Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

1928. Heft II
Mai- bis Julisitzung

München 1928
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften
in Kommission des Verlags R. Oldenbourg München

Über neue Eigenschaften der Klein'schen Kurve $x_i^3 x_k + x_k^3 x_l + x_l^3 x_i = 0$.

Von **W. Franz Meyer** in Königsberg i. Pr.

Dem Andenken F. Klein's gewidmet.

Vorgelegt von W. v. Dyck in der Sitzung am 9. Juni 1928.

Eine der fruchtbarsten Schöpfungen von F. Klein ist meines Erachtens die durch eine Gruppe G_{168} ternärer Kollineationen in sich übergehende ebene Kurve 4. Ordnung[1]) $c_4' \equiv x_i^3 x_k + x_k^3 x_l + x_l^3 x_i = 0$ vom Geschlecht Drei, die den Theorien der endlichen Gruppen und ihrer Invarianten, der Transformation 7. Ordnung der elliptischen Funktionen, und der Gleichungen 6. Grades zugleich angehört. Da die Gruppen- und Invariantentheorien einer c_4 vom Geschlecht Drei, und einer allgemeinen Fläche 3. Ordnung F_3, auf Grund der Geiser'schen Projektion der letzteren, bis zu einem gewissen Grade parallel laufen, so soll es sich im Folgenden darum handeln, zu vorgegebener c_4' eine geeignete zugehörige F_3 zu ermitteln, und vermöge deren (1,1)-deutigen Abbildung auf die Ebene diesen Zusammenhang für die Klein'sche c_4' nutzbar zu machen.

1. Bedeuten x_i, x_k, x_l, x_m die Koordinaten eines Raumpunktes, so lautet die nach x_m geordnete Gleichung einer F_3, von der wir annehmen dürfen, daß sie die Koordinatenecken A_i, . . ., A_m enthalte:

$$
\begin{aligned}
F_3 \equiv x_m^2 (a_i x_i + a_k x_k + a_l x_l + 2 x_m (b_i x_i^2 + \cdots + b_i' x_k x_l + \cdots)\\
+ (c_{ik} x_i^2 x_k + c_{ki} x_k^2 x_i + \cdots + c\, x_i x_k x_l) \equiv x_m^2 A + 2 x_m B\\
(1) \qquad + C = 0.
\end{aligned}
$$

[1]) S. z. B. R. Fricke, Algebra, Bd. II, Braunschweig 1926, Abschn. II.

Sei A_m das Projektionszentrum, von dem aus die Tangenten an die F_3 gehen, und seine Gegenebene ($x_m = 0$) die Projektionsebene. Dann ist die Gleichung des Geiser'schen Berührkegels, und zugleich seines Schnittes mit der Projektionsebene:

(2) $$A\,C - B^2 = 0.$$

Soll diese Gleichung mit der der c_4' übereinstimmen, so muß die Identität erfüllt sein:

(3) $$A\,C - B^2 \equiv x_i^3 x_k + x_k^3 x_l + x_l^3 x_i.$$

Die Vergleichung der Koeffizienten liefert zunächst das Verschwinden der Größen b_i, b_k, b_l; c_{il}, c_{ki}, c_{lk}, führt aber im Übrigen auf ein kompliziertes System von Beziehungen zwischen den weiteren Koeffizienten in (1), dessen vollständige Auflösung kaum ausführbar wäre. Indessen genügt es, eine möglichst einfache partikuläre Lösung zu ermitteln.

