

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 100

M. KNEISSL UND R. SIGL

Tellurometermessungen 1958

(der I. Abteilung des D. G. F. I.)

im Basisvergrößerungsnetz

München

Mit 8 Figuren

Vorgelegt von Herrn Max Kneißl am 10. Juli 1959

MÜNCHEN 1959

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN

IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

INHALTSÜBERSICHT

Vorwort	5
1. Vorbemerkung	7
2. Meßprinzip des Tellurometers	7
3. Durchführung der Beobachtungen	8
4. Beobachtungsergebnisse	11
4. 1. Auswertung der Beobachtungen	11
4. 2. Genauigkeit der Resultate	14
5. Reduktion der gemessenen Schrägentfernungen D'	20
6. Überführung der reduzierten Seitenlängen auf die Punktzentren bzw. Festlegungen	25
7. Vergleich zweier Seiten mit dem Bayer. Hauptdreiecksnetz	28
8. Ausgleichung des Streckennetzes	29
8. 1. Rechenbezugsfläche	29
8. 2. Ausgleichungsverfahren	30
8. 3. Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen	31
8. 4. Durchführung der Ausgleichung	32
8. 5. Diskussion der Resultate, Genauigkeit	36
9. Zusammenfassung	37

VORWORT

Die instrumentelle und verfahrenstechnische Entwicklung der Entfernungsmessung mittels hochfrequent modulierten Lichtes bzw. mittels elektromagnetischer Wellen hatte in den letzten Jahren bedeutende Fortschritte zu verzeichnen. Deutschland hat an diesen Arbeiten und auch an der Erprobung dieser Verfahren für die Aufgaben der praktischen Landesvermessung – abgesehen von einigen Versuchen – nur geringen Anteil.

Mit den vorliegenden Tellurometermessungen im Basisvergrößerungsnetz München sollten deshalb erstmals eigene praktische Erfahrungen auf diesem neuen Gebiet der Geodäsie gesammelt werden. Im einzelnen war dabei beabsichtigt:

1. Festlegung des Netzes durch reine Streckenmessung,
2. Bestimmung der dabei erreichbaren Genauigkeit für die Seitenlängen und Punktlagen,
3. Untersuchung eines etwaigen Einflusses der meteorologischen Verhältnisse und der Geländegestalt auf die Messung der Laufzeiten elektromagnetischer Wellen.

Darüber hinaus soll nach vollständiger Ausmessung und Berechnung des Basisvergrößerungsnetzes nach unseren klassischen Methoden die Möglichkeit der Eichung lichtelektrischer und elektronischer Entfernungsmesser untersucht werden.

Die Deutsche Forschungsgemeinschaft stellte dafür eine vollständige Telluometerausrüstung, bestehend aus einem „Master-Gerät“, zwei „Remote-Geräten“, Barometern und Schleuderhygrometern zur Verfügung.

Mit Rücksicht darauf, daß die im Juli 1958 gelieferte Ausrüstung für die 1959 stattfindende Internationale Glaziologische Grönlandexpedition (EGIG) eingesetzt und ab November 1958 bei tiefen Temperaturen erprobt werden sollte, stand das Gerät nur kurzfristig zur Verfügung.

Die gesamten Beobachtungen wurden unter meiner Leitung von den Herren Dr.-Ing. R. SIGL (Bayerische Kommission für die Internationale Erdmessung) und Dipl.-Ing. O. EBERHARD (Deutsches Geodätisches Forschungsinstitut) ausgeführt. Die Auswertung und Ausgleichung der Messungen sowie den vorliegenden Bericht besorgte Herr Dr. R. SIGL.

M. KNESSL

1. VORBEMERKUNG

Das Tellurometer ist eines der wenigen elektronischen Entfernungsmeßgeräte, die schon vielfache praktische Verwendung erfahren haben. Es ist eingehend beschrieben in L. T. WADLEY: „The Tellurometer System of Distance Measurement“, Emp. Survey Review, Vol. XIV Nr. 105 u. 106, Deutsche Übersetzung: „Die Tellurometer-Methode zur Entfernungs-messung“, Sonderdruck der Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungs-wesen, Reihe III, Heft Nr. 2, Frankfurt 1957. – G. STRASSER: „Das Tellurometer“, ZfV 1957, Heft 9, S. 310–314. – R. SIGL: „Versuchsbeobachtungen mit dem Tellurometer“, ZfV 1958, Heft 2, S. 55–60.

2. MESSPRINZIP DES TELLUROMETERS

Strahlt man im Anfangspunkt einer Strecke eine genügend kurze Welle mit der Frequenz f aus und läßt diese im Endpunkt reflektieren, so kann man aus dem Phasenunterschied φ zwischen ausgesendeter Welle und zurückkehrender Welle die Laufzeit t der Welle bzw. die Entfernung zwischen den beiden Punkten ableiten, wenn die Ausbreitungsgeschwindigkeit c der Welle bekannt ist. Mit

$$t = \frac{\varphi}{2\pi \cdot f}$$

erhält man für die durchlaufene, d. h. doppelte Entfernung

$$s = c \cdot t = \frac{\varphi}{2\pi \cdot f} \cdot c. \quad (1)$$

Dabei ist noch die für Vakuum gültige Ausbreitungs- (Licht-) Geschwindigkeit c wegen der meteorologischen Verhältnisse zu reduzieren. Das Prinzip für die Messung des Phasenwinkels ist beim Tellurometer kurz das folgende: Das Master-Gerät sendet eine Trägerwelle von 3000 MHz aus, welche bei Meßstellung A mit 10 MHz frequenz- und amplitudenmoduliert wird (A-Frequenz). Die Remote- (Gegen-) Station empfängt diese Welle und sendet ebenfalls eine mit 9,999 MHz frequenz- und amplitudenmodulierte Trägerfrequenz von 3000 MHz aus, wobei sich durch Überlagerung der beiden Wellen eine Schwebungsfrequenz von 1 kHz ergibt. Nach Aussiebung dieser 1 kHz-Welle über eine Zwischenfrequenz und Trennung in amplituden- und frequenzmodulierten Anteil wird die vom amplitudenmodulierten Anteil stammende 1 kHz-Meßspannung in zwei zueinander senkrechte Spannungskomponenten zerlegt, die an die beiden Plattenpaare der Kathodenstrahlröhre angelegt werden, wodurch auf dem Bildschirm ein Leuchtkreis entsteht. Die 1 kHz-Meßspannung des frequenzmodulierten Anteils wird zur Dunkelsteuerung

benützt. Nachdem diese beiden 1 kHz-Wellen die Phasenbeziehung der beiden 10 MHz-Wellen wiedergeben, kann die Lage der Unterbrechung des Leuchtkreises in bezug auf einen Nullpunkt unmittelbar für die Messung des Phasenwinkels benützt werden.

Entsprechend der A -Frequenz von 10 MHz bedeutet ein voller Umlauf des Phasenindikators eine Laufzeit von einer Zehntel Mikrosekunde, d. h. die Ablesung A auf $\frac{1}{100}$ des Umlaufes gibt die Laufzeit auf $1 \cdot 10^{-9}$ Sekunden, bzw. die doppelte Entfernung auf 30 cm genau. Mit der Wellenlänge $\lambda_A = 30$ m bei Meßstellung A ergibt sich damit

$$s = t \cdot c = n_A \cdot \lambda_A + \frac{A}{100} \cdot \lambda_A = \left(n_A + \frac{A}{100} \right) \lambda_A, \quad (2)$$

d. h. es ist zunächst nur eine Doppelentfernung von 30 m eindeutig bestimmbar; es ergibt sich also nur der Bruchteil, um den die Entfernung über eine noch zu bestimmende Anzahl n_A ganzer Wellenlängen hinausgeht. Man benötigt deshalb für die Messung noch andere Meßfrequenzen bzw. Wellenlängen. Aus hier nicht näher zu erläuternden Gründen werden noch folgende weitere Frequenzen benützt:

$$\text{Frequenz } B = 9,990 \text{ MHz; Wellenlänge } \lambda_B = \lambda_A \cdot 1,001$$

$$\text{Frequenz } C = 9,900 \text{ MHz; Wellenlänge } \lambda_C = \lambda_A \cdot 1,01$$

$$\text{Frequenz } D = 9,000 \text{ MHz; Wellenlänge } \lambda_D = \lambda_A \cdot 1,1$$

Werden die Ablesungen am Bildschirm für die verschiedenen Frequenzen mit B, C, D bezeichnet, so erhält man für die Entfernung noch folgende Gleichungen

$$s = n_B \cdot \lambda_B + \frac{B}{100} \cdot \lambda_B = \left(n_B + \frac{B}{100} \right) \cdot \lambda_B \quad (3)$$

$$s = n_C \cdot \lambda_C + \frac{C}{100} \cdot \lambda_C = \left(n_C + \frac{C}{100} \right) \cdot \lambda_C \quad (4)$$

$$s = n_D \cdot \lambda_D + \frac{D}{100} \cdot \lambda_D = \left(n_D + \frac{D}{100} \right) \cdot \lambda_D \quad (5)$$

Setzt man die Ablesungen A, B, C und D ein und bildet die Differenzen der Messungen B, C und D gegen A , so erhält man die Anzahl der ganzen Wellenlängen bzw. die Laufzeit t in dezimaler Folge. Bleibt die doppelte Entfernung $s \leq 1000 \cdot \lambda_A = 30$ km, so ist stets eine eindeutige Bestimmung der doppelten Entfernung möglich, weil sich dann für die Messungen A und B die gleiche Anzahl ganzer Wellenlängen ergibt, $n_A = n_B$. Für größere Entfernungen wird das Verfahren wieder unbestimmt. Da man die Entfernung zwischen zwei Punkten aber immer auf 15 km genau kennen wird, ist die Benützung einer weiteren Meßfrequenz nicht notwendig.

3. DURCHFÜHRUNG DER BEOBACHTUNGEN

Die Messungen im Basisvergrößerungsnetz München erfolgten in der Zeit vom 21. August bis 19. September 1958. Wegen der im gleichen Zeitraum durchgeführten Messung der „Basis München“ (Invardrahtmessung) standen jedoch nur 14 Meßtage (20.–22. Aug.,

4., 5., 8., 10.–13., 15., 17.–19. September) zur Verfügung. Aber auch an diesen Tagen war der Messungsablauf nicht durch den Zeitbedarf für die eigentliche Messung, sondern dadurch bestimmt, daß für die Einrichtung von Haupt- und Gegenstation vielfach nur wenige Stunden ein Meßwagen vorhanden war und überdies die Stationen für die gleichfalls stattfindenden Winkelmessungen im Basisvergrößerungsnetz von den Nachmittagsstunden an freigehalten werden mußten. Am 5. u. 6. November konnte noch die Entfernung München–Hohenpeißenberg bestimmt werden; die außerdem noch vorgesehene Messung der Dreiecksseite I. O. München–Wendelstein mußte wegen Betriebsruhe der Wendelsteinbahn ausfallen.

Für eine erste Überprüfung des Gerätes und zur Einübung der Beobachter sind vorher an drei Tagen Probemessungen auf dem „Normalkilometer München“ im Ebersberger Forst vorgenommen worden. Obgleich diese Messungen über kurze, genau festgelegte Strecken (360–792 m) über eine etwaige Additionskonstante des Tellurometers¹ Aufschluß geben könnten, sollen diese nicht weiter benützt werden.

Entsprechend der Aufgabenstellung ist folgende Beobachtungsanordnung gewählt worden: Gemessen wurden alle in der Abb. 1 eingetragenen Visuren, insgesamt 15 verschiedene Seiten. Die kürzeste Seite (Basis Nord–Basis Süd) mißt 8,2 km, die längste (Schweitenkirchen–Basis Nord) beträgt 46,8 km. Zur Eichung des Tellurometers ist außer der einzigen, der Länge nach bekannten Dreiecksseite I. O. München–Schweitenkirchen mit 41,0 km noch die 56,3 km lange Seite I. O. München–Hohenpeißenberg bestimmt worden. Zur Erfassung etwaiger unkontrollierbarer instrumenteller Veränderungen (in der Meßfrequenz, Anzeige der Quarztemperatur etc.) ist zu Beginn und am Ende der Arbeiten die Seite Basis Süd–Basis Nord abgeleitet worden. Eine dritte Messung auf dieser Seite erfolgte noch dazwischen, weil sich mehrfach am Haupt-Gerät eine zu hohe Anzeige für die Empfangsfeldstärke² ergab.

Zur Untersuchung eines etwaigen Einflusses der Geländegestalt auf die Laufzeitmessung und sich daraus ergebender Unterschiede zwischen Hin- und Rückmessung ist das erste Vergrößerungsdreieck Basis Nord–Basis Süd–Parsdorf an zwei Tagen vollständig ausgemessen worden. Wie auf Grund der Geländegestalt (geringe Erhebungen, Wald, Grünland) und des genügenden Bodenabstandes der Visur zu erwarten war, zeigten sich keine nennenswerten Differenzen zwischen Hin- und Rückmessung. Mit Rücksicht auf die nahezu gleichen Geländeverhältnisse im gesamten Netz wurden die übrigen Seiten nur an einem Tag und ohne Gegenbeobachtung bestimmt. Lediglich die Seite München–Basis Süd, für die sich zwischen den mehrfachen Messungen des gleichen Tages Differenzen bis zu 0,19 m zeigten, wurde am darauffolgenden Tag nochmals bestimmt.

