (II) transformiert wird, daß alle $|c_{ik}|$ hinreichend klein werden, so gilt für jede zu der obigen Wurzelgruppe gehörige Lösung:

$$\lim_{t \to \infty} \frac{y_j}{\sum_{i=m+1}^{m+p} |y_i|} = 0$$

für alle j außer $m + 1 \leq j \leq m + p$.

Anmerkung: Aus den Beweisen geht hervor, daß im Falle $m > 0$, $m + p < n$ für die Kleinheit der $|c_{ik}|$ folgende Bedingungen hinreichend sind:

$$|c_{ik}| < c, \quad \text{wo} \quad |\varrho_m| - 2nc > |\varrho_{m+1}| + 4nc$$
$$|\varrho_{m+p}| - 6nc > |\varrho_{m+p+1}| + 4nc;$$

in den Fällen $m = 0$ und $m + p = n$ von analoger Art.

Mittels (1) auf die Lösung (x_i) übertragen, liefert Satz 5 entsprechende Aussagen über weniger einfach gebaute Ausdrücke in den x_i. Wir werden später diese Übertragung in einigen Spezialfällen vornehmen.

§ 7. Fall einer charakteristischen Wurzel, deren absoluter Betrag bei keiner andern auftritt.

Es sei $p = 1$, d. h. ϱ_{m+1} $(0 \leq m \leq n-1)$ ist die einzige charakteristische Wurzel, deren absoluter Betrag gleich $|\varrho_{m+1}|$ ist.

Dann lehrt Satz 5:

$$\frac{y_j}{y_{m+1}} \to 0 \quad \text{für jedes } j \neq m+1, \tag{19}$$

wo natürlich y_{m+1}, dessen absoluter Betrag das S_m des § 6 ist, zuletzt $\neq 0$ ist.

Wegen

$$x_{m+1} = b_{m+1,\,m+1}\, y_{m+1} \tag{20}$$

ist auch x_{m+1} zuletzt $\neq 0$ und

$$\frac{x_i}{x_{m+1}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{ik}\, y_k}{b_{m+1,\,m+1}\, y_{m+1}} \to \frac{b_{i,\,m+1}}{b_{m+1,\,m+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{21}$$

Es seien mit α diejenigen Indizes i bezeichnet, für welche $b_{i,\,m+1} \neq 0$ ist; zu ihnen gehört mindestens der Index $m+1$.

Nach (21) ist x_α zuletzt $\neq 0$ und

$$\frac{x_i}{x_\alpha} = \frac{x_i}{x_{m+1}} \, \frac{x_{m+1}}{x_\alpha} \to \frac{b_{i,\,m+1}}{b_{\alpha,\,m+1}} \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{22}$$

Nun lehrt Satz 4 (vgl. (16)):

$$\sqrt[t]{\left|\frac{x_{m+1}}{F}\right|} \to |\varrho_{m+1}|;$$

hieraus und aus (21), angewandt auf $i = \alpha$, folgt

$$\frac{\sqrt[t]{|x_a|}}{F} \to |\varrho_{m+1}|. \tag{23}$$

Diese Beziehung läßt sich jedoch durch eine schärfere ersetzen, welche wir gleich für allgemeinere Indizes aufstellen wollen.

Da x_a zuletzt $\neq 0$ ist, liefert (I):

$$\frac{x_i(t+1)}{x_a(t)} = f \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{x_k}{x_a} + \frac{\varphi_i}{x_a}. \quad ^{11)} \tag{24}$$

Zuletzt ist

$$\left|\frac{\varphi_i}{x_a}\right| < \varepsilon f \sum_{k=1}^{n} \left|\frac{x_k}{x_a}\right| \leq \varepsilon f K, \tag{25}$$

wo K eine im Hinblick auf (22) zu wählende positive Konstante ist.

Aus (24), (22), (25) folgt für $t \to \infty$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \frac{x_i(t+1)}{x_a(t)} &\to \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \frac{b_{k,m+1}}{b_{a,m+1}} \\ &= \frac{1}{b_{a,m+1}} \left(\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq m+1}}^{n} b_{ik} c_{k,m+1} + b_{i,m+1} \varrho_{m+1} \right) \\ &= \frac{b_{i,m+1}}{b_{a,m+1}} \varrho_{m+1} \quad \text{(da alle } c_{k,m+1} = 0 \text{ sind).} \end{aligned} \tag{26}$$

Man erhält für $i = a$:

$$\frac{1}{f} \frac{x_a(t+1)}{x_a(t)} \to \varrho_{m+1}; \tag{27}$$

also speziell

$$\frac{1}{f} \frac{|x_a(t+1)|}{|x_a(t)|} \to |\varrho_{m+1}|,$$

und hieraus folgt nach einem Analogon zur Hospitalschen Regel[12]) wiederum (23)[13]).

