

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen
Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1929. Heft III

November-Dezembersitzung

München 1929

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München



Die Winkeldreiteilung des Schneidermeisters Kopf.

Von **Oskar Perron**.

Vorgelegt in der Sitzung am 9. November 1929.

Herr Eugen Kopf, Schneidermeister in Ludwigshafen a. Rh., behauptet, daß eine von ihm ersonnene Konstruktion mit Lineal und Zirkel die genaue Dreiteilung des Winkels leiste. Die Behauptung ist natürlich falsch, und was Herr Kopf zu ihrer Begründung anführt, steht auf keinem höheren Niveau als man es sonst bei Winkelteilern und Kreisquadrirern gewöhnt ist. Um so überraschender ist es, daß mit der Konstruktion selbst ihr Entdecker doch eine wirklich glückliche Hand bewiesen hat; denn durch rechnerische Nachprüfung fand ich, daß sie im Verhältnis zu ihrer Einfachheit eine ganz erstaunlich gute Näherung liefert. Der Fehler ist für spitze Winkel im ungünstigsten Fall nur $8' 12''$, liegt also unter der Genauigkeitsgrenze der besten handlichen Zeichnung.

Die Konstruktion findet sich nicht in den einschlägigen Büchern von Enriques und Vahlen; die dort mitgeteilten Konstruktionen sind zum Teil viel ungenauer und nicht einfacher, zum Teil nur wenig genauer und dann bedeutend komplizierter, so daß die Kopfsche Konstruktion entschieden hübscher ist. Man darf aus diesem Umstand wohl mit ziemlicher Wahrscheinlichkeit schließen, daß die Konstruktion neu ist. Aber selbst, wenn sie irgendwo in einem vergessenen alten Schmöker stehen sollte, was man bei derlei Dingen nie wissen kann, ist sie immerhin wert, der Vergessenheit entrissen zu werden.

Die Konstruktion verläuft, wenn man sie von den unnötigen Linien befreit, folgendermaßen (in der Figur sind gar keine Hilfslinien unterdrückt, nicht einmal solche, die lediglich zur Konstruktion eines rechten Winkels dienen):

Man zeichne einen Halbkreis und den zu seinem Durchmesser AB senkrechten Radius MC . Durch C zeichne man den Kreisbogen CD mit dem Mittelpunkt B . Schließlich markiere man auf der Verlängerung von AB den Punkt E so, daß $CE = AB$ ist. Ist nun $\sphericalangle AMF = x$ der gegebene spitze Winkel, so bringe man die Gerade FB mit dem Kreisbogen CD zum Schnitt in G . Verbindet man dann G mit E , so ist $\sphericalangle AEG = y$ die Kopfsche Näherung für den dritten Teil von x .

Der funktionale Zusammenhang zwischen x und y ergibt sich aus dem Dreieck GBE . Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\sin\left(\frac{x}{2} - y\right)}{\sin y} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}};$$

daher zunächst

$$(1) \quad \cotg y = \frac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}},$$

und also

$$(2) \quad y = \operatorname{arc\,tg} \frac{\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}}{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}.$$

Um die Güte der Approximation zu finden, bilden wir den Fehler

$$(3) \quad f(x) = \frac{x}{3} - y.$$

Wenn man (2) differenziert, ergibt sich sogleich

$$(4) \quad f'(x) = \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3} + 1 + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}}{4 \left(\sqrt{3} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2} \right)},$$

und hieraus durch nochmalige Differentiation

$$(5) \quad f''(x) = \frac{-\sin \frac{x}{2}}{4\sqrt{2}\left(\sqrt{3} + \sqrt{2}\cos \frac{x}{2}\right)^2} < 0.$$

Für $x = 0$ und $x = \frac{\pi}{2}$ ist der Fehler $f(x) = 0$, wie man aus (2) oder auch direkt aus der Konstruktion ersieht. Aus dem negativen Vorzeichen der zweiten Ableitung folgt dann, daß $f(x)$ für $0 < x < \frac{\pi}{2}$ positiv, der Kopfsche Winkel also zu klein ist. Das Maximum des Fehlers ergibt sich aus $f'(x) = 0$; man findet

$$(6) \quad \cos \frac{x}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}},$$

also

$$\begin{aligned} \cos x &= 11 - 6\sqrt{3}, \\ x &= 52^{\circ} 34' 37'', \\ \frac{x}{3} &= 17^{\circ} 31' 32,3''. \end{aligned}$$

Der zugehörige Winkel y ergibt sich durch Einsetzen von (6) in (1); man findet so

$$\begin{aligned} \cotg y &= \sqrt{5 + 3\sqrt{3}} \\ y &= 17^{\circ} 23' 20,6''. \end{aligned}$$

Der maximale Fehler ist also, auf volle Sekunden aufgerundet, gleich

$$\frac{x}{3} - y = 8' 12''.$$

Übrigens benutzt Herr Kopf nicht genau die hier mitgeteilte Figur, sondern diejenige, welche aus ihr durch Hinzufügung ihres Spiegelbildes an der Achse AE hervorgeht. An Stelle des Winkels x betrachtet er dann den durch sein Spiegelbild verdoppelten Winkel als gegeben; natürlich muß dieser zunächst halbiert werden. Die Konstruktion ist dann für alle Winkel zwischen 0° und 180° anwendbar, aber natürlich wird auch der maximale Fehler verdoppelt.