Für jede Seite sind durchschnittlich vier vollständige Messungen ausgeführt worden; dabei umfaßt jede Messung zwei Groablesungen für die Laufzeit (Frequenzen *A*, *B*, *C*, *D*) und einen Satz Feinalesungen für die Meßfrequenz *A* bei jeweils veränderter Trägerfrequenz. Temperatur, Druck und Feuchtigkeitsgehalt der Luft sowie die Quarztemperatur wurden jeweils unmittelbar vor und nach den Feinalesungen bestimmt. Der Zeitbedarf für eine Messung wird dabei vom Ablauf der Feinalesungen bestimmt. Unter einwandfreien Meßbedingungen benötigt man dafür durchschnittlich zwanzig Minuten, bei ungünstigen Verhältnissen (schwache Ausbildung und große Schwankung der Ablesestelle) dagegen mitunter bis zu einer Stunde und länger. In solchen Fällen setzt man die Messungen

¹ Im Prinzip ist das Instrument frei von Nullpunkts-Fehlern.

² Der Mangel – die Resultate wurden dadurch in keiner Weise verfälscht – konnte von Mr. GOWANS durch Einbau zweier neuer Widerstände und Isolierung eines Potentiometers behoben werden.

² München Ak. Abh. math.-nat. 1959 (Kneißl-Sigl)

Basisvergrößerungsnetz München

Maßstab 1 : 250 000

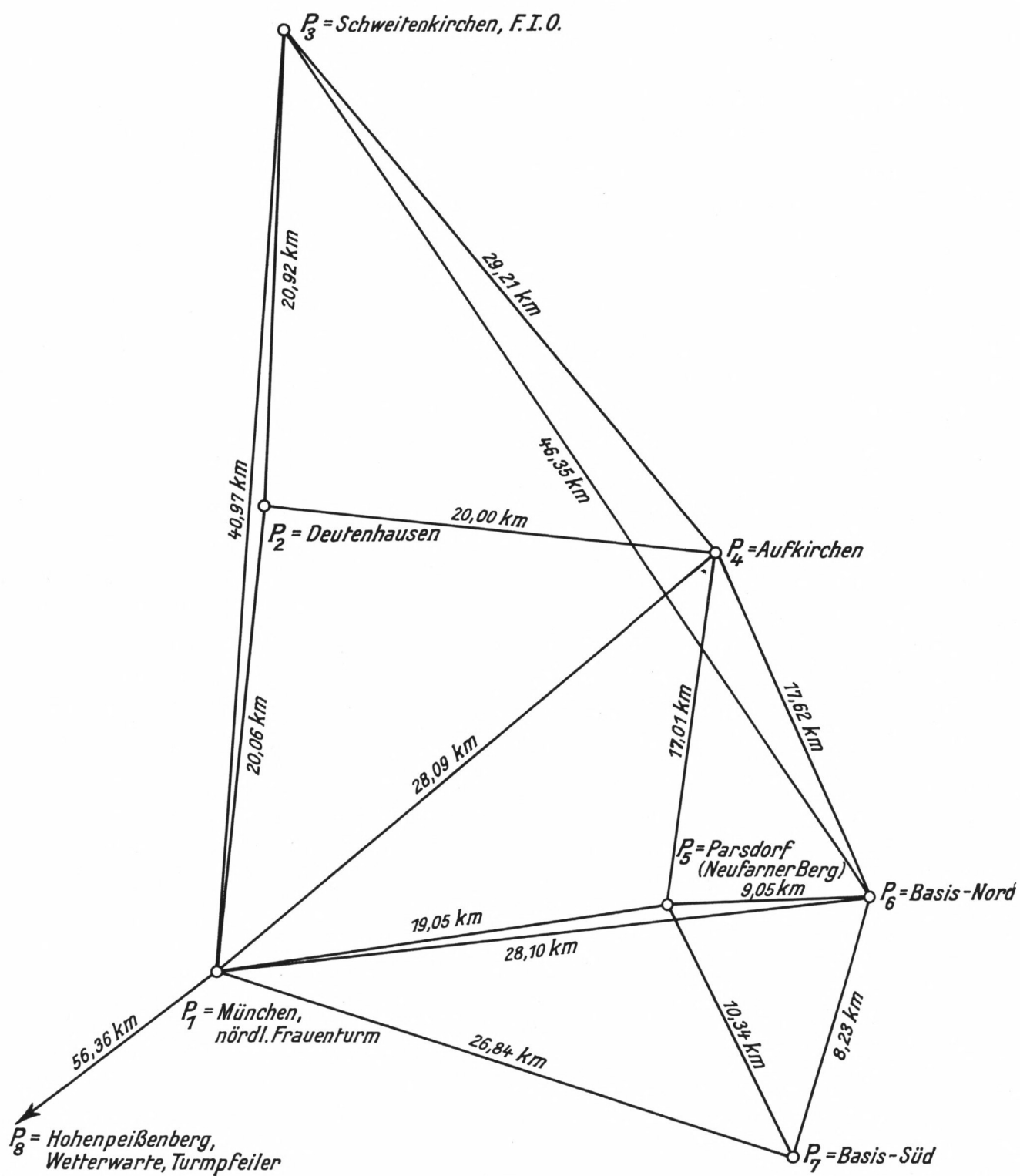


Abb. 1

zweckmäßig für längere Zeit aus oder bricht sie ganz ab, weil dabei einmal die Justierung der Kristalle (Abstimmung der Meßfrequenzen an Haupt- und Gegenstation) verloren geht, die Ablesegenauigkeit erheblich absinkt und überdies erheblich Strom verbraucht wird (Leistungsaufnahme an jedem Gerät etwa 15 Ah). Während der Messungen zeigte sich deutlich, daß die günstigsten Beobachtungsumstände primär von den Wetterverhältnissen und von der Tageszeit abhängen.

Dabei sind geschlossene Bewölkung, Nebel und Regen etwa gleich günstig. Bei starker Sonneneinstrahlung waren befriedigende Messungen nur am Vormittag und in den späten Nachmittagsstunden möglich; während der Mittagszeit dagegen schwankte die Ablesestelle – wenn überhaupt erkennbar – vielfach bis zu vier Einheiten (bei der A -Frequenz entspricht dies $4 \cdot 10^{-9}$ Sekunden, also 60 cm der einfachen Entfernung), so daß die Messung meist für einige Stunden ausgesetzt werden mußte.

Die Auswertung der Beobachtungen und die Berechnung der schrägen Entfernungen wurde stets am Tag der Beobachtung erledigt.

4. BEOBACHTUNGSERGEBNISSE

4. 1. AUSWERTUNG DER BEOBACHTUNGEN

Ein ausführliches Beispiel für die Berechnung der Entfernung aus der gemessenen Laufzeit der elektromagnetischen Welle ist schon früher gegeben worden.¹ Es wird deshalb genügen, hier die wichtigsten Beziehungen und einige Besonderheiten der Berechnung darzustellen.

Für alle Messungen – es lag kein Grund vor, auch nur eine der Messungen auszuscheiden – sind zunächst die Laufzeiten Θ' (über die doppelte Entfernung) zu bestimmen. Die wegen der Quarztemperatur verbesserte Laufzeit Θ erhält man dann zu

$$\Theta = \Theta' (1 + k), \quad (1)$$

wobei die Korrektur k für die abgelesene Quarztemperatur einer Eichkurve entnommen werden kann (Abb. 2).

Für die schräge Entfernung D' zwischen den Beobachtungsorten gilt dann

$$D' = \frac{1}{2} \frac{\Theta \cdot c}{n}. \quad (2)$$

Dabei bedeutet c die Ausbreitungsgeschwindigkeit der zur Laufzeitmessung benützten Trägerwelle ($\lambda = 10$ cm), die der Lichtgeschwindigkeit ziemlich nahe kommt. Die Reduktion der Lichtgeschwindigkeit auf die bei der Messung gültigen atmosphärischen Verhältnisse erfolgt mittels des Brechungsquotienten n ; mit den Bezeichnungen

¹ R. SIGL, Versuchsbeobachtungen mit dem Tellurometer, Z. f. V. 1958, Heft 2, S. 55–60.

Frequenz - Temperatur - Kurve
für Mastergerät Nr. 167,
Quarzkristall Nr. 2081 (10 MHz)

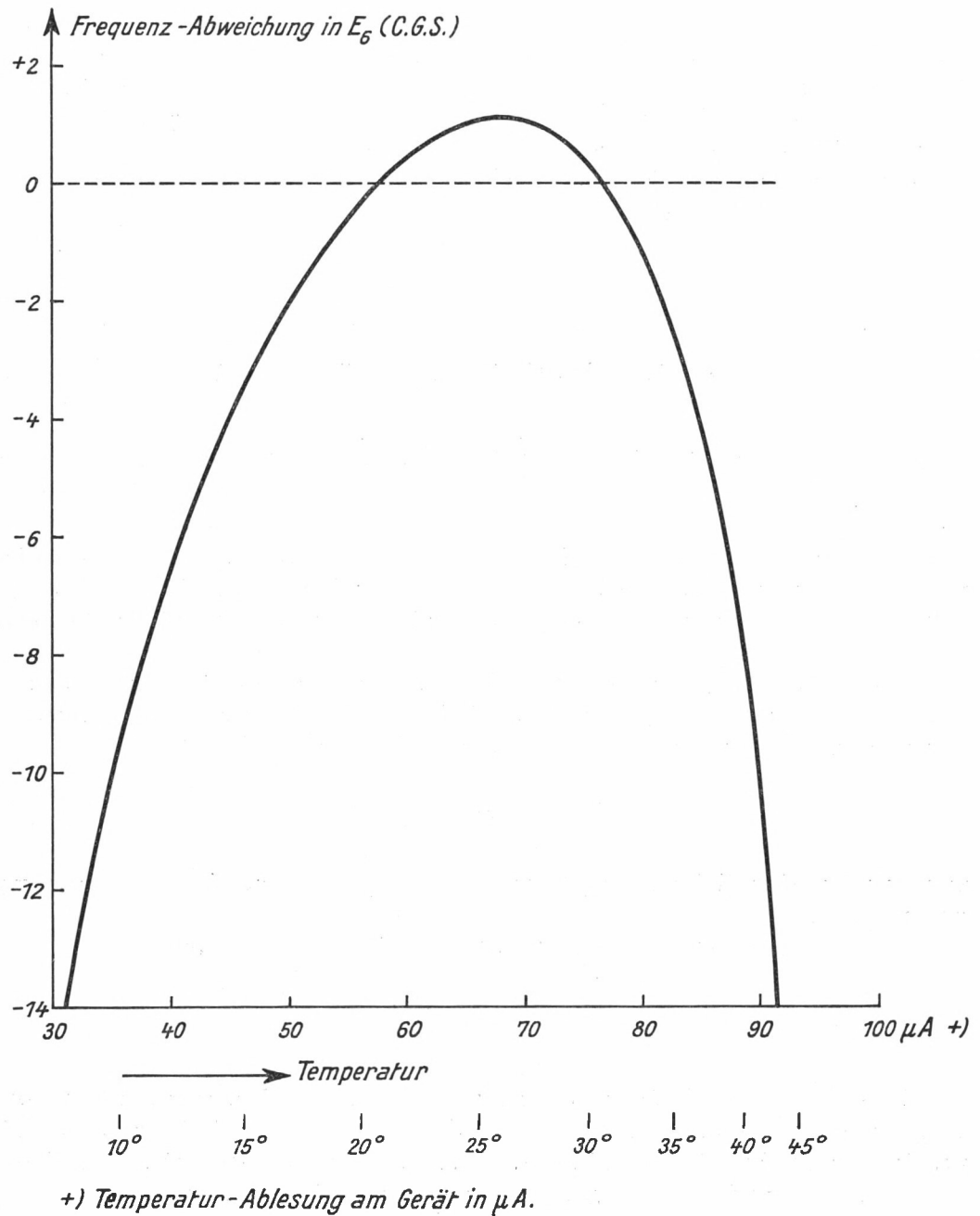


Abb. 2

B = Luftdruck in mm Hg

e = Dampfdruck der Luft in mm Hg

T = Lufttemperatur in °C

gilt für n der unmittelbar für die praktische Rechnung geeignete Ausdruck

$$(n-1) \cdot 10^6 = \frac{103,46}{273 + T} (B + K), \quad (3)$$

wobei

$$K = \frac{4744}{273 + T} \cdot e. \quad (4)$$

Die Bestimmung von n ist entweder nach den Gleichungen (3) und (4) oder auch mittels eines Nomogrammes möglich, doch erweist sich die numerische Rechnung als weitaus bequemer. Das Nomogramm ist deshalb nur für eine rohe Rechenkontrolle benützt worden.