Führt man die drei Produkte $p_i = a_i b_i$ als selbständige Größen ein, so ergeben sich zwischen ihnen die Relationen:

(4) $$p_i(2p_l - p_i) = p_k(2p_i - p_k) = p_l(2p_k - p_l).$$

Diese besitzen vier Lösungen (die alle reell sind), unter denen sich die rationale: $p_i = p_k = p_l$ befindet. Legt man letztere zu Grunde, und partikularisiert in geeigneter Weise weiter, so erkennt man, daß die einfachste F_3 (1), die der Identität (3) genügt, die mit lauter gleichen Koeffizienten ist:

$$F_3' \equiv x_m^2(x_i + x_k + x_l) + 2\,x_m(x_k x_l + x_l x_i + x_i x_k) + (x_i^2 x_k$$
(I) $$+ x_k^2 x_l + x_l^2 x_i + x_i x_k x_l) \equiv x_m^2 A' + 2\,x_m B' + C' = 0.$$

Diese Fläche 3. Ordnung F_3' möge die „Klein'sche“ heißen.

2. Behufs Abbildung der F_3' auf die Ebene ist es vorab erforderlich, die Fläche nach Graßmann'scher Vorschrift durch drei kollineare Ebenenbündel zu erzeugen. Wählt man als deren Zentra die Punkte A_i, A_k, A_l, so hat man als Ansatz eine Determinantendarstellung der F_3' von der Form:

(5) $$\left| d_i x_m + a_k x_k + a_l x_l,\quad d_k x_m + b_l x_l + b_i x_i,\right.$$
$$\left. d_l x_m + c_i x_i + c_k x_k \right| = 0,$$

wo die Koeffizienten in der zweiten und dritten Reihe durch ein- resp. zweimalige Akzentuierung charakterisiert seien. Denkt man sich die rechte Seite von (5) nach Potenzprodukten der x_m, x_i, x_k, x_l entwickelt, und vergleicht dann mit (I), so ergibt sich ein System von Determinantenrelationen. Zieht man unter diesen zunächst die sieben heran, wo eine einzelne Determinante verschwindet, löst diese nach den Größen d_i, d_k, d_l; a_l, b_i, c_k nebst den akzentuierten auf, und zieht sodann die weiteren Relationen heran, so kommt als einfachste Lösung das System der Beziehungen:

$$(6)\qquad \begin{cases} d_i = -c_i = a_l - b_i, \\ d_k = -a_k = b_i - c_k, \\ d_l = -b_l = c_k - a_l, \end{cases}$$

nebst den beiden parallel laufenden.

3. Setzt man dies in (5) ein und ersetzt dann (5) durch drei lineare Gleichungen in den x, indem man jeweils die Elemente einer Reihe mit denselben drei Parametern z_i, z_k, z_l multipliziert und addiert, so hat man die gewünschte Graßmann'sche Erzeugung der F'_3 in algebraischer Gestalt.

Löst man nunmehr diese drei Gleichungen gemäß der Methode von Clebsch nach den x auf, so gelangt man zu der expliziten Darstellung der Klein'schen F'_3:

$$(\mathrm{II})\qquad \begin{aligned} x_i : x_k : x_l : x_m = z_i^3 - z_k^2 z_l : z_k^3 - z_l^2 z_i : z_l^3 - z_i^2 z_k \\ : (z_k + z_l)(z_l + z_i)(z_i + z_k) - z_i z_k z_l. \end{aligned}$$

Deutet man hier die z als Punkt-Koordinaten in einer Hilfsebene Z, so liefert (II) die (1,1)-deutige Abbildung der F'_3 auf diese Ebene. Den ebenen Schnitten der F'_3 korrespondiert ein Gebüsch von ebenen Kurven 3. Ordnung c'_3. Dieses Gebüsch hat sechs gemeinsame Grundpunkte A_r, die „Fundamentalpunkte" der Abbildung, auf deren Kenntnis die ganze Geometrie auf der F'_3, und damit auch die der c'_4 beruht.