---

[11]) Siehe Fußnote 8.

[12]) Satz. $H(t)$ sei zuletzt positiv; $f(t) > 0$ für $t \geq t_0$ (t und t_0 ganz). Aus

$$\frac{1}{f(t)} \frac{H(t+1)}{H(t)} \to A \text{ mit } t \to \infty$$

folgt

$$\frac{\sqrt[t]{H(t)}}{F(t)} \to A, \quad \text{wo} \quad F(t) = \sqrt[t]{f(t-1)f(t-2)\cdots f(t_0)}.$$

Beweis: Es sei zunächst $A > 0$. ε mit $0 < \varepsilon < A$ vorgegeben.

Zuletzt ist

Ferner folgt aus (27), wenn

$$x_a = |x_a| e^{i \operatorname{Arc} x_a}$$

gesetzt wird:

$$e^{i(\operatorname{Arc} x_a(t+1) - \operatorname{Arc} x_a(t))} \to e^{i \operatorname{Arc} \varrho_{m+1}}, \quad \text{falls} \quad \varrho_{m+1} \neq 0.$$

Dabei sei über den Arcus folgendes festgesetzt:

Arc ϱ_{m+1} sei irgendwie festgelegt, z.B. mit $0 \leq \operatorname{Arc} \varrho_{m+1} < 2\pi$. Ebenso sei Arc $x_a(t)$ für irgendeine Stelle t festgelegt, von welcher an x_a bereits $\neq 0$ ist. Für alle folgenden t sei $x_a(t)$ durch die Forderung

$$|\operatorname{Arc} x_a(t+1) - \operatorname{Arc} x_a(t) - \operatorname{Arc} \varrho_{m+1}| < \pi$$

festgelegt. Dann folgt aus der letzten Limesbeziehung:

$$\operatorname{Arc} x_a(t+1) - \operatorname{Arc} x_a(t) \to \operatorname{Arc} \varrho_{m+1} \quad (\text{falls } \varrho_{m+1} \neq 0),$$

also auch

$$\frac{1}{t} \operatorname{Arc} x_a(t) \to \operatorname{Arc} \varrho_{m+1}. \tag{28}$$

Definieren wir nun für $x_a \neq 0$:

$$\sqrt[t]{x_a} = \sqrt[t]{|x_a|}\, e^{i \frac{1}{t} \operatorname{Arc} x_a},$$

so folgt aus (23) und (28), falls $\varrho_{m+1} \neq 0$:

$$\frac{\sqrt[t]{x_a}}{F} \to \varrho_{m+1}. \tag{29}$$

Im Fall $\varrho_{m+1} = 0$ ist dies ebenfalls richtig (auf Grund von (23) allein).

Die Eigenschaften einer Lösung, die zu ϱ_{m+1} gehört, hängen nach dem Bisherigen hauptsächlich von den Zahlen $b_{i,m+1}$

$$(A - \varepsilon) f(t) H(t) < H(t+1) < (A + \varepsilon) f(t) H(t).$$

Hieraus folgt nach dem 1. und 2. Hilfssatz (§ 5)

$$A \leq \liminf_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{H(t)}}{F(t)} \leq \limsup_{t \to \infty} \frac{\sqrt[t]{H(t)}}{F(t)} \leq A,$$

was die Behauptung liefert. Für $A = 0$ ebenso, nur daß die Anwendung des 2. Hilfssatzes wegfällt.

[13]) In diesem Sinne wurde bei (23) eine „schärfere Beziehung" angekündigt.

($i = 1, \ldots, n$) ab, deren Kenntnis es insbesondere ermöglicht, unter den Komponenten x_i sofort die x_α anzugeben.

Über die Berechnung der Zahlen $b_{i,m+1}$ auf Grund des § 3 gelten wörtlich dieselben Bemerkungen wie l. c. S. 231.