Der Dampfdruck der Luft ist aus der Beziehung

$$e = E - 0,48 \cdot \frac{T-t}{610-t} \cdot B \quad (5)$$

abgeleitet worden, wobei E den gesättigten Wasserdampf für die Feucht-Temperatur t bedeutet. Die Anwendung der Gl. (5) gestaltet sich unter Verwendung einer Hilfstafel für den gesättigten Wasserdampf¹ sehr einfach; das Korrektionsglied kann entweder tabelliert oder in einem Nomogramm dargestellt werden, doch ist wieder die numerische Berechnung gleich günstig. Zu bemerken ist noch, daß alle Druck- und Temperaturablesungen wegen Teilungs- oder konstanter Fehler korrigiert wurden. Für die Lichtgeschwindigkeit im Vakuum ist der von der Internationalen Assoziation für Geodäsie vorgeschlagene Wert von $c = 299\,792,5$ km/sec. benützt worden.² Die danach für sämtliche Messungen gerechneten Schrägentfernungen D' sind in Tabelle 1 zusammengestellt. Dabei bedeuten die Angaben in

Spalte 1	gemessene Seite
Spalte 2	Datum
Spalte 3	Uhrzeit
Spalte 4	verbesserte Laufzeit θ in [10^{-9} Sekunden]
Spalte 5	Refraktionskoeffizient, bzw. $(n-1) \cdot 10^6$
Spalte 6	Schrägentfernung $D' = \frac{\theta \cdot c}{2n}$, [m], Mittelwerte
Spalte 7	Wetterverhältnisse

¹ JORDAN-EGGERT-KNEISSL, Handbuch der Vermessungskunde, 10. Auflage, Band III, Höhenmessung (Stuttgart 1956), Anhang S. [14].

² Resolution Nr. 1 der I. A. G., XI. Generalversammlung der I. U. G. G. in Toronto 1957.

4. 2. GENAUIGKEIT DER RESULTATE

Im folgenden wird versucht, an Hand der Schrägentfernungen D' wenigstens näherungsweise die Beobachtungsgenauigkeit zu ermitteln. Dabei soll keine allgemeingültige Gesetzmäßigkeit bestimmt, sondern lediglich die Grundlage für eine zweckmäßige Gewichtssetzung bei der nachfolgenden Ausgleichung der Beobachtungen gewonnen werden.

Tabelle 1

	1	2	3	4	5	6	7
1-2	München, n. Fr., Nord-Pfeiler – Deutenhausen, Sign., L. B.	10. 9. 58	10.00 10.35 11.00 11.30	133 819,04 818,48 818,78 818,74	310,0 312,9 312,6 312,0	20052,723 ,614 ,664 ,670 ,668	bedeckt, diesig bedeckt, diesig bedeckt, Nebel bedeckt, Nebel
1-3	München, n. Fr., Nord-Pfeiler – Schweitenkirchen, Signal, L. B.	4. 9. 58	12.35 13.30 14.00	237 422,61 421,68 421,17	305,6 300,0 299,9	40972,505 ,593 ,520 ,539	sonnig, Bodennebel sonnig, Bodennebel sonnig, Bodennebel
1-4	München, n. Fr., Nord-Pfeiler – Aufkirchen, Signal, L. B.	11. 9. 58	13.15 14.10 14.45	187 446,28 445,96 445,16	309,8 310,2 310,2	28088,792 ,733 ,733 ,753	diesig, wechselnde Bewölkung
1-5	München, n. Fr., Ost-Pfeiler – Parsdorf, Neufarner Berg, Signal, L. B.	5. 9. 58	14.15 14.30 15.00	127 123,31 123,33 122,74	312,1 308,3 309,1	19049,362 ,437 ,333 ,377	sonnig, klar sonnig, klar sonnig, klar
1-6	München, n. Fr., Ost-Pfeiler – Basis Nord, Signal, L. B.	5. 9. 58	10.00 10.25 11.00 11.30	187 502,58 502,73 502,81 502,55	314,2 315,4 315,7 315,2	28097,105 ,094 ,097 ,072 ,092	sonnig, Bodennebel sonnig, Bodennebel sonnig, Bodennebel sonnig, Bodennebel
1-7	München, n. Fr., Ost-Pfeiler – Basis Süd, Signal, L. B.	8. 9. 58 10. 9. 58	11.00 11.30 12.00 15.15 16.00	179 084,38 084,29 084,70 179 082,70 082,99	328,9 327,6 323,5 313,8 312,2	26835,250 ,272 ,443 ,426 ,490 ,458	sonnig, leicht bewölkt sonnig, leicht bew. bedeckt, Nebel bedeckt, Nebel
2-3	Deutenhausen, Signal, L. B. – Schweitenkirchen, Signal, L. B.	17. 9. 58	14.15 14.30 15.00 15.30	139 607,00 606,95 606,62 606,90	310,4 309,5 309,4 312,3	20920,072 ,083 ,036 ,017 ,052	bedeckt, Nebel bedeckt, Nebel bedeckt, Nebel bedeckt, Nebel

Bemerkung: Die bei den Seiten 1-2 bis 1-7 benutzte Abkürzung München, n. Fr., bedeutet München, nördlicher Frauenturm.

Tabelle 1 (Fortsetzung)

	1	2	3	4	5	6	7
2-4	Deutenhausen, Signal, L. B. – Aufkirchen, Signal, L. B.	12. 9. 58	12.00 12.35 13.00 13.30	133 501,85 501,83 501,94 501,46	304,3 305,2 301,4 301,0	20005,339 ,318 ,409 ,334 ,350	wechselnde Bewölk. Wind Wind Wind
3-4	Schweitenkirchen, Sig- nal, L. B. – Aufkirchen, Signal, L. B.	17. 9. 58	10.45 11.20 11.40 12.15	194 920,16 919,59 919,77 919,62	316,4 314,3 312,8 312,7	29 208,557 ,535 ,606 ,586 ,571	Nebel, bedeckt Nebel, bedeckt leichte Aufhei- terung
3-6	Schweitenkirchen, Sig- nal, L. B. – Basis Nord, Signal, L. B.	18. 9. 58	9.15 9.45 10.15 10.30	309 331,07 331,02 331,22 331,10	323,6 323,4 323,0 323,7	46 352,567 ,569 ,617 ,567 ,580	Nebel, Regen Sichtweite 20 m Sichtweite 500 m Sichtweite 1000 m
4-5	Aufkirchen, Signal, L. B. – Parsdorf (Neufarner Berg), Signal, L. B.	15. 9. 58	13.45 14.30 15.15	113 519,08 599,02 519,17	294,8 297,9 293,4	17 011,069 ,007 ,106 ,061	sonnig, klar sonnig, klar sonnig, klar
4-6	Aufkirchen, Signal, L. B. – Basis Nord, Signal, L. B.	15. 9. 58	10.00 10.30 10.50 11.15	117 615,05 614,90 614,76 614,4	308,5 307,0 305,8 304,4	17 624,617 ,618 ,621 ,580 ,609	sonnig, diesig sonnig, diesig sonnig, diesig sonnig, diesig
5-6	Parsdorf, Neufarner Berg, Signal, L. B., – Basis Nord, Signal, L. B.	21. 8. 58	10.30 10.80 11.15 11.40	60 383,58 383,61 383,50 383,41	311,8 310,1 311,6 307,8	9 048,450 ,470 ,440 ,471 ,455	bewölkt bewölkt aufgeheitert aufgeheitert
		22. 8. 58	13.25 13.50 14.15 11.40	60 383,17 383,05 382,65 383,12	304,0 302,9 300,0 299,4	9 048,460 ,485 ,418 ,494 ,464	bewölkt, Regenschauer bewölkt, Regenschauer Regen Regen
5-7	Parsdorf, Neufarner Berg, Signal, L. B. – Basis Süd, Signal, L. B.	21. 8. 58	13.45 14.25 14.45	68 994,04 994,44 994,44	304,3 306,9 307,6	10 338,801 ,834 ,827 ,821	sonnig, wechselnde Bewölkung sonnig, wechs. Bew.
		22. 8. 58	10.15 10.35 11.00	68 993,98 993,86 993,61	299,7 301,1 300,6	10 338,840 ,807 ,775 ,807	bedeckt, Wind Regen Regen
6-7	Basis Nord, Signal, L. B. – Basis Süd, Signal, L. B.	20. 8. 58	12.30 13.00 13.30 14.00 14.35	54 942,07 942,27 942,22 942,12 942,50	308,4 309,8 309,2 308,2 302,5	8,233,071 ,089 ,087 ,081 ,184 ,102	bedeckt bedeckt bedeckt bedeckt bedeckt

Tabelle 1 (Fortsetzung)

	1	2	3	4	5	6	7
6-7	noch Basis Nord – Basis Süd	13. 9. 58	9.30	54941,89	305,5	8233,068	sonnig, klar
			10.00	941,86	305,7	,061	sonnig, klar
			10.30	942,07	306,6	0,85	sonnig, klar
			11.00	941,83	306,3	,051	sonnig und Dunst
						,067	
	noch Basis Nord – Basis Süd	19. 9. 58	9.45	54942,73	319,6	8233,077	Nebel, bedeckt
			10.00	942,49	320,0	,038	Sicht 500 m
			10.30	942,39	320,1	,022	Sicht 1000 m
			14.00	942,41	316,3	,057	Sicht 2000 m
			15.00	942,06	315,7	,009	wechselnd bewölkt
			15.15	941,97	314,4	,006	Nebel, Sonne
1-8	München, n. Fr., West- Pfeiler – Hohenpeißen- berg, Wetter-Warte, Turmpfeiler 1952	5.11.58	14.40	376162,52	293,6	56368,801	bew., Bodennebel
			15.00	162,30	293,0	,802	bew., Bodennebel
			15.45	162,14	292,9	,783	bew., Bodennebel
						,795	
		6.11.58	11.45	376162,57	293,7	56368,803	} bewölkt, starker Bodennebel
			12.30	162,91	294,2	,826	
			13.00	163,00	294,2	,839	
			13.15	162,27	293,8	,752	
						,805	

Eine erste Beurteilung der Resultate ergibt: Mit Ausnahme der Seite München-Basis Süd bleiben die Differenzen zwischen wiederholten Messungen einer Seite immer innerhalb weniger cm. Dies gilt sowohl für die mehrfache Messung einer Seite am selben Tag als auch für die an verschiedenen Tagen oder in verschiedenen Richtungen ausgeführten Messungen, wie die Tagesmittel für die Seiten des vollständig ausgemessenen ersten Vergrößerungsdreieckes zeigen:

Seite	Tag	Länge	Meßrichtung
Basis Nord – Basis Süd	20. 8. 58	8233,102 m	→
	13. 9. 58	8233,067 m	←
	19. 9. 58	8233,035 m	↔
Basis Nord – Parsdorf	21. 8. 58	9048,455 m	→
	22. 8. 58	9048,464 m	←
Basis Süd – Parsdorf	21. 8. 58	10338,821 m	→
	22. 8. 58	10338,807 m	←

Auch die Differenz zwischen den unter stark unterschiedlichen atmosphärischen Verhältnissen ausgeführten Messungen der Seite Basis Nord-Basis Süd (vergleiche hierzu die Refraktionskoeffizienten) bleibt innerhalb von sieben Zentimetern. Dabei ist anzunehmen,

daß der Mittelwert vom 20. 8. durch die letzte Messung (8233,184 m) verfälscht ist; nachdem eine Ursache für die große Abweichung dieses Wertes nicht bekannt ist, wurde er für die weitere Rechnung mit verwendet.

Die Ergebnisse bestätigen einmal, daß das Instrument während der Beobachtung keine Veränderungen erfahren hat und zum anderen, daß systematische Fehler durch abnormale Gelände- oder atmosphärische Verhältnisse nicht vorhanden sind.

Über eine Gewichtsfestsetzung, insbesondere über die Abhängigkeit der Genauigkeit von der Länge der Seite ist damit noch keine Aussage möglich. Es ist deshalb für jede Seite aus den mehrfachen Messungen ein mittlerer Fehler $m_s = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$ der einmaligen Messung gerechnet worden; des weiteren die m. F. μ_s der Mittelwerte (Tabelle 2).

Tabelle 2

Seite	$\pm m_s$ cm	μ_s cm
1-2	4,5	2,2
1-3	4,7	2,7
1-4	2,8	1,6
1-5	5,3	3,0
1-6	1,7	0,8
1-7	7,8	3,5
2-3	3,1	1,6
2-4	4,0	1,2
3-4	3,1	1,6
3-6	2,5	1,2
4-5	5,0	2,9
4-6	1,9	1,0
5-6	2,5	0,9
5-7	2,6	1,1
6-7	3,2	0,8
1-8	2,5	0,9

In Abb. 3 sind die m_s als Ordinaten zu den Seitenlängen als Abszissen aufgetragen. Eine Abhängigkeit des m. F. m_s von der Seitenlänge ist nicht zu erkennen; interessant ist, daß die größten m_s den bei sonnigem Wetter ausgeführten Beobachtungen zu kommen.

Die Beobachtungen sind zu wenig zahlreich, um daraus einen weiterreichenden Schluß ziehen zu können; es ist aber sicher, daß starke Sonneneinstrahlung den Beobachtungsablauf stört (vergleiche auch den unterschiedlichen Zeitbedarf) und die Genauigkeit vermindert. Der m. F. der einmal gemessenen Seite ist noch ein zweites Mal gerechnet worden, und zwar aus den Einzelwerten der Laufzeiten, die für die verschiedenen Trägerfrequenzen gemessen wurden. Mit $m_{\theta'} = \sqrt{\frac{[v'v']}{n(n-1)}}$, wobei $v'_i = \frac{[\theta'_i]}{n} - \theta'_i$ ist, gilt

$$m'_s = m_{\theta'} \cdot \frac{c}{2}.$$

Tabelle 3 enthält die so gerechneten m. F. für alle Messungen sowie Durchschnittswerte m'_s für die Seiten und die daraus abgeleiteten m. F. μ'_s für die Mittelwerte.

