Ueber

die reducirte Resultante.

Von

A. Brill
in Tübingen.

Die Theorie der Resultante eines Systems von Gleichungen lässt sich in einer Richtung erweitern, die, wiewohl zahlreiche Fragen aus dem Gebiet der Geometrie und der Functionentheorie dahin weisen, noch wenig betreten worden ist. Man kann für ein System von n Gleichungen mit $n-1$ Unbekannten, welches durch eine gewisse Anzahl von Werthsystemen der Letzteren befriedigt wird, einen Ausdruck zu bilden verlangen, dessen Verschwinden die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür liefert, dass noch ein weiteres solches Werthsystem existirt. Haben z. B. drei Curven eine Anzahl von Punkten gemeinsam, so ist die Bedingung dafür, dass sie durch einen weiteren (der Lage nach unbestimmten) Punkt alle drei hindurch gehen, das Verschwinden eines in den Coefficienten der Curvengleichungen gebildeten Ausdrucks, in den noch die Coordinaten der angenommenen Verschwindungspunkte eingehen.

In einem früheren Aufsatze (Mathemat. Annalen, Bd. 4, S. 510) habe ich diesen Ausdruck die „reducirte Resultante" genannt und für einzelne Fälle hergestellt, ohne jedoch damals zu einem befriedigenden Abschluss gelangt zu sein.

Im Folgenden beehre ich mich der hohen Classe einen Satz mitzutheilen, vermöge dessen die reducirte Resultante als gemeinsamer Factor gewisser Glieder einer Entwicklung erscheint, welche durch einen übersichtlichen Algorithmus berechnet werden können. Hierdurch ist die Bedeutung jenes Begriffs festgestellt, und seine Berechtigung, sofern es dessen überhaupt noch bedurfte, nachträglich allgemein erwiesen.

Es sei gestattet, die Darstellung auf den Fall von drei Gleichungen mit zwei Unbekannten, also auf den erwähnten Fall von drei Curven mit gemeinsamen Schnittpunkten zu beschränken, indem die folgenden Ausführungen ohne Weiteres auf den Fall einer beliebigen Anzahl von Gleichungen übertragbar sind.

1.

Zwischen je drei binären (ganzen homogenen) Functionen f_i, φ_k, ψ_l — von der Dimension der Indices in den Veränderlichen x, y — besteht im Allgemeinen eine identische Relation, die man folgendermassen findet.

Aus den nicht homogenen Functionen:

$$f_i - \alpha,\ \varphi_k - \beta,\ \psi_l - \gamma$$

stelle man durch Elimination von x und y die Resultante her, die eine ganze Function der willkührlich angenommenen Grössen α, β, γ sein wird:

$$r\ (\alpha\ \beta\ \gamma).$$

Setzt man in derselben für $\alpha \ldots f_i$, für $\beta \ldots \varphi_k$, für $\gamma \ldots \psi_l$ ein, so ist:

$$r\ (f_i,\ \varphi_k,\ \psi_l) = o \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

die gesuchte Relation.

Denn diese Gleichung ist eine identische, weil man zu jedem Werthepaar x, y Werthsysteme α, β, γ finden kann, welche die Gleichungen:

$$f_i - \alpha = o;\ \varphi_k - \beta = o;\ \psi_l - \gamma = o \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

befriedigen. Die letzteren genügen der Gleichung:

$$r\ (\alpha,\ \beta,\ \gamma) = o,$$

welche auch noch bestehen muss, wenn man die α, β, γ durch f_i, φ_k, ψ_l ersetzt. Da dies für jedes beliebige Werthepaar x, y der Fall ist, so ist (1) eine identische Gleichung. Dieselbe ist ferner homogen hinsichtlich x, y. Setzt man nämlich statt $x \ldots xt$, statt $y \ldots yt$, statt $z \ldots zt$; ferner statt α, β, γ bezw. αt^i, βt^k, γt^l, so ändern die Gleichungen (2) sich nicht, also kann auch (1) als Folge von (2) sich nicht ändern; (1) ist also homogen.

Man bildet die Resultante aus drei algebraischen Gleichungen zwischen zwei (nicht homogen auftretenden) Unbekannten nach Poisson in folgender Weise.

$f\,(xy)$, $\varphi\,(xy)$, $\psi\,(xy)$ seien ganze Functionen von x und y.

