

Sitzungsberichte

der

mathematisch-naturwissenschaftlichen

Klasse

der

Bayerischen Akademie der Wissenschaften

zu München

Jahrgang 1945/46

München 1947

Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften

In Kommission beim Biederstein Verlag München



Die Analyse zu einem Satz von Minkowski

Von Peter Damer in München

(Eingegangen am 20. März 1984)

Der Minkowski-Satz aus der Zahlentheorie besagt, daß für jede reelle Zahl $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so daß für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq N$ ein n -tupel $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ existiert, das die Ungleichung

$$|x_1| \cdots |x_n| \leq \epsilon^n \quad (1)$$

erfüllt. Die Zahl N hängt von ϵ ab. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, wie groß N sein muß, damit (1) für ein gegebenes n und ϵ lösbar ist. Es wird gezeigt, daß für ein gegebenes ϵ die Zahl N nicht größer als $\frac{1}{\epsilon}$ sein muß.

Es ist zu erwarten, daß die Zahl N für ein gegebenes ϵ und n nicht größer als $\frac{1}{\epsilon}$ sein muß. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, wie groß N sein muß, damit (1) für ein gegebenes n und ϵ lösbar ist.

Es ist zu erwarten, daß die Zahl N für ein gegebenes ϵ und n nicht größer als $\frac{1}{\epsilon}$ sein muß. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, wie groß N sein muß, damit (1) für ein gegebenes n und ϵ lösbar ist.

Es ist zu erwarten, daß die Zahl N für ein gegebenes ϵ und n nicht größer als $\frac{1}{\epsilon}$ sein muß. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, wie groß N sein muß, damit (1) für ein gegebenes n und ϵ lösbar ist.

Es ist zu erwarten, daß die Zahl N für ein gegebenes ϵ und n nicht größer als $\frac{1}{\epsilon}$ sein muß. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, wie groß N sein muß, damit (1) für ein gegebenes n und ϵ lösbar ist.

Es ist zu erwarten, daß die Zahl N für ein gegebenes ϵ und n nicht größer als $\frac{1}{\epsilon}$ sein muß. In der vorliegenden Arbeit wird die Frage untersucht, wie groß N sein muß, damit (1) für ein gegebenes n und ϵ lösbar ist.

Die Ableitung $f'(x)$ ist $f'(x) = 2x + 1$. Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$.

Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$. Die Ableitung $f^{(4)}(x)$ ist $f^{(4)}(x) = 0$.

Die Ableitung $f^{(5)}(x)$ ist $f^{(5)}(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$. Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$.

Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$. Die Ableitung $f^{(4)}(x)$ ist $f^{(4)}(x) = 0$.

Die Ableitung $f^{(5)}(x)$ ist $f^{(5)}(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$. Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$. Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$.

Die Ableitung $f^{(4)}(x)$ ist $f^{(4)}(x) = 0$. Die Ableitung $f^{(5)}(x)$ ist $f^{(5)}(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$. Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$.

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

$$f(x) = x^2 + x + 1 \quad f'(x) = 2x + 1$$

Die Ableitung $f''(x)$ ist $f''(x) = 2$. Die Ableitung $f'''(x)$ ist $f'''(x) = 0$.

§. 4. Von der Auflösung der Gleichungen 2ten Grades.

Wird

$$\begin{aligned} Ax^2 + Bx + C &= 0 \\ \text{oder} \quad Ax^2 + Bx &= -C \\ \text{oder} \quad Ax^2 + Bx + \frac{B^2}{4A} &= -C + \frac{B^2}{4A} \end{aligned}$$

oder

$$\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$$

Wird also von dem quadratischen Member $\frac{B^2}{4A^2}$ abgezogen, so erhält man die Gleichung $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$, welche durch die Wurzel gezogen werden kann, und man erhält $x + \frac{B}{2A} = \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}}$ oder $x = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}}$. Man erhält also zwei verschiedene Lösungen, und diese sind die beiden Wurzeln der Gleichung. Man erhält also zwei verschiedene Lösungen, und diese sind die beiden Wurzeln der Gleichung. Man erhält also zwei verschiedene Lösungen, und diese sind die beiden Wurzeln der Gleichung.

Es sind also die beiden Wurzeln der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ gegeben durch

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Die Gleichung 2ten Grades hat also zwei verschiedene Lösungen, und diese sind die beiden Wurzeln der Gleichung.

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Wird also die Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ durch die Wurzel gezogen, so erhält man die Gleichung $\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 = \frac{B^2 - 4AC}{4A^2}$, welche durch die Wurzel gezogen werden kann, und man erhält $x + \frac{B}{2A} = \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}}$ oder $x = -\frac{B}{2A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - 4AC}{4A^2}}$.

$$x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$$

Die beiden Wurzeln der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sind also $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$. Die beiden Wurzeln der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sind also $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

Die beiden Wurzeln der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ sind also $x = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}$.

Thus, we have the following result: *Let α and β be real numbers.*

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} f(x, y) dx dy = \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} f(x, y) dy dx.$$

Proof. Let $A = [0, \alpha] \times [0, \beta]$.

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dx dy.$$

Apply Fubini's theorem to the double integral of $f(x, y)$ over A . \square

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} f(x, y) dy dx = \int_A f(x, y) dy dx.$$

So, the theorem is proved. \square

$$\int_0^{\alpha} \int_0^{\beta} f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dy dx = \int_0^{\beta} \int_0^{\alpha} f(x, y) dy dx.$$

In the foregoing, the order of integration does not affect the value of the double integral. In fact, the order of integration does not affect the value of the double integral for any region A in the plane. This is the content of the following theorem. \square

Theorem 10.10 (Fubini's Theorem).

Let $f(x, y)$ be a function that is integrable over a region A in the plane. Then, the double integral of $f(x, y)$ over A can be computed by integrating first with respect to x and then with respect to y , or vice versa.

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dy dx.$$

Proof. Let A be a region in the plane. Then, the double integral of $f(x, y)$ over A can be computed by integrating first with respect to x and then with respect to y , or vice versa.

Proof. Let A be a region in the plane. Then, the double integral of $f(x, y)$ over A can be computed by integrating first with respect to x and then with respect to y , or vice versa. \square

$$\int_A f(x, y) dx dy = \int_A f(x, y) dy dx.$$

aus dem Jahre

1815 bis 1871

1815

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

1815 bis 1871

Für $n \geq 1$ sei u_n definiert durch $u_0 = 1$ und $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n^2$. Dann gilt

1) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ konvergiert und es gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ist die Entwicklung des Grenzwertes $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in Potenzen von $\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

3) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ist die Entwicklung des Grenzwertes $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in Potenzen von $\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

4) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ist die Entwicklung des Grenzwertes $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in Potenzen von $\frac{1}{4}$.

5) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ist die Entwicklung des Grenzwertes $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in Potenzen von $\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

6) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ist die Entwicklung des Grenzwertes $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in Potenzen von $\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

7) $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ist die Entwicklung des Grenzwertes $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ in Potenzen von $\frac{1}{4}$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^{2^n}}.$$