Tabelle 3

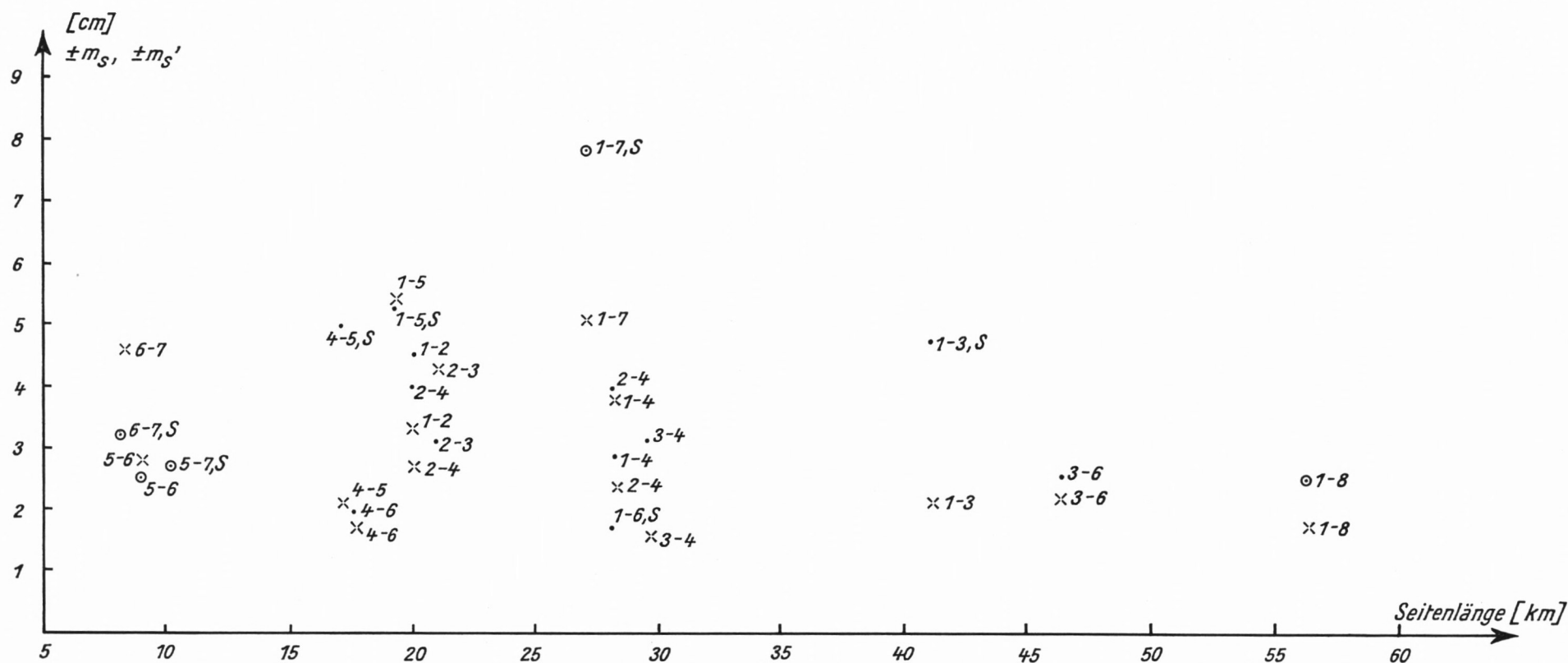
Seite	Dat.	$\pm m'_s$ [cm]						m'_s [cm]	μ'_s [cm]
		für die einzelne Messung							
		1.	2.	3.	4.	5.	6.		
1-2	10.9.	3,6	3,7	2,8	3,1			3,3	1,6
1-3	4.9.	2,1	2,2	1,9				2,1	1,2
1-4	11.9.	4,8	3,1	3,6				3,8	2,2
1-5	5.9.	5,7	4,8	5,7				5,4	3,1
1-6	5.9.	2,5	1,9	2,7	2,5			2,4	1,2
1-7	3.9.	6,3	5,8	4,9				5,1	2,3
	10.9.	4,3	4,2						
2-3	17.9.	4,5	4,5	4,3	4,0			4,3	2,2
2-4	12.9.	2,5	3,0	3,1	2,4			2,7	1,4
3-4	17.9.	2,2	1,5	1,3	1,5			1,6	0,8
3-6	18.9.	2,7	2,7	2,2	1,3			2,2	1,1
4-5	15.9.	1,6	2,5	2,2				2,1	1,2
4-6	15.9.	1,8	1,9	1,3	2,1			1,8	0,9
5-6	21.8.	2,4	2,5	2,8	2,5			2,8	1,0
	22.8.	3,1	3,0	2,4	2,3				
5-7	21.8.	4,0	4,2	3,7				4,3	1,7
	22.8.	5,2	3,7	4,8					
6-7	20.8.	3,1	3,4	3,4	3,6	3,1		4,6	1,2
	13.9.	6,1	4,8	4,6	5,1				
	19.9.	6,4	4,5	4,8	5,5	6,0	4,8		
1-8	5.11.	1,8	1,3	1,3				1,7	0,7
		1,0	1,6	1,8	3,1				

Aus Tabelle 3 ist folgendes zu ersehen: Die m'_s unterscheiden sich für die Messungen am gleichen Tag nur gering, d. h. die Messungen sind gleich genau und können durch einfache Mittelbildung zusammengefaßt werden. Die Durchschnittswerte m'_s streuen von Seite zu Seite nur wenig und aus ihrer graphischen Darstellung (Abb. 3) ist ebenfalls keine Abhängigkeit von der Seitenlänge festzustellen. Im Durchschnitt bleibt $m'_s < m_s$. Weiter fällt auf, daß m'_s nicht als charakteristische Größe einer Seite, sondern vielmehr als „Tageszahl“ zu werten ist; dies ist um so überraschender, als m'_s ein Maß für die Streuung der bei verschiedenen Trägerfrequenzen gemessenen Laufzeiten darstellt und damit Aufschluß über den Einfluß der Geländegestalt auf die Laufzeitmessung gibt. Zur weiteren Untersuchung dieser Verhältnisse seien noch drei Seiten herausgegriffen:

- a) München-Hohenpeißenberg (längste Seite)
- b) Basis Nord-Basis Süd (kürzeste Seite)
- c) München-Basis Süd (größter Beobachtungsfehler).

In den Abb. 4-6 ist jeweils für eine Messung der Verlauf der Feinablesungen in Abhängigkeit von der Trägerfrequenz dargestellt, wobei die ausgewählten Messungen als charakteristisch für die auf der entsprechenden Seite ausgeführten Messungen angesehen werden dürfen.

Die Seite München-Hohenpeißenberg weist hinsichtlich Geländegestalt die ungünstigsten Verhältnisse auf; die 56 km lange Visur läuft bei stark unterschiedlichem Bodenabstand zunächst über Wald und über das Gebiet des Starnberger und Ammersees und



Bezeichnungen:

. i.k = m.F. m_s Für die Seite i.k

⊙ i.k = m.F. m_s " " " i.k, gerechnet aus Beobachtungen an verschiedenen Tagen

× i.k = m.F. m_{s'} " " " i.k,

S = Beobachtung bei Sonne

Abb. 3. Darstellung der m.F. m_s bzw. m_{s'}

schließlich im letzten Teil über das tiefliegende Ampertal. Trotzdem treten bei den gemessenen Laufzeiten keine besonders auffallenden Werte auf (Abb. 4). Der Verlauf der Feinablesungen ist vorwiegend durch zufällige Ablesefehler bestimmt.

Für die kürzeste Seite Basis Nord–Basis Süd ergibt sich für nahezu alle Messungen der in Abb. 5 dargestellte Verlauf der Feinablesungen. Die starken Schwankungen ($\Delta_{max} \approx 4,5 \cdot 10^{-5}$ Sek. $\underline{\Delta}$ 0,67 m der Entfernung) lassen eine starke Oberflächenreflexion vermuten, die jedoch aus der Bodenbeschaffenheit – die Visur läuft in durchschnittlich 30 m Bodenabstand auf dem längsten Teil über einer Waldschneise – nicht zu erklären ist. Nachdem aber eine größere Anzahl von Nulldurchgängen auftritt, muß ein merklicher Unterschied zwischen den Weglängen der direkten und indirekten Strahlen vorhanden sein, die Ursache kann deshalb in einer Seitenreflexion durch Gegenstände innerhalb des Mikro-Wellenbündels (Bauteile des Signalgerüsts innerhalb des Öffnungswinkels von 10° sind unvermeidlich) zu suchen sein.

Außergewöhnlich schwierig war die Messung der Seite München–Basis Süd. Den für alle Messungen auf dieser Seite typischen Verlauf der Feinablesung zeigt Abb. 6. Die Ablesungen pendelten erheblich ($\Delta_{max} = 5 \cdot 10^{-9}$ Sek. $\underline{\Delta}$ 0,75 m) und es ist offensichtlich, daß der verfügbare Bereich der Trägerfrequenz für die Messung zu klein war (die Trägerfrequenz von 3 GHz kann in 20 Schritten von 2,8 bis 3,2 GHz geändert werden). Auch eine Änderung der Trägerfrequenzen in kleineren Schritten brachte keine Verbesserung. Eine Erklärung hierfür und für die aufgetretenen großen Differenzen zwischen den einzelnen Messungen (bis zu 0,19 m) auf Grund der Geländeverhältnisse ist nicht möglich: Die unmittelbar benachbarte Seite München–Basis Nord mit gleichem Geländeprofil konnte während derselben Zeit, also bei gleichen Wetterverhältnissen ohne Schwierigkeiten erledigt werden. Entsprechend früheren Untersuchungen¹ kann angenommen werden, daß der Mittelwert aus den gemessenen Laufzeiten dem wahren Wert am nächsten kommt. Über etwa verbleibende systematische Fehler kann nur die nachfolgende Ausgleichung Aufschluß geben.

Zusammenfassend kann gesagt werden: Aus den vorliegenden Beobachtungen ist eine Abhängigkeit der Genauigkeit von der Länge der gemessenen Seite nicht zu erkennen. Die auf verschiedene Arten gerechneten m. F. μ_s bzw. μ'_s für die Mittelwerte aus den mehrfachen Messungen unterscheiden sich für alle Seiten nur geringfügig und es erscheint daher berechtigt, für die nachfolgende Ausgleichung alle Beobachtungen als gleich genau ($p = 1$) anzusetzen.

5. REDUKTION DER GEMESSENEN SCHRÄGENTFERNUNGEN D'

Die Schrägentfernungen D' sind noch auf die Rechenbezugsfläche zu überführen, also wegen des Höhenunterschieds ΔH der Endpunkte und wegen der mittleren Meereshöhe H_m der Seite zu reduzieren; des weiteren ist der Übergang auf die Länge S der

¹ T. L. WADLEY, „Die Tellurometermethode zur Entfernungsmessung“ (Übersetzung), Sonderdruck der Nachrichten aus dem Karten- und Vermessungswesen, Reihe III, Heft 2, Frankfurt 1957.