Verwendet man statt der z nichthomogene Koordinaten x, y, indem man etwa setzt:

$$(7)\qquad x = z_i / z_l, \quad y = z_k / z_l,$$

so erkennt man unmittelbar die Richtigkeit des Satzes: „Die (nichthomogenen) Koordinaten der sechs Fundamentalpunkte sind siebente komplexe Einheitswurzeln." In der Tat, schreibt man zur Abkürzung:

$$(8) \qquad [\lambda] = e^{\lambda \frac{2 i \pi}{7}} \quad (\lambda = \pm 1, \pm 2, \pm 3,$$

so gilt für irgend einen der sechs Fundamentalpunkte (x, y):

$$\text{(III)} \qquad y = [\lambda], \quad x = [3\lambda].$$

Faßt man je zwei konjugiert-komplexe Fundamentalpunkte A_r, $\bar{A}_r$ $(r = 1, 2, 3)$ zusammen, so hat man die Tabelle:

$$\text{(III}'\text{)} \left\{ \begin{array}{llll} x_1 = [3], & y_1 = [1]; & \bar{x}_1 = [-3], & \bar{y}_1 = [-1]; \\ x_2 = [-1], & y_2 = [2]; & \bar{x}_2 = [1], & \bar{y}_2 = [-2]; \\ x_3 = [2], & y_3 = [3]; & \bar{x}_3 = [-2], & \bar{y}_3 = [-3]; \end{array} \right.$$

so daß von diesen 12 Koordinaten sechsmal zwei gemeinsame Werte besitzen.

4. Verbindet man je zwei konjugiert-komplexe Fundamentalpunkte A_r, $\bar{A}_r$ durch eine Gerade c_r, so sind diese drei reellen Geraden die Bilder der drei reellen Geraden auf der F_3'. Es empfiehlt sich daher, diese drei Geraden c_r $(r = 1, 2, 3)$ als die Seiten eines natürlichen Koordinatendreiecks Δ in der Ebene Z zu Grunde zu legen. Setzt man zur Abkürzung:

$$(9) \quad \sigma_1 = \sin\frac{2\pi}{7}, \quad \gamma = 2\cos\frac{2\pi}{7}, \quad \sigma_2 = \sin\frac{4\pi}{7}, \quad \sigma_3 = \sin\frac{6\pi}{7},$$

wo σ_1 und σ_2 den Faktor σ_1 enthalten, so liefert eine einfache Rechnung die Gleichung der drei Geraden c zunächst in der zyklischen Gestalt:

$$\text{(IV)} \quad \left\{ \begin{array}{l} c_1 \equiv \quad z_i \sigma_1 + z_l \sigma_2 - z_k \sigma_3 = 0, \\ c_2 \equiv \quad z_i \sigma_2 - z_l \sigma_3 + z_k \sigma_1 = 0, \\ c_3 \equiv - z_i \sigma_3 + z_l \sigma_1 + z_k \sigma_2 = 0, \end{array} \right.$$

wo sich jeweils der Faktor σ_1 herausheben läßt.

Man wird daher für weitere Untersuchungen statt der z die c als neue homogene Punktkoordinaten in der Ebene Z einführen. Durch Umkehrung von (IV) ergibt sich zuvörderst:

$$\text{(IV}'\text{)} \quad \left\{ \begin{array}{l} z_i = c_1 S_1 + c_2 S_2 + c_3 D_3, \\ z_l = c_1 S_2 + c_2 D_3 + c_3 S_1, \\ z_k = c_1 D_3 + c_2 S_1 + c_3 S_2, \end{array} \right.$$

wo unter S_1, S_2, D_3 die aus den σ-Größen (9) gebildeten Verbindungen zu verstehen sind:

(10) $\quad S_1 = \sigma_1^2 + \sigma_2\sigma_3, \quad S_2 = \sigma_2^2 + \sigma_1\sigma_3, \quad D_3 = \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2,$

die den gemeinsamen Faktor σ_1^2 besitzen, der also aus (IV′) herausgeht.