Wir fassen die Ergebnisse in vereinfachter Bezeichnung zusammen in

Satz 6: Eine Lösung von (I) gehöre gemäß Satz 3 zu einer charakteristischen Wurzel ϱ_ν, deren absoluter Betrag bei keiner andern auftritt. Dann zerfallen die Komponenten x_i in zwei Gruppen x_α und x_β, wo zu den x_α mindestens ein x_i gehört, während die Gruppe der x_β auch wegfallen kann, von verschiedenen Wachstumseigenschaften.

Über die Auffindung der Gruppeneinteilung und die Berechnung der Zahlen $e_1, \ldots, e_n$ gelten wörtlich die beiden entsprechenden Absätze des Satzes 6 l. c. S. 232.

Für jeden Index α gilt:

$$x_\alpha \text{ ist zuletzt } \neq 0; \qquad \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{|x_\alpha(t)|}}{F(t)} = |\varrho_\nu|.$$

Bei geeigneter Erklärung von $\operatorname{Arc} x_\alpha(t)$ und von $\sqrt[t]{x_\alpha(t)}$ gilt ferner

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{x_\alpha(t)}}{F(t)} = \varrho_\nu$$

und, falls $\varrho_\nu \neq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} (\operatorname{Arc} x_\alpha(t+1) - \operatorname{Arc} x_\alpha(t)) = \operatorname{Arc} \varrho_\nu.$$

Für jeden Index α und $i = 1, \ldots, n$ gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x_i(t)}{x_\alpha(t)} = \frac{e_i}{e_\alpha}; \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{f(t)} \frac{x_i(t+1)}{x_\alpha(t)} = \frac{e_i}{e_\alpha} \varrho_\nu.$$

Anmerkung: Im Falle $F(t) \to \infty$ folgt:

$$\text{Alle } x_\alpha \to \infty, \text{ falls } \varrho_\nu \neq 0.$$

Im Fall $f(t) \equiv 1$ folgt:

$$\text{Alle } x_\alpha \to \infty, \text{ falls } |\varrho_\nu| > 1;$$
$$\text{alle } x_i \to 0 \ (i = 1, \ldots, n), \text{ falls } |\varrho_\nu| < 1.$$

(Letzteres ist schon im Zusatz zu Satz 3 festgestellt.)

§ 8. Anwendung auf homogene lineare Differenzengleichungen n-ter Ordnung (1. Typus).

Vorgelegt sei eine lineare homogene Differenzengleichung n-ter Ordnung von folgendem Typus:

$$\text{(III)} \begin{cases} x(t+n) + (a_1 f(t) + \chi_1(t)) x(t+n-1) + (a_2 f(t) + \chi_2(t)) x(t+n-2) \\ \quad + \cdots + (a_n f(t) + \chi_n(t))\, x(t) = 0; \\ f(t) \text{ definiert und positiv für alle ganzen } t \geq t_0 \ (t_0 \text{ ganz}); \\ f(t) \to +\infty \text{ mit } t \to +\infty; \text{ also auch } F(t) = \sqrt[t]{f(t-1) f(t-2) \cdots f(t_0)} \to +\infty; \\ \chi_\nu(t) \quad (\nu = 1, \ldots, n) \quad \text{definiert für alle ganzen } t \geq t_0; \\ \dfrac{\chi_\nu(t)}{f(t)} \to 0 \text{ mit } t \to +\infty; \\ a_1 \neq 0. \end{cases}$$

Die Transformation

$$(T_1^*) \begin{cases} x(t) & = x_n(t) \\ x(t+1) & = x_{n-1}(t) \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x(t+n-1) & = x_1(t) \end{cases}$$

führt (III) über in das System

$$\begin{aligned} x_1(t+1) &= -(a_1 f + \chi_1) x_1 - (a_2 f + \chi_2) x_2 - \cdots - (a_n f + \chi_n) x_n \\ x_2(t+1) &= x_1 \\ x_3(t+1) &= x_2 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_n(t+1) &= x_{n-1}, \end{aligned}$$

welches ein System der Form (I) ist mit der Matrix

$$(a_{ik}) = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_n \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$$

und den „Zusatzfunktionen"

$$\varphi_1 = -\sum_{k=1}^{n} \chi_k x_k$$
$$\varphi_i = \quad x_{i-1} \qquad (i = 2, \ldots, n).$$

Auf Grund der Voraussetzungen über (III) verifiziert man sofort, daß für das System die Voraussetzungen A erfüllt sind; $\mathfrak{B}$ und jedes $\mathfrak{B}_\varepsilon$ ist der Bereich *aller* Wertsysteme (x_i).