Verlauf der Feinablesungen in Abhängigkeit von der Trägerfrequenz

(Sätze 1-11)

München - Hohenpeißenberg

$$\Theta = 376164,34 \cdot 10^{-9} \text{ Sekunden}$$

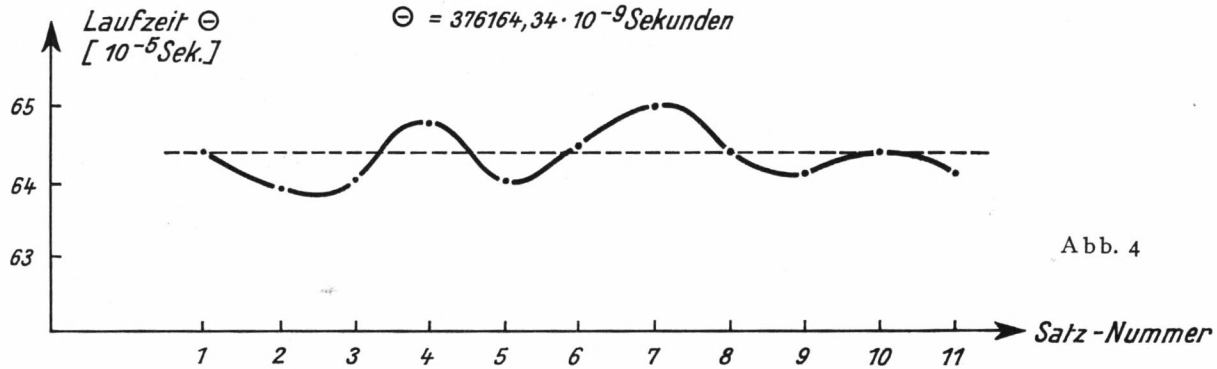


Abb. 4

Basis Nord - Basis Süd

$$\Theta = 54947,98 \cdot 10^{-9} \text{ Sekunden}$$

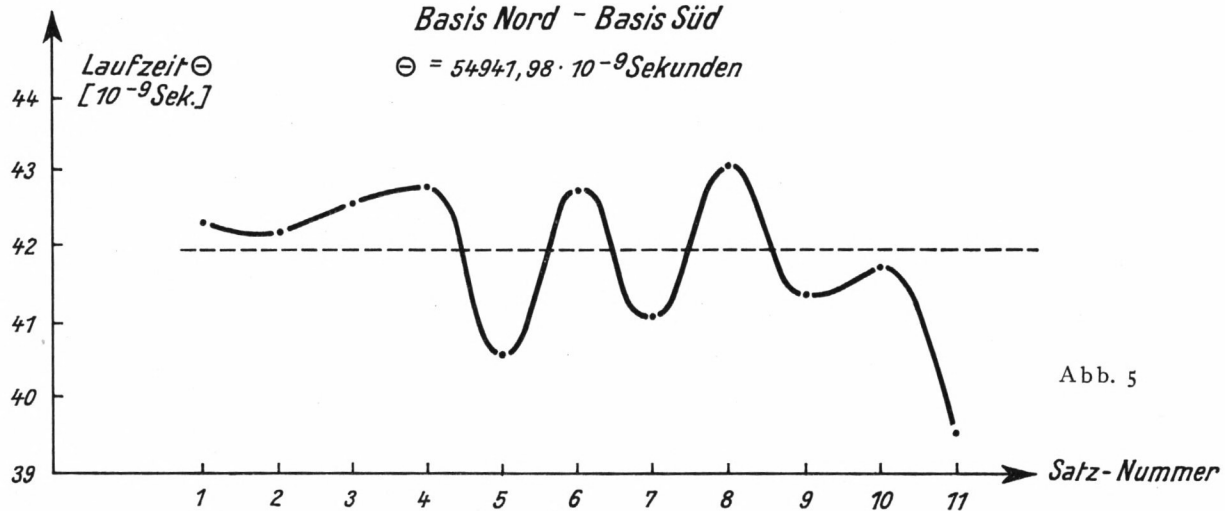


Abb. 5

München - Basis Süd

$$\Theta = 179084,18 \cdot 10^{-9} \text{ Sekunden}$$

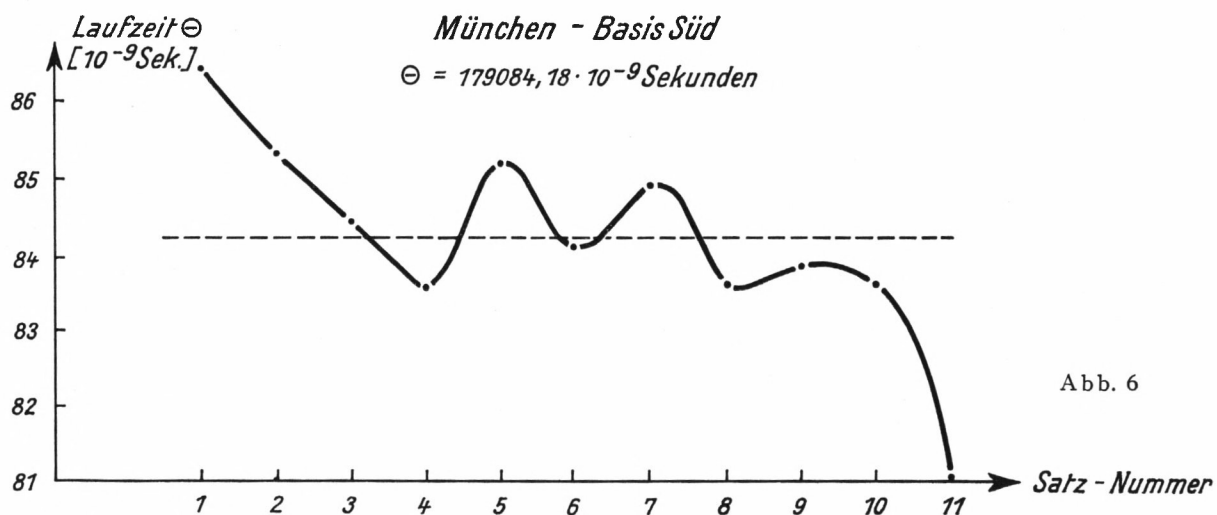


Abb. 6

geodätischen Linie notwendig.¹ Mit genügender Genauigkeit lautet der Ausdruck für die Reduktion²

$$S = \sqrt{\frac{(D' + \Delta H)(D' - \Delta H)}{\left(1 + \frac{H_1}{R}\right)\left(1 + \frac{H_2}{R}\right)}} + \frac{(D')^3}{24 R^2}, \quad (1)$$

wobei R den Krümmungsradius der Bezugsfläche bedeutet. Für die numerische Rechnung führt man die Reduktion vorzugsweise in drei Schritten mittels Näherungsausdrücken durch. Dabei gilt für die wegen Höhenunterschied ΔH verbesserte Seitenlänge

$$D = D' - \frac{(\Delta H)^2}{2R}, \quad (2a)$$

für die auf Meereshöhe Null reduzierte Seitenlänge

$$S' = D - D' \cdot \frac{H_m}{R}. \quad (2b)$$

Daß die in (2a) bzw. (2b) vernachlässigten weiteren Glieder der Reihenentwicklungen – das größte vernachlässigte Glied lautet in (2a) $\frac{1}{8} \cdot \frac{(\Delta H)^4}{(D')^3}$ und in (2b) $\frac{D' \cdot (H_m)^2}{R^2}$ – für meßbare Seiten ohne Einfluß bleiben, kann leicht gezeigt werden.

Mit den Abkürzungen

$$K_1 = -\frac{(\Delta H)^2}{2D'}, \quad K_2 = -D \frac{H_m}{R}, \quad K_3 = \frac{(D')^3}{24R^2} \quad (3)^3$$

erhält man schließlich die Länge der geodätischen Linie bzw. der sphäroidischen Seite zu

$$S = D' + K_1 + K_2 + K_3 = D' + [K]. \quad (4)$$

Es bleibt im folgenden noch zu prüfen, mit welcher Genauigkeit in (3) die Größen ΔH , H_m und R einzuführen sind; dabei sei der Einfachheit wegen und entsprechend der Meßgenauigkeit des Tellurometers gefordert, daß die durch Fehler $d\Delta H$, dH_m und dR in den Reduktionen verursachten Teilfehler < 5 mm bleiben sollen. Dann gilt:

a) Berechnung von K , notwendige Genauigkeit für ΔH ; es muß sein:

$$0,005 \text{ m} > dK_1 = -\frac{\Delta H \cdot d\Delta H}{D'}. \quad (5)$$

Rechnet man mit einem bestimmten Fehler $d\Delta H$ des Höhenunterschiedes, so darf der Höhenunterschied ΔH für eine fest vorgegebene Seitenlänge einen bestimmten Betrag nicht überschreiten, d. h. es muß sein:

$$\Delta H_{[m]} < d\Delta H_{[m]} \cdot 5 \cdot D'_{[km]}. \quad (6)$$

¹ Dabei wird der geringfügige Längenunterschied zwischen Sehne und Bogen für die Bahnkurve der Welle vernachlässigt; der Betrag erreicht für meßbare Dreiecksseiten selbst bei extremen atmosphärischen Verhältnissen nur wenige mm.

² K. RINNER, Über die Reduktion großer elektronisch gemessener Entfernungen, Z. f. V. 1956, Heft 2.

³ Dabei ist es bedeutungslos, ob bei der Berechnung von K_2 und K_3 für die Seitenlänge D' oder die schrittweise verbesserten Werte D oder S' benutzt werden.

Einige Werte für Seitenlänge und maximal zulässigen Höhenunterschied für $d \Delta H = 0,5$ m enthält die Tabelle 4:

Tabelle 4

Seitenlänge	$\Delta H_{zul.}$
1 km	10 m
5 km	50 m
10 km	100 m
20 km	200 m
30 km	300 m
40 km	400 m
50 km	500 m

b) Berechnung von K_2 , notwendige Genauigkeit von H_m und R . Der Fehler in K_2 ergibt sich zu

$$dK_2 = -\frac{D}{R} dH_m + \frac{1}{R^2} \cdot D \cdot dR. \quad (7)$$

Erstes und zweites Glied seien dabei getrennt untersucht; soll wieder $\frac{D}{R} dH_m < 0,005$ m bleiben, so ergeben sich mit $R = 6370$ km die in Tab. 5 eingetragenen, für verschiedene Seitenlängen maximal zulässigen dH_m .

Tabelle 5

Seitenlänge	$dH_{m \text{ zul.}}$
1 km	31,85 m
10 km	3,18 m
20 km	1,59 m
30 km	1,06 m
40 km	0,80 m
50 km	0,64 m

Die Tabellen 4 und 5 zeigen, daß man in den weitaus meisten Fällen die Höhen der Instrumentenstandpunkte nur auf etwa 0,5 m genau benötigt. Bei den vorliegenden Messungen konnten für die meisten Punkte die Instrumentenhöhen aus Nivellements bzw. trigonometrischen Höhenmessungen abgeleitet werden. Dagegen mußten die Signalhöhen für Deutenhausen, Aufkirchen und Parsdorf unter Verwendung der aus der topographischen Karte 1 : 25 000 entnommenen Geländehöhen berechnet werden. Nachdem es sich aber um alte trigonometrische Punkte bzw. ausgezeichnete Geländepunkte handelt, darf bei den Höhenangaben mit einer Genauigkeit von $\pm 0,5$ m gerechnet werden.

Zu bemerken ist noch, daß die Reduktion mittels barometrischer Höhen, selbst wenn diese sehr sorgfältig gemessen werden, nur in den seltensten Fällen befriedigend sein wird.

Für die notwendige Genauigkeit von R für die Berechnung des zweiten Gliedes gibt Gl. (7) die Bedingung

$$\frac{1}{R^2} H_m \cdot D \cdot dR < 0,005 \text{ m}. \quad (8)$$

Eine erste Abschätzung zeigt: Für $D = 60$ km, $H_m = 1$ km muß $dR < 3,4$ km bleiben. Will man also die gemessenen Seitenlängen auf eine ellipsoidische Rechenfläche reduzieren, so kann offenbar nicht mit einem mittleren Erdradius $R = 6370$ km gerechnet werden; wie die folgenden, für das Besselipsoid gültigen Zahlenwerte zeigen, ist auch ein Gaußscher Krümmungsradius $R = \sqrt{MN}$, etwa für die Mitte der Seite, in den meisten Fällen ungeeignet.

Breite	Azimut α		$R = \sqrt{MN}$ [km]	$R_\alpha - R_{max}$ [km]
	$\alpha = 0$ $R_\alpha = M$ [km]	$\alpha = 90^\circ$ $R_\alpha = N$ [km]		
45°	6367	6388	6377	11
50°	6372	6390	6381	9

$R_\alpha - R_{max}$ erreicht in mittleren Breiten durchschnittlich 10 km; daß ein Fehler dR in dieser Größe nur in wenigen Fällen zulässig ist, zeigt die Tabelle 6. Die eingetragenen $dR_{zul.}$ sind entsprechend Gl. (8) für verschiedene Werte von H_m und D gerechnet.

Tabelle 6

		$dR_{zul.}$ für					
D	H_m	0,5 km	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
10 km		40,7	33,9	29,1	25,4	22,6	20,3
20 km		20,3	17,0	14,5	12,7	11,3	10,2
30 km		13,6	11,3				
40 km		10,2					
50 km							
60 km							

$dR_{zul.} < 10$ km

Es ist daher allgemein zweckmäßiger, für die Mittelbreite φ_m und das Azimut α der zu reduzierenden Seite den Krümmungsradius zu bestimmen. Dafür ist jedoch keine strenge Rechnung nach dem Eulerschen Satz notwendig; R kann mit genügender Genauigkeit aus Hilfstafeln entnommen werden.¹

Für die Berechnung von $K_3 = \frac{(D')^3}{24 R^2}$ schließlich läßt sich der für die numerische Berechnung bequeme Ausdruck

$$K_{3[m]} = \frac{(D')^3}{973,8} [D' \text{ in } 10 \text{ km}] \quad (9)$$

verwenden.

Für die Berechnung der Reduktionen sind die in Tab. 7 zusammengestellten Höhen benutzt worden. Die Reduktionen K_1 bis K_3 und deren Summe $[K]$ enthält die Tabelle 8.

¹ Eine Tafel der $\lg R$ für das Besselipsoid enthält das Handbuch der Vermessungskunde, JORDAN-EGGERT-KNEISSL, 10. Auflage, Band IV/1 (Stuttgart 1958), S. 60.