Dann füge man den Gleichungen:

$$f\,(xy) = o$$
$$\varphi\,(xy) = o$$
$$\psi\,(xy) = o$$

die weitere zu:

$$t = \lambda x + \mu y$$

und eliminire x und y aus dieser Gleichung und etwa $f = o$, $\varphi = o$. Man erhält so eine Gleichung in t von der Form:

$$T \equiv T_0 t^r + T_1 t^{r-1} + T_2 t^{r-2} + \dots + T_r = o,$$

deren Grad r gleich der Anzahl der Werthepaare x, y ist, welche $f = o$, $\varphi = o$ zugleich befriedigen. Bezeichnet man dieselben durch:

$$x_1 y_1;\; x_2 y_2; \dots x_r y_r,$$

so sind die Coefficienten T_i, dividirt durch T_0, gleich den elementaren symmetrischen Functionen der Wurzeln:

$$t_i = \lambda x_i + \mu y_i \qquad (i = 1, 2, \dots r)$$

der Gleichung $T = o$.

Für den Fall, dass die Resultante der beiden Binärformen, welche je das Aggregat der Glieder höchster Dimension einerseits in $f\,(xy)$, andrerseits in $\varphi\,(xy)$ ausmachen, nicht verschwindet, wenn also, geometrisch zu reden, die Curven $f = o$, $\varphi = o$ keinen unendlich fernen Schnittpunkt besitzen, ist $r = mn$, gleich dem Product der Grade von f und φ, und T_0 ist gleich jener Resultante (Serret, höhere Algebra, deutsche Ausg., 1. Aufl. § 269, S. 485).

Die Resultante R aus f, φ, ψ ist nun darstellbar durch das Product:

$$R = T_0^p \psi\,(x_1 y_1)\, \psi\,(x_2 y_2) \dots \psi\,(x_r y_r),$$

wo p der Grad von ψ ist, R ein Ausdruck, der durch Verwandlung der symmetrischen Funktionen der $x_i\, y_i$ in die Coefficienten der Gleichung $T = o$ auf rationale Form gebracht werden kann. Der Factor T_0^p dient dazu, R zu einer ganzen Function der Coefficienten von f und φ zu machen, und kann nur in Ausnahmefällen (wenn besondere Beziehungen zwischen den Coefficienten von f, φ, ψ bestehen) durch eine niedrigere Potenz von T_0 ersetzt werden.

Die Resultante aus f, φ, ψ verschwindet insbesondere dann, wenn die constanten Terme in diesen drei Functionen zugleich verschwinden. Daher muss, wenn dieselben A, B, C sind, R in die Form gebracht werden können:

$$AM + BN + CP,$$

wo M, N, P die A, B, C noch enthalten können. Eine ähnliche Bemerkung lässt sich bezüglich der Coefficienten A', B', C' der höchsten Potenzen x^m in f, x^n in φ, x^p in ψ, sowie hinsichtlich der Coefficienten derjenigen von y in diesen drei Functionen machen. Denn wenn man mit einer dritten Variabeln z homogen macht, so bleibt es sich gleich, ob man die Resultante aus:

$$\frac{f}{z^m}, \quad \frac{\varphi}{z^n}, \quad \frac{\psi}{z^p}$$

durch Elimination von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ bildet, oder diejenige aus:

$$\frac{f}{x^m}, \quad \frac{\varphi}{x^n}, \quad \frac{\psi}{x^p}$$

durch Elimination von $\frac{z}{x}$ und $\frac{y}{x}$. Das Resultat ist in jedem Falle R. Sowie nun R verschwindet, wenn A, B, C Null werden, so muss R auch mit A', B', C' verschwinden, also von der Form sein:

$$A'M' + B'N' + C'P'.$$

Wir setzen nunmehr für f, φ, ψ die früher betrachteten Functionen:

$$f_i - \alpha, \; \varphi_k - \beta, \; \psi_l - \gamma,$$

dann ist T_0, wenn f_i und φ_k theilerfremd sind, gleich der Resultante aus diesen Binärformen, und der Coefficient von $\gamma^r = \gamma^{ik}$ in der Resultante:

$$R = r(\alpha \beta \gamma)$$

gleich der l^{ten} Potenz jener Resultante aus f_i und φ_k.