Die charakteristischen Wurzeln sind $-a_1$ (einfach) und 0 ($(n-1)$-fach). Die nichttrivialen Lösungen (Existenz für alle $t \geqq t_0$ ist klar) „gehören" also zu $-a_1$ oder 0 gemäß folgender Übertragung des Satzes 3:

Satz 7: Für jede Lösung der Differenzengleichung (III), welche nicht von einer Stelle an identisch verschwindet, existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+n-1)|}}{F(t)}$$

und ist gleich $|a_1|$ oder gleich 0.

(Gilt übrigens auch für $a_1 = 0$, da $a_1 \neq 0$ hier nicht benützt ist. Für den Fall, daß $a_1, \ldots, a_n$ alle gleich 0 sind, ist die Aussage trivial; vgl. die Anmerkung zu Satz 3.)

Zusatz zu Satz 7: Im Fall $f(t) \equiv t^\mu$ ($\mu > 0$ ganz; $t_0 \geqq 1$) darf unter dem Limeszeichen des Satzes 7 $F(t)$ durch $\frac{t^\mu}{e^\mu}$ ersetzt werden (s. Zusatz zu Satz 3); analog in den weiteren Sätzen dieses Paragraphen.

Auf die zu $-a_1$ gehörigen Lösungen können wir Satz 6 anwenden. Die dortigen Zahlen $e_1, \ldots, e_n$ haben, wie man sofort berechnet, die Werte $1, 0, \ldots, 0, 0$; die Übertragung des Satzes 6 liefert:

Satz 8: Für jede zu $-a_1$ gehörige Lösung von (III) gilt:

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \infty; \quad \lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{|x(t+n-1)|}}{F(t)} = |a_1|.$$

Bei geeigneter Erklärung von $\operatorname{Arc} x(t)$ und $\sqrt[t]{x(t+n-1)}$ gilt ferner:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{x(t+n-1)}}{F(t)} = -a_1$$

und

$$\lim_{t\to\infty} (\operatorname{Arc} x(t+1) - \operatorname{Arc} x(t)) = \operatorname{Arc}(-a_1).$$

Ferner gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t-1)}{x(t)} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{t\to\infty} \frac{1}{f(t)} \frac{x(t+n)}{x(t+n-1)} = -a_1.$$

Die Untersuchung von zu 0 gehörigen Lösungen beruht auf der Anwendung der Sätze 4 und 5 mit $m = 1$ und $p = n - 1$. Diese Anwendung ist jedoch in einem konkreten Fall, wie in dem vorliegenden, erst nach Herstellung einer geeigneten Numerierung der x_i möglich, da nicht bei jeder Numerierung eine Matrixbeziehung, wie sie Satz 2 verlangt, vorhanden ist.

Beginnen wir mit der vorhin durch (T_1^*) gegebenen Numerierung, so ist eine Matrixbeziehung folgender Art nötig:

$$\begin{pmatrix} -a_1 & \dots & -a_n \\ 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & & \dots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_{32} & b_{33} & 0 \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & b_{n2} & b_{n3} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a_1 & 0 & & & \dots & 0 \\ c_{21} & 0 & c_{23} & & \dots & c_{2n} \\ c_{31} & 0 & 0 & c_{34} & \dots & c_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n-1,1} & 0 & \dots & \dots & 0 & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{30}$$

In der Tat lassen sich leicht die b_{ik} und c_{ik} so bestimmen, daß diese Beziehung besteht, was l. c. § 8 näher ausgeführt ist. Die b_{ik} liefern sodann die Transformation (1) und diese zuletzt die Übertragung der Sätze 4 und 5 auf die x_i und damit auf $x(t)$.

Bei Benützung anderer Numerierungen als (T_1^*) kann sich dieser Sachverhalt ändern. Die Matrixbeziehung wird sich von (30) dadurch unterscheiden, daß in der ersten Matrix der linken Seite die $-a_1, \dots, -a_n$ in einer anderen Zeile und daselbst in anderer Reihenfolge stehen. In denjenigen Fällen (die man leicht angeben kann), wo sich wieder die b_{ik} und c_{ik} ohne weiteres bestimmen lassen, führt die neue Numerierung auf keine andern Ergebnisse über $x(t)$ als vorher (T_1^*). Im allgemeinen werden sich jedoch die b_{ik} und c_{ik} nur unter der Zusatzvoraussetzung bestimmen lassen, daß von den Zahlen $a_2, \ldots, a_n$ eine bestimmte von Null verschieden sei. Dann erhält man auch ein anderes Ergebnis über $x(t)$.