Tabelle 7

Punkt Nr.	Punkt-Bezeichnung	H [m]	Bemerkung
1	München, n. Fr., Nordpfeiler	599,8	trig. Höhenm.
	München, n. Fr., Westpfeiler	599,8	trig. Höhenm.
	München, n. Fr., Ostpfeiler	599,8	trig. Höhenm.
2	Deutenhausen, Signal, Tisch	533,0	{ Geländehöhe + Signalthöhe
3	Schweitenkirchen, Signal, Tisch	577,1	{ Nivellementshöhe + Signalthöhe
4	Aufkirchen, Signal, Tisch	529,7	{ Geländehöhe + Signalthöhe
5	Parsdorf (Neufarner Berg), Signal, Tisch	571,2	{ Geländehöhe + Signalthöhe
6	Basis Nord, Signal, Tisch	567,1	{ Nivellementshöhe + Signalthöhe
7	Basis Süd, Signal, Tisch	644,2	{ Nivellementshöhe + Signalthöhe
8	Hohenpeißenberg, Wetterwarte, Turmpfeiler	1004,8	{ Nivellementshöhe + Turmhöhe

Tabelle 8

Seite	K_1 [m]	K_2 [m]	K_3 [m]	[K] [m]
1-2	— 0,111	— 1,783	+ 0,008	— 1,886
1-3	— 0,006	— 3,784	+ 0,071	— 3,719
1-4	— 0,087	— 2,486	+ 0,023	— 2,550
1-5	— 0,021	— 1,746	+ 0,007	— 1,760
1-6	— 0,019	— 2,566	+ 0,023	— 2,562
1-7	— 0,037	— 2,613	+ 0,020	— 2,630
1-8	— 1,455	— 7,088	+ 0,184	— 8,359
2-3	— 0,046	— 1,822	+ 0,009	— 1,859
2-4	$\pm$ 0,000	— 1,664	+ 0,008	— 1,656
3-4	— 0,038	— 2,534	+ 0,026	— 2,546
3-6	— 0,001	— 4,159	+ 0,103	— 4,057
4-5	— 0,051	— 1,470	+ 0,005	— 1,516
4-6	— 0,040	— 1,517	+ 0,006	— 1,551
5-6	— 0,001	— 0,806	+ 0,001	— 0,806
5-7	— 0,258	— 0,985	+ 0,001	— 1,242
6-7	— 0,361	— 0,783	+ 0,001	— 1,143

6. ÜBERFÜHRUNG DER GEMESSENEN SEITENLÄNGEN AUF DIE PUNKTZENTREN BZW. FESTLEGUNGEN

Für Punkt 1, München, nördl. Frauenturm, sind folgende Instrumentenstände benützt worden:

Pfeiler Nord, für Deutenhausen, Schweitenkirchen.

Pfeiler Ost, für Aufkirchen, Parsdorf, Basis Nord und Basis Süd.

Pfeiler West, für Hohenpeißenberg.

Die gemessenen Seiten sind auf das Punktzentrum, alte Helmstange, zu überführen.

Die Neupunkte $P_2 = \text{Deutenhausen}$, $P_4 = \text{Aufkirchen}$, $P_5 = \text{Parsdorf}$, $P_6 = \text{Basis Nord}$ und $P_7 = \text{Basis Süd}$ waren vom Bayerischen Landesvermessungsamt für die Winkelmessung im Basisvergrößerungsnetz und für die Einschaltung des Punktes II. Ordnung Deutenhausen zentrisch bebaut worden. Durch mehrmals wiederholte Lotungen (Messung parallaktischer Winkel zwischen den Festlegungen und den Leuchtbolzen in den Beobachtungstischen von besonderen Lotständen aus) sind die Signalbauten hinsichtlich Lageänderungen überwacht worden. Laut Angabe des Bayer. Landesvermessungsamtes blieben für die genannten Punkte die Exzentrizitäten e zwischen Leuchtbolzen und Festlegung $< 0,005 \text{ m}$. Nachdem die Instrumentenstände für die Tellurometermessung identisch sind mit den Leuchtbolzen – die Exzentrizitäten können gegenüber der Meßgenauigkeit vernachlässigt werden –, sind Zentrierungen nicht notwendig. Der Punkt 3, Schweitenkirchen ist ebenfalls zentrisch über der F. I. O. bebaut worden; aus den mehrfachen Ablotungen ergab sich für die Exzentrizität des Leuchtbolzens während der Beobachtungszeit:

in Schweitenkirchen (F. I. O.)

Aufkirchen $0,0^s$

Leucht-Bolzen $392,0^s \quad e = 0,009_5 \text{ m}$.

Schwierigkeiten bereitete nur die Zentrierung der in München, nördl. Frauenturm, von den verschiedenen Pfeilern aus gemessenen Entfernungen nach den Neupunkten (P_2, P_4, P_5, P_6, P_7), nachdem für diese zunächst nur graphisch (mittels Eintrag in die Karte 1 : 25 000) bestimmte Koordinaten vorlagen.

Die Zentrierungsverbesserung kann in folgender Form dargestellt werden:

Mit den Bezeichnungen in Abb. 7 ergibt sich nach dem Kosinussatz für die zentrierte Seite S

$$S^2 = S'^2 + e^2 - 2e S' \cos \alpha. \quad (1)$$

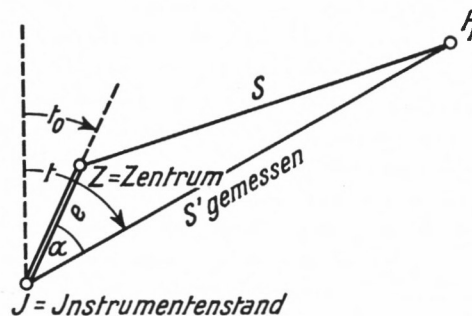


Abb. 7

Für die meisten Zwecke wird man (1) durch die Näherung

$$S - S' = v \approx \frac{e^2}{2S'} - e \cos \alpha \quad (2)$$

ersetzen können.

Für die Abschätzung eines Fehlers $dv = dS$ ist zu beachten, daß t und damit $\alpha = (t - t_0)$ wegen der nur näherungsweise bekannten Koordinaten des Neupunktes fehlerhaft sind; t_0 und e können durch örtliche Messung genügend genau bestimmt werden. Aus (2) ergibt sich, wenn e und t_0 als fehlerfrei angesehen werden,

$$dS \approx e \sin \alpha \cdot d\alpha. \quad (3)$$

Für $\alpha = 90^\circ$ wird $dS_{\max} = e \cdot d\alpha$. Soll $dS_{\max} < 0,005$ m werden, so darf offenbar $d\alpha$ den Betrag von $\frac{0,005}{e} \rho$ nicht überschreiten. Im vorliegenden Fall beträgt $e_{\max} \approx 6$ m, d. h. es müßte also $d\alpha < 3'$ werden; diese Grenze kann nicht eingehalten werden, wenn die Richtung t zum Neupunkt aus graphisch bestimmten Koordinaten gerechnet wird. Im allgemeinen wird es deshalb notwendig sein, mit Hilfe der gemessenen Seitenlängen etwa durch Bogenschnitte¹ vorläufige Koordinaten der Neupunkte zu bestimmen, wenn man nicht aus den Seitenlängen der vollständig ausgemessenen Dreiecke die Dreieckswinkel und dann Vorwärtsschnitte rechnen will. Im vorliegenden Fall konnten aus den im Basisvergrößerungsnetz gemessenen Winkeln durch Vorwärtseinschneiden vorläufige GAUSS-KRÜGER-Koordinaten² gerechnet werden (Tabelle 9).

Tabelle 9

Punkt	Rechts (y) [m]	Hoch (x) [m]
Aufkirchen	44 896 29,0	53 518 03,1
Parsdorf	87 324,6	34 950,3
Basis Nord	96 354,5	35 513,9
Basis Süd	94 487,4	27 496,6
Deutenhausen	69 697,7	53 502,6

Aus diesen Koordinaten und den Ergebnissen der örtlichen Messungen³ ergeben sich für die von München aus gemessenen Seiten folgende Zentrierungsbeträge (Tabelle 10, Spalte 2).

Tabelle 10

Seite	Zentrierungsbeträge	
	[m]	[m]
1-2	+ 5,950	
1-3	+ 5,949	+ 0,006
1-4	+ 3,893	
1-5	+ 5,788	
1-6	+ 5,794	
1-7	+ 5,914	
1-8	+ 3,784	
2-3		+ 0,006
3-4		+ 0,009
3-6		+ 0,009

¹ Aus der Ausgleichung des mehrfachen Bogenschnittes ergibt sich eine einfache Bestimmung vorläufiger Koordinaten für den Neupunkt P_N mittels zweier, von Festpunkten aus gemessenen Seiten $S_{i \cdot N}$. Jede Seite liefert eine Gleichung für Δx_N und Δy_N :

$$\cos \bar{t}_{i \cdot N} \Delta x_N + \sin \bar{t}_{i \cdot N} \Delta y_N = \bar{S}_{i \cdot N} - S_{i \cdot N},$$

wobei der Richtungswinkel $\bar{t}_{i \cdot N}$ bzw. die Seite $\bar{S}_{i \cdot N}$ in bekannter Weise aus den Koordinaten des Festpunktes P_i bzw. den Näherungskkoordinaten von P_N zu rechnen sind.

² Freundlicherweise vom Bayer. Landesvermessungsamt mitgeteilt.

³ „Das bayerische Landesvermessungswerk“, Heft 6, Teil IIa, Abrisse der Stationen nach der Ausgleichung, München 1956.

Die von und nach Schweitenkirchen, Signal L. B. gemessenen Seiten sind zur Überführung auf die F. I. O. noch um die in Tabelle 10, Spalte 3 angegebenen Beträge zu verbessern.

Damit ist die in Tabelle 11 gegebene Zusammenstellung der auf die entsprechenden Punktzentren bzw. Festlegungen bezogenen sphäroidischen Seitenlängen S (Spalte 6) gerechnet worden.

Tabelle 11. Zusammenstellung der sphäroidischen Seitenlängen

1 Seite	2 Schräge Entfernung D' [m]	3 Reduktion [K] [m]	4 Sphäroidische Seitenlängen S [m]	5 Zentrierungen [m]	6 Sphäroidische Seitenlängen bez. a. Festlegung S [m]
1-2	20052,668	- 1,886	20050,782	+ 5,956	20056,738
1-3	40972,539	- 3,719	40968,820	+ 5,955	40974,775
1-4	28088,753	- 2,550	28086,203	+ 3,893	28090,096
1-5	19049,377	- 1,760	19047,617	+ 5,788	19053,405
1-6	28097,092	- 2,562	28094,530	+ 5,794	28100,324
1-7	26835,390	- 2,630	26832,760	+ 5,914	26838,674
2-3	20920,052	- 1,859	20918,193	+ 0,006	20918,199
2-4	20005,350	- 1,656	20003,694	—	20003,694
3-4	29208,571	- 2,546	29206,025	+ 0,009	29206,034
3-6	46352,580	- 4,057	46348,523	+ 0,009	46348,532
4-5	17011,061	- 1,516	17009,545	—	17009,545
4-6	17624,609	- 1,551	17623,058	—	17623,058
5-6	9048,460	- 0,806	9047,654	—	9047,654
5-7	10338,814	- 1,242	10337,572	—	10337,572
6-7	8233,068	- 1,143	8231,925	—	8231,925
1-8	56368,800	- 8,359	56360,441	+ 3,784	56364,225

7. VERGLEICH ZWEIER SEITEN MIT DEM BAYERISCHEN HAUPTDREIECKSNETZ

Im folgenden sind für die Seiten München-Hohenpeißenberg und München-Schweitenkirchen den gemessenen Seitenlängen die im Bayer. Hauptdreiecksnetz gültigen Werte gegenübergestellt. Für München-Schweitenkirchen liegt überdies ein unabhängiger, aus der von G. CLAUSS 1920 gemessenen Basis abgeleiteter Wert für die Seitenlänge vor.¹ Dabei ergeben sich folgende Differenzen (Tabelle 12, Spalte 4):

¹ M. KNEISL, „Überprüfung des Maßstabes und der Orientierung des neuen bayerischen Hauptdreiecksnetzes“, Sitzungsbericht der Bayer. Akademie der Wissenschaften, Math.-nat. Klasse, 1954, S. 103 f. München 1954.

Tabelle 12

Seite	1 Tellurometer- messung [m]	2 Bayer. Hauptdreiecksnetz [m]	3 Basis- vergrößerung [m]	4 Differenz	
				2 — 1 [m]	3 — 1 [m]
München-Schweitenkir- chen	40974,775	40974,554	40974,764	— 0,221	— 0,011
München-Hohenpeißen- berg	56364,225	56363,93	—	— 0,295	—

Wie bei den Versuchsmessungen im Herbst 1957 ergeben die Tellurometermessungen gegenüber dem Hauptdreiecksnetz zu große Seitenlängen, während die Differenz gegenüber der Basisvergrößerungsseite nur 0,011 m beträgt. Wenn auch die Differenzen 2-1 offensichtlich den Seitenlängen unmittelbar proportional sind – diese können im Sinne einer Verbesserung durch den Ausdruck

$$v_{[\text{mm}]} = -24 - 4,81 \cdot S_{[\text{km}]} \quad (1)$$

dargestellt werden – und sich damit eine Maßstabsdifferenz von etwa $5 \cdot 10^{-6}$ andeutet, wird wegen der geringen Anzahl von Vergleichsstrecken darauf verzichtet, daraus eine Maßstabsverbesserung für das Hauptdreiecksnetz oder umgekehrt einen Korrektionsfaktor für die Quarzfrequenz des Tellurometers bzw. einen anderen Wert für die Lichtgeschwindigkeit abzuleiten.