Haben f_i, φ_k, ψ_l einen Linearfactor gemeinsam, so verschwindet r identisch. Denn in diesem Fall kann man durch die Transformation:

$$y' = ax + by; \qquad x' = x,$$

wo $ax + by$ der gemeinsame Factor ist, f_i, φ_k, ψ_l auf die Form von Functionen bringen, für welche der Coefficient der höchsten Potenz von x' in allen dreien fehlt. Dann verschwindet aber nach dem Gesagten die Resultante, wenn man sie nach der angegebenen Regel bildet. — An ihre Stelle tritt ein Ausdruck niederen Grades in α, β, γ, der wieder zu einer Relation zwischen den Formen führt.

Die Function $r(\alpha\beta\gamma)$ kann ferner in solche niederen Grades rational zerfallen. So wird im Falle $i = k = l$ r die i^{te} Potenz eines Ausdrucks, der sich übrigens auch direct bestimmen lässt (Vgl. Haase, Bd. 2 der Math. Annalen, S. 529, sowie die Note des Verf. ibd. Bd. 5, S. 401).

2.

Das Verfahren, durch welches oben die identische Relation zwischen drei Binärformen hergestellt wurde, wende ich im Folgenden auf drei nicht homogene Formen von zwei Veränderlichen an. Hierbei treffe ich mit Herrn Perrin zusammen, der wohl zuerst[1]) jene Methode der Variation von Formen durch willkührliche Grössen α, β, γ für die Aufstellung identischer Relationen fruchtbar gemacht hat. Das Ziel, welches ich hier im Auge habe, ist die Bildung eines Ausdrucks, der auch in dem Fall vorhandener gemeinsamer Werthsysteme noch die Bedeutung einer Resultante besitzt.

Seien wieder $f(xy)$, $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$ drei ganze Functionen von x, y (von den Graden m, n, p), welche für gewisse Werthsysteme x, y zugleich verschwinden können. Bildet man die Resultante aus:

$$f(xy) - \alpha$$
$$\varphi(xy) - \beta$$
$$\psi(xy) - \gamma,$$

so ist dieselbe eine ganze Function von α, β, γ:

$$R(\alpha\beta\gamma),$$

die wir uns nach aufsteigenden Dimensionen der Grössen α, β, γ geordnet denken wollen.

1) In der kürzlich erschienenen Abhandlung: Sur la relation, qui existe entre p fonctions entières de $p-1$ variables, Comptes rendus 1888.

Verschwinden zugleich f, φ, ψ für das Werthepaar:

$$x = a,\ y = b,$$

so ordne man diese Functionen nach Dimensionen der Differenzen $x-a$, $y-b$ an. Bezeichnet man die Dimensionen durch Indices und ist f_i das Aggregat der Glieder niedrigster Dimension in f, φ_k in φ, ψ_l in ψ, ist also:

$$\begin{aligned} f &= f_i + f_{i+1} + \cdots \\ \varphi &= \varphi_k + \varphi_{k+1} + \cdots \\ \psi &= \psi_l + \psi_{l+1} + \cdots, \end{aligned}$$

so erhält man durch Einführung dieser Ausdrücke für α, β, γ in $R\,(\alpha\,\beta\,\gamma)$ eine Gleichung:

$$R\,(f, \varphi, \psi) = o,$$

deren Glieder von gleichhoher Dimension in $x-a$, $y-b$ je für sich ein identisch verschwindendes Aggregat geben müssen. Um unter diesen die Glieder niedrigster Dimension zu erhalten, nehme man in $R\,(\alpha\beta\gamma) = o$ die Grössen α, β, γ sehr klein an. Haben dann

$$f = o,\quad \varphi = o$$

in $x = a$, $y = b$ einen Schnittpunkt von der Multiplicität π, so bestimmen sich π von den Wurzelpaaren, die bei kleinen Werthen von α, β die Gleichungen:

$$f - \alpha = o \qquad \varphi - \beta = o$$

befriedigen, dadurch, dass man aus:

$$f\,(a + \delta a,\ b + \delta b) - \alpha = o; \quad \varphi\,(a + \delta a,\ b + \delta b) - \beta = o$$

die kleinen Grössen δa, δb berechnet. Dies geschieht aber mit Hilfe der niedrigsten Glieder in der Entwicklung von f und φ; insbesondere erhält man, wenn die Resultante aus f_i und φ_k nicht verschwindet, aus:

$$f_i\,(\delta a,\ \delta b) - \alpha = o; \quad \varphi_k\,(\delta a,\ \delta b) - \beta = o$$