Diese Rechnungen sind l. c. § 8 näher ausgeführt und bleiben wörtlich in Geltung, wenn die dortigen $x^{(\nu)}$ durch die jetzigen $x(t+\nu)$ ersetzt werden. Es seien daher gleich die Ergebnisse angeführt:

Satz 9: Für jede zu 0 gehörige Lösung von (III) gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+n-2)|}}{F(t)} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{a_1 x(t+n-1) + a_2 x(t+n-2) + \cdots + a_n x(t)}{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+n-2)|} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{f(t)} \frac{x(t+n)}{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+n-2)|} = 0.$$

Für $n = 2$ lauten diese Beziehungen:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\sqrt[t]{|x(t)|}}{F(t)} = 0; \quad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t+1)}{x(t)} = -\frac{a_2}{a_1};$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{f(t)} \frac{x(t+2)}{x(t)} = 0.$$

Die weiteren unter Zusatzvoraussetzungen der obengenannten Art geltenden Beziehungen lassen sich so beschreiben, daß in der Summe

$$|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+n-1)|$$

nicht wie in Satz 9 der letzte, sondern ein anderer Summand wegbleibt; es mag zur Illustration genügen, die Resultate im Fall $n = 3$ anzugeben:

Für jede zu 0 gehörige Lösung von (III) $(n = 3)$ gilt:

Stets:
$$\frac{\sqrt[t]{|x(t)|+|x(t+1)|}}{F(t)} \to 0,$$

$$\frac{a_1 x(t+2)+a_2 x(t+1)+a_3 x(t)}{|x(t)|+|x(t+1)|} \to 0, \quad \frac{1}{f(t)} \frac{x(t+3)}{|x(t)|+|x(t+1)|} \to 0.$$

Wenn $a_2 \neq 0$:
$$\frac{\sqrt[t]{|x(t)|+|x(t+2)|}}{F(t)} \to 0,$$

$$\frac{a_1 x(t+2)+a_2 x(t+1)+a_3 x(t)}{|x(t)|+|x(t+2)|} \to 0,$$

$$\frac{1}{f(t)} \frac{x(t+3)}{|x(t)|+|x(t+2)|} \to 0.$$

Wenn $a_3 \neq 0$:
$$\frac{\sqrt[t]{|x(t+1)|+|x(t+2)|}}{F(t)} \to 0,$$

$$\frac{a_1 x(t+2)+a_2 x(t+1)+a_3 x(t)}{|x(t+1)|+|x(t+2)|} \to 0,$$

$$\frac{1}{f(t)} \frac{x(t+3)}{|x(t+1)|+|x(t+2)|} \to 0.$$

Im Fall $n=2$ liefert die zweite, noch mögliche Numerierung nichts Neues.

§ 9. Anwendung auf homogene lineare Differenzengleichungen n-ter Ordnung (2. Typus: Poincaré-Perronsche Differenzengleichung).

Vorgelegt sei eine homogene lineare Differenzengleichung n-ter Ordnung von folgendem Typus (Poincaré-Perronsche Differenzengleichung):

$$\text{(IV)} \quad \begin{cases} x(t+n)+(a_1+\chi_1(t))x(t+n-1)+\cdots+(a_n+\chi_n(t))x(t)=0; \\ \chi_\nu(t) \ (\nu=1,\ldots,n) \text{ definiert für alle ganzen } t \geqq t_0 \ (t_0 \text{ ganz}); \\ \chi_\nu(t) \to 0 \text{ mit } t \to +\infty. \end{cases}$$

Die Transformation

$$(T_n)\begin{cases} x(t) & = x_1(t) \\ x(t+1) & = x_2(t) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x(t+n-1) & = x_n(t) \end{cases}$$

führt (IV) über in ein System der Form (I) mit $f(t) \equiv 1$ (nähere Angaben hierüber wörtlich wie l. c. S. 240); die Übertragung des Satzes 3 liefert den

Satz 10: Für jede Lösung der Differenzengleichung (IV), welche nicht von einer Stelle an identisch verschwindet, existiert der Grenzwert

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+n-1)|}$$

und ist gleich einem $|\varrho_\nu|$, $1 \leq \nu \leq n$, wo $\varrho_1, \ldots, \varrho_n$ die Wurzeln des Polynoms $\varrho^n + a_1 \varrho^{n-1} + \cdots + a_n$ bedeuten.