8. AUSGLEICHUNG DES STRECKENNETZES

8. 1. RECHENBEZUGSFLÄCHE

Für die Darstellung des Streckennetzes stehen drei Möglichkeiten offen:

- Unmittelbare Berechnung auf dem Ellipsoid unter Verwendung der gemessenen sphäroidischen Seitenlängen.
- Abbildung des Streckennetzes auf eine GAUSS'sche Bildkugel nach einem Vorschlag von C. F. BAESCHLIN,¹ Reduktion der sphäroidischen Seitenlängen auf die Bildkugel.
- Abbildung in die Ebene, Verebnung der Seitenlängen.

Über die Wahl der zweckmäßigsten Berechnungsverfahren hat kürzlich H. WOLF² ausführlich berichtet.

Nachdem für alle Punkte des Netzes genügend genaue Koordinaten bekannt sind und damit eine strenge Rechnung von Seitenreduktionen möglich ist, kann das Streckennetz in einer ebenen Abbildung (GAUSS-KRÜGER-Projektion) dargestellt werden. Gegenüber a) und b) ergibt sich dadurch eine erhebliche Vereinfachung der Rechenarbeiten.

¹ C. F. BAESCHLIN, Die sphärische Berechnung von Streckennetzen, Annexe au Procès-Verbal de la 95^{me} Séance de la Commission Géodésique Suisse, Neuchâtel 1951.

² H. WOLF, Die Ausgleichung von Streckennetzen, Z. f. V. 1958, Heft 10, Seite 327–346.

Unter den „gemessenen Seitenlängen“ sind im folgenden die verebneten Werte s der sphäroidischen Seitenlängen S zu verstehen, wobei gilt

$$s_{i.k} = S_{i.k} + \Delta s_{i.k}, \quad (1)$$

$$\Delta s_{i.k} = \frac{s_{i.k} \cdot 10^6}{12 R_m^2} \{ \bar{y}_i^2 + (\bar{y}_i + \bar{y}_k)^2 + \bar{y}_k^2 \}. \quad (2)$$

Dabei bedeuten: $\bar{y}$ = Rechtswert, bezogen auf die Abszissenachse

R_m = Gaußscher Krümmungsradius für die Mittelbreite.

$\Delta s_{i.k}$ ergibt sich in Zentimetern, wenn $\bar{y}$ in km und $s_{i.k}$ in 10 km eingeführt wird.

8. 2. AUSGLEICHUNGSVERFAHREN

Das Netzbild (Abb. 8) zeigt, daß vier überschüssige Messungen, also 4 Bedingungsgleichungen vorliegen, wie sich auch aus der bekannten Formel $r = s - (2p - 3) = 4$ errechnet, worin s und p die Anzahl der gemessenen Seiten bzw. der Punkte bedeuten.

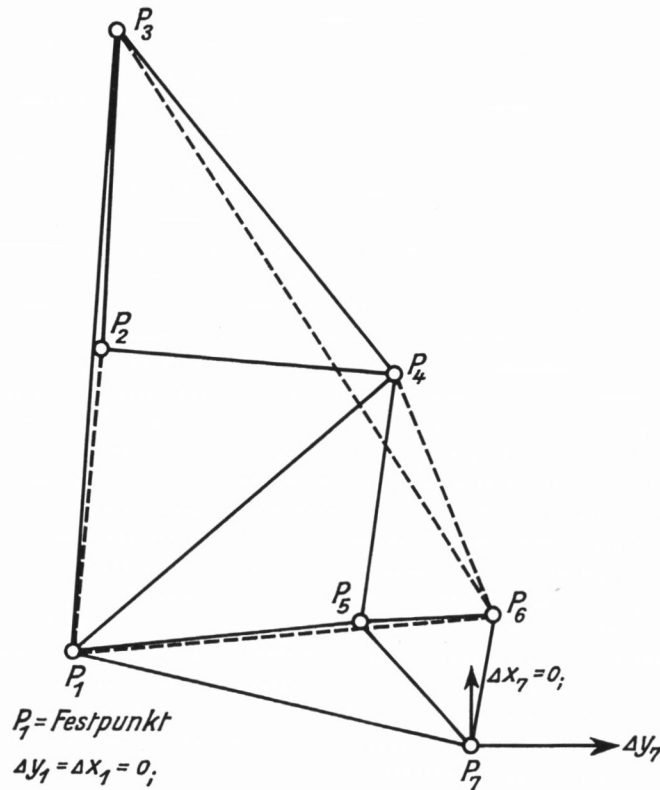


Abb. 8

Bei einer Ausgleichung nach bedingten Beobachtungen ergeben sich also vier Normalgleichungen, bei Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen (Koordinatenausgleichung) dagegen elf Normalgleichungen. Nachdem für die Auflösung der Normalgleichungen eine programmgesteuerte Relaisrechenmaschine Z 11 (Zuse) zur Verfügung

steht, war der notwendige Arbeitsaufwand nicht entscheidend für die Wahl des Ausgleichungsverfahrens. Aus den folgenden Gründen ist der Ausgleichung nach vermittelnden Beobachtungen der Vorzug gegeben worden:

- a) Das Verfahren ist übersichtlicher, die Fehlergleichungen sind einfacher aufzustellen als die Bedingungsgleichungen.
- b) Die Ausgleichung gibt unmittelbar die Koordinaten der Neupunkte samt den mittleren Fehlern, während die Ausgleichung nach bedingten Koordinaten nur verbesserte Seitenlängen liefert, also noch die Berechnung der Neupunktkoordinaten erfordert.

8. 3. AUSGLEICHUNG NACH VERMITTELNDEN BEOBACHTUNGEN

Die allgemeine Form der Fehlergleichung lautet für die Seite $P_i - P_k$ bei ebener Rechnung:

$$s_{i.k} + v_{i.k} = \sqrt{(y_k - y_i)^2 + (x_k - x_i)^2}. \quad (3)$$

Dabei bedeuten y_i, x_i und y_k, x_k die endgültigen Koordinaten der Seitenendpunkte. Zur Linearisierung von (3) ersetzt man die endgültigen Koordinaten durch die Näherungswerte $\bar{y}_i, \bar{x}_i, \bar{y}_k, \bar{x}_k$ und die aus der Ausgleichung zu bestimmenden Verbesserungen $\Delta y_i, \Delta x_i, \Delta y_k, \Delta x_k$, schreibt also

$$\begin{aligned} y_i &= \bar{y}_i + \Delta y_i \\ x_i &= \bar{x}_i + \Delta x_i \\ y_k &= \bar{y}_k + \Delta y_k \\ x_k &= \bar{x}_k + \Delta x_k \end{aligned}$$

Den Wurzelausdruck in (3) entwickelt man in eine TAYLORSche Reihe für vier Veränderliche, wobei die höheren Ableitungen bei genügend genauen Näherungskoordinaten vernachlässigt werden können; aus (3) erhält man dann

$$s_{i.k} + v_{i.k} = f(\bar{y}_i, \bar{x}_i, \bar{y}_k, \bar{x}_k) + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_i} \cdot \Delta y_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_i} \cdot \Delta x_i + \frac{\partial f}{\partial \bar{y}_k} \cdot \Delta y_k + \frac{\partial f}{\partial \bar{x}_k} \cdot \Delta x_k. \quad (4)$$

Führt man die aus den Näherungskoordinaten gerechneten Werte $\bar{t}_{i.k}$ und $\bar{s}_{i.k}$ für Richtungswinkel und Länge der Seite $P_i - P_k$ ein, so erhält man aus (4) die endgültige Fehlergleichung¹

$$v_{i.k} = \Delta y_i \sin \bar{t}_{k.i} + \Delta x_i \cos \bar{t}_{k.i} + \Delta y_k \sin \bar{t}_{i.k} + \Delta x_k \cos \bar{t}_{i.k} + \bar{s}_{i.k} - s_{i.k}. \quad (5)$$

Entsprechend den in Abschnitt 4 gerechneten mittleren Fehlern werden alle Beobachtungen als gleichgewichtig angesehen, also gilt $p_{i.k} = 1$.

¹ Die von H. WOLF, a. a. O. Seite 338, mitgeteilte Gl. (2) muß in der dabei gewählten Schreibweise richtig lauten:

$$v_{i.k} = \Delta Y_i \sin A_{k.i} - \Delta X_i \cos A_{k.i} + \Delta Y_k \sin A_{i.k} - \Delta X_k \cos A_{i.k} + s_{i.k}^0 - s_{i.k}.$$

8. 4. DURCHFÜHRUNG DER AUSGLEICHUNG

Diese soll auf zwei verschiedene Arten erfolgen, und zwar:

I: Netzform des Basis-Vergrößerungsnetzes,

II: Gesamtnetz (mit Punkt II. O. Deutenhausen).

In beiden Fällen gilt $P_1 = \text{München, n. Fr., alte Helmstange als Festpunkt}$; es ist also $y_1 = \bar{y}_1, x_1 = \bar{x}_1$ bzw. $\Delta x_1 = \Delta y_1 = \text{Null}$. Weiter soll jeweils für die Seite P_1-P_3 (München-Schweitenkirchen) der im Hauptdreiecksnetz gültige ebene Richtungswinkel $t_{1.3}$ angehalten werden; läßt man für P_3 Koordinatenverbesserungen Δy_3 und Δx_3 zu, so hätten diese der Bedingung

$$\text{tg } t_{1.3} = \frac{\bar{y}_3 + \Delta y_3 - y_1}{\bar{x}_3 + \Delta x_3 - x_1} \quad (6)$$

zu genügen. Es liegt also eine Ausgleichungsaufgabe nach vermittelnden Beobachtungen mit einer Bedingungsgleichung vor. Mit Rücksicht auf die praktische Rechnung an der Z 11 ist es jedoch weitaus einfacher, eine durch Δy_3 und Δx_3 entstandene Netzdrehung durch nachträgliche Koordinatentransformation zu beseitigen, als die Bedingungsgleichung (6) mitzuführen. In diesem Fall ist aber dann zur eindeutigen Lagerung des Netzes ein Freiheitsgrad weniger anzusetzen, d. h. in einem Punkt darf nur eine Koordinatenänderung zugelassen werden, z. B. in P_3 nur Δx_3 . Aus rechentechnischen Gründen – die Reduktion der Normalgleichungen war schon angelaufen – wurde jedoch $\Delta x_7 = 0$ gesetzt, d. h. es konnte einfach die letzte Normalgleichung weggelassen werden. Die Aufstellung der Fehlergleichungen und die Berechnung der Absolutglieder ist in den Tabellen 16–18 besorgt; es enthalten

Tabelle 13: Fehlergleichungen für Ausgleichung I

Neupunkte: P_3, P_4, P_5, P_6 ($\Delta x_7 = 0$)

$u = 9$ Unbekannte

$n = 12$ Beobachtungen

Tabelle 14: Fehlergleichungen für Ausgleichung II

Neupunkte: $P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ ($\Delta x_7 = 0$).

$u = 11$ Unbekannte

$n = 15$ Beobachtungen

Tabelle 15: Für die Berechnung der Absolutglieder gilt

$$l_{i.k} = \bar{s}_{i.k} - s_{i.k}, \quad (7)$$

wobei die $s_{i.k}$ aus den unmittelbar gemessenen sphäroidischen Seitenlängen $S_{i.k}$ durch Addition der Reduktionen $\Delta s_{i.k}$ gebildet wurden.

Die Normalgleichungen sind in bekannter Weise aufgestellt worden. Die Auflösung der Normalgleichungen – Bestimmung der Unbekannten und der zugehörigen Gewichts-

Tabelle 13

$v_{i,k}$	a Δy_3	b Δx_3	c Δy_4	d Δx_4	e Δy_5	f Δx_5	g Δy_6	h Δx_6	i Δy_7	$l_{i,k}$ [m]	$\Sigma a-i, l_{i,k}$	$v_{i,k}$ [m]
1.3	+0,06753	+0,99772	+0,75835	+0,65185	+0,99707	+0,07651	+0,99741	+0,07194	+0,97472	-0,230	+0,83525	-0,012
1.4										-0,110	+1,30020	+12
1.5										+0,012	+1,08558	+38
1.6										-0,065	+1,00435	+29
1.7										+0,011	+0,98572	+8
3.4	-0,63463	+0,77282	+0,63463	-0,77282			+0,54501	-0,83843		-0,259	-0,25900	+52
3.6	-0,54501	+0,83843	+0,13548	+0,99078	-0,13548	-0,99078				-0,124	-0,12400	+70
4.5			+0,38163	+0,92431	-0,99806	-0,06229	+0,38163	-0,92431		+0,045	+0,04500	+2
4.6			-0,38163		-0,99806	+0,06229	+0,99806	+0,06229		-0,062	-0,06200	+70
5.6					-0,69290	+0,72103	+0,22681	+0,97394	+0,69290	-0,112	+0,60903	+10
5.7									-0,22681	-0,091	+0,88294	+9
6.7												

$$\text{Ausgleichung I } m_0 = \sqrt{\frac{[vv]}{n-u}} = \sqrt{\frac{172,10^{-4}}{3}} = \pm 0,074 \text{ m}$$

Tabelle 14

$v_{i,k}$	a Δy_3	b Δx_3	c Δy_3	d Δx_3	e Δy_4	f Δx_4	g Δy_5	h Δx_5	i Δy_6	k Δx_6	l Δy_7	$l_{i,k}$ [m]	$\Sigma a-l, l_{i,k}$	$v_{i,k}$ [m]
1.2	+0,06835	+0,99767	+0,06753	+0,99772	+0,75835	+0,65185	+0,99707	+0,07651	+0,99741	+0,07194	+0,97472	+0,011	+1,07702	-0,054
1.3												-0,230	+0,83525	+0,042
1.4												-0,110	+1,30020	+0,012
1.5												-0,065	+1,08558	-0,038
1.6												+0,011	+1,00435	+0,029
1.7												-0,259	-0,25900	-0,008
2.3	-0,06676	-0,99777	+0,06676	+0,99777	+0,99638	-0,08494						-0,892	-0,39200	-0,055
2.4	-0,99638	+0,08494	-0,63463	+0,77282	+0,63463	-0,77282						-0,179	-0,17900	+0,001
3.4			+0,63463	+0,77282	+0,13548	+0,99078	-0,13548	-0,99078	+0,54501	-0,83843		-0,259	-0,25900	-0,058
3.6			-0,54501	+0,83843	+0,38163	+0,92431						+0,124	-0,12400	+0,074
4.5					-0,38163	+0,92431						+0,045	+0,04500	-0,002
4.6						-0,99806	-0,06229	+0,38163	+0,99806	+0,06229		-0,062	-0,06200	-0,090
5.6					-0,69290	+0,72103						-0,190	-0,19000	-0,044
5.7												-0,112	+0,60903	+0,010
6.7												-0,091	+0,88294	-0,008

$$\text{Ausgleichung II } m_0 = \sqrt{\frac{260,4 \cdot 10^{-4}}{4}} = \pm 0,081 \text{ m}$$

reziproken – konnte ebenso wie die Berechnung der $\bar{s}_{i \cdot k}$ und $\bar{l}_{i \cdot k}$ durch die programmgesteuerte Relaisrechenmaschine Zuse Z 11 besorgt werden.