$\pi = ik$ Werthepaare δa, δb. Setzt man jedes derselben in:

$$\psi\,(a + \delta a,\ b + \delta b) - \gamma$$

ein, wobei man sich, wenn f_i, φ_k, ψ_l keinen Factor gemeinsam haben, auf:

$$\psi_l\,(\delta a,\ \delta b) - \gamma$$

beschränken kann, und bildet das Product der π Factoren, so ist dasselbe ein Factor der Resultante $R(\alpha\beta\gamma)$ von $f-\alpha$, $\varphi-\beta$, $\psi-\gamma$. Andererseits aber ist dasselbe auch das Resultat der Elimination von δa, δb aus den Gliedern niedrigster Ordnung von $f-\alpha$, $\varphi-\beta$, $\psi-\gamma$, geschrieben in δa, δb statt $x-a$, $y-b$, und zwar, wenn f_i, φ_k, ψ_l keinen gemeinsamen Factor haben, die Resultante $r(\alpha\beta\gamma)$ aus:

$$f_i(\delta a, \delta b) - \alpha = o$$
$$\varphi_k(\delta a, \delta b) - \beta = o$$
$$\psi_l(\delta a, \delta b) - \gamma = o.$$

Aus den Gliedern niedrigster Dimension der Entwicklung von $R(\alpha\beta\gamma)$ nach Potenzen von α, β, γ lässt sich somit der Factor $r(\alpha\beta\gamma)$ ausscheiden, und R ist von der Form:

$$R(\alpha\beta\gamma) = r(\alpha\beta\gamma)P + R'(\alpha\beta\gamma),$$

wo die Glieder in R' alle von höherer Dimension sind, wie die in $r.P$ auftretenden.

Weil $r(\alpha\beta\gamma)$, wenn man α, β, γ wiederum durch f_i, φ_k, ψ_l ersetzt, eine homogene Function von $x-a$, $y-b$ wird (§ 1), so verschwinden mit:

$$r(f_i\varphi_k\psi_l)$$

auch die Glieder niedrigster Dimension von $R(f\varphi\psi)$ identisch.

Wenn f_i, φ_k, ψ_l einen gemeinsamen Theiler besitzen, geometrisch gesprochen, wenn die Curven:

$$f(xy) = o; \ \varphi(xy) = o; \ \psi(xy) = o$$

in $x = a$, $y = b$ ein oder mehrere Elemente gemeinsam haben (sich berühren), so tritt an die Stelle von $r(\alpha\beta\gamma)$, welches alsdann identisch verschwindet, eine andere Function, die sich — für kleine Werthe $\alpha\beta\gamma$ — durch Elimination der gleichfalls kleinen Grössen δa, δb aus:

$$f_i(\delta a, \delta b) + f_{i+1}(\delta a, \delta b) + \cdots - \alpha = o$$
$$\varphi_k(\delta a, \delta b) + \varphi_{k+1}(\delta a, \delta b) + \cdots - \beta = o$$
$$\psi_l(\delta a, \delta b) + \psi_{l+1}(\delta a, \delta b) + \cdots - \gamma = o$$

berechnen lässt, indem man sich auf die Glieder niederster Dimension in α, β, γ beschränkt. Bei der grossen Zahl von Möglichkeiten jedoch, die hierbei auftreten können, verzichte ich darauf, näher auf diesen Fall einzugehen, und nehme im Folgenden an, dass $r(\alpha\beta\gamma)$ und die analogen Bildungen nicht identisch verschwinden.

Der Factor P von r kann nun entweder selbst eine Function von α, β, γ oder ein von diesen Grössen unabhängiger Ausdruck allein der Coefficienten von f, φ, ψ sein. Im ersteren Falle giebt es ausser dem Werthsystem, für das r verschwindet, noch ein anderes von sehr kleinen Grössen α, β, γ, für welches $R(\alpha, \beta, \gamma) = o$ wird, also die Gleichungen:

$$f(xy) - \alpha = o; \ \varphi(xy) - \beta = o; \ \psi(xy) - \gamma = o$$

zugleich bestehen; das heisst, es giebt noch einen weiteren Punkt $a' \, b'$, für welchen f, φ, ψ zugleich verschwinden. Ist ein solcher nicht vorhanden, so muss der zweite Fall eintreten; P ist von $\alpha\beta\gamma$ unabhängig. Weil r nicht identisch verschwindet, so repräsentirt in diesem Fall die Gleichung:

$$P = o$$

die nothwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass f, φ, ψ einen weiteren gemeinsamen Verschwindungswerth besitzen, P muss also die „reducirte Resultante“ sein.