Ist ϱ_ν eine Wurzel, deren absoluter Betrag bei keiner anderen auftritt, so liefert Satz 6 nach kurzer Rechnung die Zahlen

$$c_i = \varrho_\nu^{i-1} \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

und sodann die Übertragung:

Satz 11: Eine Lösung von (IV) gehöre gemäß Satz 10 zu einer charakteristischen Wurzel ϱ_ν, deren absoluter Betrag bei keiner andern auftritt. Dann ist x zuletzt für alle t von 0 verschieden und es gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)|} = |\varrho_\nu|, \quad \lim_{t\to\infty} \frac{x(t+1)}{x(t)} = \varrho_\nu.$$

Bei geeigneter Erklärung von $\operatorname{Arc} x(t)$ und $\sqrt[t]{x(t)}$ (s. S. 91) gilt ferner

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{x(t)} = \varrho_\nu$$

und, falls $\varrho_\nu \neq 0$,

$$\lim_{t\to\infty} (\operatorname{Arc} x(t+1) - \operatorname{Arc} x(t)) = \operatorname{Arc} \varrho_\nu.$$

Für $|\varrho_\nu| < 1$ gilt: $x \to 0$.

Für $|\varrho_\nu| > 1$ gilt: $x \to \infty$.

Die Untersuchung von Lösungen, die zu einer charakteristischen Wurzel ϱ_ν gehören, deren absoluter Betrag mehrfach auftritt, verläuft nun ganz analog wie l. c. S. 242—252. Das Ergebnis ist

Satz 12: Für jede Lösung von (IV), welche gemäß Satz 10 zu einer charakteristischen Wurzel ϱ_ν gehört, deren absoluter Betrag im ganzen bei genau p charakteristischen Wurzeln vorkommt (mehrfache mehrfach gezählt), ist zuletzt

$$|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+p-1)| \neq 0$$

und es gilt:

$$\lim_{t\to\infty} \sqrt[t]{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+p-1)|} = |\varrho_\nu|.$$

Werden die genannten p charakteristischen Wurzeln mit $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ und ihre symmetrischen Funktionen mit $s_1, \ldots, s_p$ bezeichnet:

$$\begin{aligned} s_1 &= \sigma_1 + \cdots + \sigma_p \\ s_2 &= \sigma_1\sigma_2 + \cdots\cdots + \sigma_{p-1}\sigma_p \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ s_p &= \sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_p, \end{aligned}$$

so gilt ferner:

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t+p) - s_1 x(t+p-1) + s_2 x(t+p-2) - + \cdots + (-1)^p s_p x(t)}{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+p-1)|} = 0$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t+p+1) - s_1 x(t+p) + s_2 x(t+p-1) - + \cdots + (-1)^p s_p x(t+1)}{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+p-1)|} = 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{x(t+n) - s_1 x(t+n-1) + s_2 x(t+n-2) - + \cdots + (-1)^p s_p x(t+n-p)}{|x(t)| + |x(t+1)| + \cdots + |x(t+p-1)|} = 0.$$

(Für $p = 1$ sind dies die Beziehungen[14])

$$\frac{x(t+1)}{x(t)} \to \varrho_\nu, \quad \frac{x(t+2)}{x(t)} \to \varrho_\nu^2, \ \ldots, \quad \frac{x(t+n)}{x(t)} \to \varrho_\nu^n,$$

---

14) $\dfrac{x(t+1) - \sigma_1 x(t)}{|x(t)|} \to 0$ usw.; σ_1 ist das ϱ_ν.

deren erste in Satz 11 steht, während die übrigen wegen $x(t) \neq 0$ sofort daraus folgen.)

Wie in § 8 lassen sich auch hier durch Verwendung anderer Numerierungen andere Aussagen als Korollare zu Satz 12 gewinnen, für welche jedoch stets noch Spezialvoraussetzungen nötig sind. Für $n = 3$ erhält man diese Beziehungen aus den l. c. S. 252 angegebenen, wenn man log durch $\sqrt[t]{}$, x' und x'' durch $x(t+1)$ und $x(t+2)$, $\Re(\sigma_1)$ durch $|\sigma_1|$ ersetzt.