Die Koordinatenverbesserungen Δy_i und Δx_i samt den Gewichtsreziproken Q_i sind in Tabelle 16 eingetragen; die aus den Δy_i und Δx_i folgenden Verbesserungen $v_{i \cdot k}$ für die gemessenen Seiten enthalten die Tabellen 13 und 14.

Die nach

$$\begin{aligned} y_i &= \bar{y}_i + \Delta y_i \\ x_i &= \bar{x}_i + \Delta x_i \end{aligned} \quad (8)$$

gerechneten ausgeglichenen Koordinaten sind in Tabelle 17 zusammengestellt.

Die aus den Fehlerquadratsummen gerechneten m. F. der Gewichtseinheit (d. i. der m. F. der in die Ausgleichung eingeführten Seitenlängen) finden sich bei den Tabellen 13 und 14. Für einen späteren Vergleich mit den Ergebnissen der Triangulation bzw. der Vergrößerung der Basis München sind in Tabelle 18 noch die verbesserten Seitenlängen für die beiden Ausgleichungen eingetragen.

Mit Rücksicht auf die bei der Ausgleichung vernachlässigte Bedingung (6) ist noch eine Transformation der ausgeglichenen Koordinaten (Drehung) notwendig. Die Drehungswinkel δ für die Ausgleichungen I und II und die transformierten Gauß-Krüger-Koordinaten sind der Tabelle 17 beigelegt. Als durchgreifende Rechenkontrolle für Ausgleichung und Transformation sind aus den transformierten Koordinaten noch die Seitenlängen und Richtungswinkel abgeleitet worden;¹ die Abweichungen der Seitenlängen gegenüber den aus den Verbesserungen bestimmten Werten (Tabelle 18) überschreiten in keinem Falle 0,01 Meter.

Tabelle 15. Berechnung der Absolutglieder $l_{i \cdot k}$

Seite	$S_{i \cdot k}$ [m]	$\Delta s_{i \cdot k}$ [m]	$s_{i \cdot k} =$ $S_{i \cdot k} + \Delta s_{i \cdot k}$ [m]	$\bar{s}_{i \cdot k}$	$l_{i \cdot k}$ [m]
1-2	20056,738	0,237	056,975	056,986	+ 0,011
1-3	40974,775	0,462	975,237	975,007	- 0,230
1-4	28090,096	0,166	090,262	090,152	- 0,110
1-5	19053,405	0,122	053,527	053,539	+ 0,012
1-6	28100,324	0,130	100,454	100,389	- 0,065
1-7	26838,674	0,133	838,807	838,818	+ 0,011
2-3	20918,199	0,225	918,424	918,032	- 0,392
2-4	20003,694	0,110	003,804	003,625	- 0,179
3-4	29206,034	0,149	206,183	205,924	- 0,259
3-6	46348,532	0,181	348,713	348,589	- 0,124
4-5	17009,545	0,028	009,573	009,618	+ 0,045
4-6	17623,058	0,011	623,069	623,007	- 0,062
5-6	9047,654	0,008	047,662	047,427	- 0,190
5-7	10337,572	0,011	337,583	337,471	- 0,112
6-7	8231,925	0,002	231,927	231,836	- 0,091

¹ Ebenso wie für die Transformation ist auch dafür die Relaisrechenmaschine Z 11 eingesetzt worden.

Tabelle 16. Ergebnisse der Ausgleichungen I, II
(Koordinatenverbesserungen und Gewichtsreziproken)

	Koordinatenverbesserungen $\Delta y_i, \Delta x_i$ [m]		Gewichtsreziproken Q_i	
	Ausgl. I	Ausgl. II	Ausgl. I	Ausgl. II
Δy_2	—	— 0,078	—	2,74261
Δx_2	—	— 0,060	—	0,67131
Δy_3	— 0,016	+ 0,052	5,63488	5,09977
Δx_3	+ 0,221	+ 0,270	0,84889	0,57415
Δy_4	+ 0,109	+ 0,112	1,67258	1,67185
Δx_4	+ 0,065	+ 0,064	1,00209	1,00188
Δy_5	— 0,058	— 0,059	0,54050	0,54049
Δx_5	+ 0,128	+ 0,127	1,18560	1,18553
Δy_6	+ 0,093	+ 0,092	0,60607	0,60607
Δx_6	+ 0,063	+ 0,063	0,97203	0,97204
Δy_7	— 0,018	— 0,018	0,85523	0,85522
Δx_7	$\pm 0,000$	$\pm 0,000$	—	—

Tabelle 17

Ausgleichung	Punkt	Ausgegliche Koordinaten		Drehungswinkel	Transformierte Koordinaten	
		Rechts (y) [m]	Hoch (x) [m]		Rechts (y) [m]	Hoch (x) [m]
I–II	1	44 68 326,91	53 33 492,51		42 68 326,91	53 33 492,51
I	3	71 094,10	74 374,19	Ist: $\epsilon_{1,3}^I = 4,3025,76^g$	71 094,13	74 374,19
	4	89 629,11	51 803,16	Soll: $\epsilon_{1,3} = 4,3026,26^g$	89 629,12	51 803,14
	5	87 324,54	34 950,43	$\delta_I = -0,0000,50^g$	87 324,54	34 950,41
	6	96 354,59	35 513,96		96 354,59	35 513,94
	7	94 487,38	27 496,60		94 487,38	27 496,58
II	2	69 697,62	53 502,54		69 697,60	53 502,54
	3	71 094,17	74 374,24	Ist: $\epsilon_{1,3}^{II} = 4,3026,77^g$	71 094,14	74 374,24
	4	89 629,11	51 803,16	Soll: $\epsilon_{1,3} = 4,3026,26^g$	89 629,10	51 803,18
	5	87 324,54	34 950,43	$\delta_{II} = -0,0000,51^g$	87 324,54	34 950,44
	6	96 354,59	35 513,96		96 354,59	35 513,98
	7	94 487,38	27 496,60		94 487,38	27 496,62

Tabelle 18

Seite	Verbesserte Seitenlängen	
	Ausgleichung I [m]	II [m]
1-2	20056,—	,92
1-3	40975,25	,28
1-4	28090,27	,27
1-5	19053,49	,49
1-6	28100,49	,48
1-7	26838,80	,80
2-3	20918,—	,37
2-4	20003,—	,80
3-4	29206,13	,12
3-6	46348,78	,79
4-5	17009,57	,57
4-6	17623,00	,00
5-6	9047,62	,62
5-7	10337,59	,59
6-7	8231,92	,92

8. 5. DISKUSSION DER RESULTATE, GENAUIGKEIT

Es wurde schon eingangs darauf hingewiesen, daß das vorliegende Beobachtungs- und Vergleichsmaterial nur die innere Genauigkeit der Tellurometermessung beurteilen läßt; die äußere Genauigkeit, insbesondere etwaige Maßstabsfehler, können erst durch einen späteren Vergleich mit den Ergebnissen des Basisvergrößerungsnetzes bestimmt werden.

Für die Beurteilung der inneren Genauigkeit ist von Bedeutung: Die maximalen Verbesserungen (0,07 m) für die gemessenen Seitenlängen ergeben sich in beiden Ausgleichungen für die 46,3 km bzw. 17,6 km langen Seiten 3-6 bzw. 4-6. Die Verbesserungen für die übrigen Seiten betragen durchschnittlich 0,03 m. Die gemessenen Seiten erfüllen also die geometrischen Netzbedingungen sehr gut, grobe oder größere systematische Fehler sind demnach bei der Messung nicht unterlaufen. Die Verbesserungen bestätigen auch den Gewichtsansatz $p_{i.k} = 1$; trägt man die $|v_{i.k}|$ als Ordinaten zu den Seitenlängen als Abszissen auf, so ergibt sich eine rein zufällige Verteilung, d. h. große und kleine Verbesserungen treten bei den langen und kurzen Seiten gleich häufig auf.

Eine Abhängigkeit der Genauigkeit von der Seitenlänge ist auch damit nicht zu erkennen. Aber auch andere Faktoren, wie Geländegestaltung, ungünstige atmosphärische Verhältnisse, deren Einflüsse sich in der Streuung der Einzelmessungen bemerkbar machen, können offenbar nicht für die Gewichtssetzung herangezogen werden.

Der Vergleich der aus den mehrfachen Beobachtungen gerechneten m. F. der Seiten – die Durchschnittswerte ergeben $\mu_s = \pm 1,0$ cm bzw. $\mu'_s = \pm 1,5$ cm – mit den m. F. der Gewichtseinheit $m_0 = \pm 7,6$ cm läßt auf einen zusätzlichen, bei der Messung wirksamen

Fehlereinfluß schließen, der aber nicht weiter gedeutet werden kann. Abschließend werden für die Neupunkte noch die aus der Ausgleichung gerechneten m. F. der Koordinaten bzw. die mittleren Punktfehler angegeben (Tabelle 19).

Tabelle 19

Punkt	Ausgleichung I			Ausgleichung II		
	$\pm m_y$ [m]	$\pm m_x$ [m]	$\pm m_p$ [m]	$\pm m_y$ [m]	$\pm m_x$ [m]	$\pm m_p$ [m]
2	—	—	—	0,13	0,06	0,14
3	0,18	0,07	0,19	0,18	0,06	0,19
4	0,10	0,07	0,12	0,10	0,07	0,12
5	0,05	0,08	0,09	0,05	0,06	0,09
6	0,06	0,07	0,09	0,06	0,08	0,09
7	0,07	0,00	0,07	0,07	0,00	0,07

Bei der Beurteilung der Lagegenauigkeit für die Neupunkte auf Grund der mittleren Punktfehler – im Durchschnitt betragen diese $\pm 0,11$ cm – ist zu beachten, daß entsprechend dem Ausgleichungsansatz P_7 die höchste, P_3 die geringste Genauigkeit zukommt.

9. ZUSAMMENFASSUNG

Die Beobachtungserfahrungen und Ergebnisse der Auswertung können kurz zusammengefaßt werden:

Überraschend ergibt sich die Genauigkeit der gemessenen Seiten als unabhängig von der Länge der Seiten. Unter günstigen atmosphärischen und Gelände-Verhältnissen ist demnach die Genauigkeit der Tellurometermessung konstant und nur vom Gerät selbst abhängig. Der Vergleich der Meßergebnisse für die Seiten München-Schweitenkirchen und München-Hohenpeißenberg mit den trigonometrisch bestimmten Seitenlängen zeigt: Die Tellurometermessung gibt gegenüber dem Hauptdreiecksnetz etwas zu große Seitenlängen (Maßstabsfaktor etwa $1 + 6 \cdot 10^{-6}$), dagegen stimmt die Messung mit der aus der CLAUSSENSchen Basis abgeleiteten Seitenlänge München-Schweitenkirchen sehr gut überein.

Die mehrfache Ausgleichung des Streckennetzes ergibt: Der m. F. der Gewichtseinheit, das ist der m. F. der in die Ausgleichung eingeführten Seitenlänge, ergibt sich durchschnittlich zu $\pm 0,07$ m. Die Verbesserungen der gemessenen Seiten betragen im Durchschnitt $\pm 3,5$ cm; grobe bzw. größere systematische Fehler sind damit nicht vorhanden, d. h. der Refraktionskoeffizient konnte aus den meteorologischen Daten genügend genau erfaßt werden.

Die durchschnittliche Lagegenauigkeit der durch reine Streckenmessung festgelegten Neupunkte beträgt $\pm 0,1$ m.