Ersichtlich empfiehlt es sich, in (IV) und (IV′) eine symmetrische Verbindung konjugiert-komplexer (siebenter) Einheitswurzeln als Grundelement einzuführen, am einfachsten die Größe $\gamma = e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{-2i\pi}{7}} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$. Hierbei ist zu beachten, daß γ der kubischen Gleichung genügt

$$\gamma^3 + \gamma^2 - 2\gamma - 1 = 0, \tag{11}$$

sodaß γ in (IV) und (IV′) nur bis zum zweiten Grade aufzutreten braucht.

Man erhält ohne Schwierigkeit die neuen Darstellungen:

$$(\mathrm{IV}_\gamma) \quad \begin{cases} c_1 \equiv z_i + z_l\gamma + z_k(1-\gamma^2) = 0, \\ c_2 \equiv z_i\gamma + z_l(1-\gamma^2) + z_k = 0, \\ c_3 \equiv z_i(1-\gamma^2) + z_l + z_k\gamma = 0; \end{cases}$$

$$(\mathrm{IV}'_\gamma) \begin{cases} z_i = c_1(-\gamma^2+\gamma+2) + c^2(2\gamma^2-1) + c_3\gamma(\gamma-2), \\ z_l = c_1(2\gamma^2-1) + c_2\gamma(\gamma-2) + c_3(-\gamma^2+\gamma+2), \\ z_k = c_1\gamma(\gamma-2) + c_2(-\gamma^2+\gamma+2) + c_3(2\gamma^2-1). \end{cases}$$

Ist man so im Besitze der Koordinaten der sechs Fundamentalpunkte, sowie der Beziehungen (IV_γ) und (IV'_γ), so lassen sich mittels der Methode, die ich neuerdings[1]) entwickelt habe, nicht nur die Gleichungen der 27 Geraden der F_3', sowie ihrer 45 Tritangentialebenen, sondern auch die der 28 Doppeltangenten der c_4' explizite hinschreiben:

„Die Koeffizienten aller dieser Gleichungen sind ganzrational in einer siebenten komplexen Einheitswurzel".

5. An die Darstellungen (IV_γ) und (IV'_γ) mögen sich noch einige weitere Bemerkungen anknüpfen.

Man bilde das Produkt π_c der drei Linearformen $c_1(z)$, $c_2(z)$, $c_3(z)$ in (IV_γ), so erhält man zunächst:

$$\begin{aligned} \pi_c \equiv u\{z_i^3 + \cdots - z_k^2 z_l - \cdots\} + v\{z_k^2 z_l + \cdots + z_k z_l^2 + \cdots \\ + z_i z_k z_l\}, \end{aligned} \tag{12}$$

[1]) Jahresbericht der deutschen Math.-V. 37 (1928), p. 74.

wo u und v die Werte haben:

(13) $$u = -\gamma^3 + \gamma = \gamma^2 - \gamma + 1, \quad v = -u.$$

Somit liefert (12) für die Gleichung $\pi_c = 0$, d. i. die Gleichung, der die drei reellen Geraden der F_3 ausschneidenden Tritangentialebene T_3':

(12') $$T_3' \equiv z_i^3 + \cdots - 2(z_k^2 z_l + \cdots) - (z_k z_l^2 + \cdots) - z_i z_k z_l = 0,$$

oder auch, mit Rücksicht auf (I) und (II):

(V) $$T_3' \equiv x_m - \sum_i^l x_i \equiv x_m - A' = 0.$$

Daraus folgt als Gleichung des Inbegriffes der drei entsprechenden reellen Doppeltangenten $t_2^{(1)}$, $t_2^{(2)}$, $t_2^{(3)}$ der c_4':

(13) $$t_2^{(1)} t_2^{(2)} t_2^{(3)} \equiv A'^3 + 2A'B' + C' = 0.$$

Die vierte reelle (stets isolierte) Doppeltangente t_2 der c_4' ist die Spur der Tangentialebene der F_3' im Punkte A_m, hat also zur Gleichung:

(14) $$t_2 \equiv A' = 0.$$

Damit nimmt die Gleichung der c_4' die kanonische Gestalt an:

(VI) $$c_4' \equiv t_2 t_2^{(1)} t_2^{(2)} t_2^{(3)} - (A'^2 + B)^2 = 0,$$

wo $A'^2 + B' = 0$ den durch die acht Berührungspunkte der vier Doppltangenten gehenden Kegelschnitt darstellt.

6. Führt man die rechte Seite von (13) aus, so kommt, bei zyklischem Fortschreiten der Indizes i, k, l:

(12') $$t_2^{(1)} t_2^{(2)} t_2^{(3)} \equiv (x_i^3 + \cdots) + 6(x_k^2 x_l + \cdots) + 5(x_k x_l^2 + \cdots) + 13 x_i x_k x_l = 0.$$

Es mögen zunächst die Ecken dieses Doppeltangentendreiecks ermittelt werden; diese sind die Basispunkte des Polarennetzes von (12').

Schreibt man wiederum nichthomogen $\xi = x_i/x_l$, $\eta = x_k/x_l$, so ergibt sich nach Elimination von ξ resp. η aus den Polarengleichungen, daß die Koordinaten η resp. ξ der fraglichen Ecken die Wurzeln der beiden kubischen Gleichungen sind:

$$\begin{cases} R_\eta \equiv \eta^3 - 3\eta^2 - 4\eta - 1 = 0, & (14_\eta) \\ R_\xi \equiv \xi^3 + 4\xi^2 + 3\xi - 1 = 0. & (14_\xi) \end{cases}$$

Das sind aber zwei zueinander reziproke Gleichungen. Bezeichnet man die Ecken mit (a), (b), (c), so darf man zyklisch setzen:

$$\xi_a \eta_b = \xi_b \eta_c = \xi_c \eta_a = 1. \tag{15}$$

Man beachte noch, daß vermöge der Substitution:

$$\eta = \sigma + 1 \tag{16}$$

die Gleichung (14_η) die reduzierte Gestalt annimmt:

$$\sigma^3 - 7\sigma - 7 = 0. \tag{17}$$

Andererseits bestimmen wir auch die Linienkoordinaten der drei Doppeltangenten. Man denke sich bereits die rechte Seite von (12′) in drei, jetzt lieber mit d_a, d_b, d_c bezeichnete Linearfaktoren zerlegt:

$$d_a d_b d_c \equiv (a_i x_i + a_k x_k + x_l)(b_i x_i + b_k x_k + x_l)(c_i x_i + c_k x_k + x_l). \tag{18}$$

Führt man die Multiplikation rechterhand aus, und vergleicht mit der rechten Seite von (12′), so ergibt sich, daß die Linienkoordinaten a_i, b_i, c_i resp. a_k, b_k, c_k die Wurzeln der beiden wiederum zueinander reziproken kubischen Gleichungen sind:

$$\begin{cases} \varrho_i^3 - 6\varrho_i^2 + 5\varrho_i - 1 = 0, & (19_i) \\ \varrho_k^3 - 5\varrho_k^2 + 6\varrho_k - 1 = 0, & (19_k) \end{cases}$$

sodaß man setzen darf:

$$a_i b_k = a_k b_l = a_l b_i = 1. \tag{20}$$

Man beachte, daß vermöge der Substitution:

$$\varrho_i = \sigma + 2 \tag{21}$$

die Gleichung (19_i) die nämliche reduzierte Gestalt (17) annimmt, wie oben (14_η).

Zum Schlusse sei bemerkt, daß das Auftreten der siebenten Einheitswurzeln in der c_4' auf gruppentheoretischem Wege schon früher erkannt worden ist (s. Fricke, l. c.).

Dagegen scheint der innere, analytische wie geometrische Grund dieses Zusammenhanges, auf den ich noch weiterhin zurückzukommen gedenke, erst durch die obigen Entwickelungen an den Tag gefördert zu sein.

Königsberg i. Pr. Anfang Mai 1928.