Haben aber $f = o$, $\varphi = o$, $\psi = o$ ausser in a, b noch in a', b'; a'', b''; .... Punkte gemeinsam, so findet man die reducirte Resultante auf folgende Weise:

Man entwickle $f(xy)$, $\varphi(xy)$, $\psi(xy)$:

1. Nach Potenzen von $x - a$, $y - b$. Seien f_i, φ_k, ψ_l die wirklich auftretenden Glieder niedrigster Dimension, und sei:

$$r(f_i, \varphi_k, \psi_l) = o$$

die (nach § 1) bestehende identische Relation zwischen den Binärformen f_i, φ_k, ψ_l;

2. Nach Potenzen von $x - a'$, $y - b'$. Zwischen den Gliedern $f_{i'}, \varphi_{k'}, \psi_{l'}$ niedrigster Dimension bestehe die Relation:

$$r'(f_{i'}, \varphi_{k'}, \psi_{l'}) = o,$$

und so weiter.

Dann ist das Aggregat der Glieder niederster Dimension, die in der Entwicklung der Resultante $R(\alpha\beta\gamma)$ von:

$$f - \alpha, \ \varphi - \beta, \ \psi - \gamma$$

wirklich auftreten, gleich dem Product[1]):

$$P \cdot r(\alpha\beta\gamma)\, r'(\alpha\beta\gamma)\, r''(\alpha\beta\gamma)\cdots,$$

wo der Factor P von α, β, γ unabhängig ist, wenn alle gemeinsamen Schnittpunkte von $f=o$, $\varphi=o$, $\psi=o$ bei der Bildung des Products der r berücksichtigt sind. Das Verschwinden von P drückt dann die Bedingung dafür aus, dass zu den vorhandenen Verschwindungssystemen $a\,b$; $a'\,b'$; $a''\,b''$; .... ein weiteres hinzutritt. Mit Rücksicht darauf, dass die Functionen $r(\alpha\beta\gamma)$ ... als nicht verschwindend angenommen wurden, ist $P=o$ als die nothwendige und hinreichende Bedingung für die Vermehrung der gemeinsamen Werthsysteme anzusehen, weil nur, wenn $P=o$ ist, sich der Grad der Glieder niedrigster Ordnung in $R(\alpha\beta\gamma)$ über den des Products $r.r'.r''$... hinaus erhöht. Der Ausdruck P ist also die reducirte Resultante.

3.

Für die wirkliche Darstellung der reducirten Resultante P von drei Curven $f=o$, $\varphi=o$, $\psi=o$, die in den Punkten a, b; a', b'; a'', b''; ... Schnittpuncte von der Multiplicität μ, ν, π; μ', ν', π'; μ'', ν'', π''; .... bilden, genügt es, eines der Glieder niedrigster Ordnung in der Entwicklung von $R(\alpha\beta\gamma)$ zu berechnen und durch das entsprechende Glied des Products $r(\alpha\beta\gamma).r'(\alpha\beta\gamma)$ .... zu dividiren.

So z. B. ist der Coefficient Γ_ω von $\gamma^{\pi+\pi'+\pi''+\cdots}$ in R, wenn:

$$\pi+\pi'+\pi''+\cdots=\omega$$

gesetzt wird, bis auf einen Zahlenfactor gleich:

$$\Gamma_\omega = \left\{\frac{\partial^\omega R(\alpha\beta\gamma)}{\partial\gamma^\omega}\right\} = \left\{\frac{\partial^\omega R}{\partial C^\omega}\right\},$$

wo das Einschliessen in Klammern bedeutet: für $\alpha=\beta=\gamma=o$, und C das constante Glied in dem Ausdruck $\psi(xy)$ ist. Wenn man ferner

[1]) In der oben genannten Abhandlung macht bereits Herr Perrin die Bemerkung, dass, wenn drei Curven ein System von einfachen Schnittpuncten gemeinsam haben, das Aggregat der (in diesem Falle homogenen) Glieder niedrigster Ordnung von $R(\alpha\beta\gamma)$ in ein Product von linearen Factoren zerfällt, welche einzeln den gemeinsamen Puncten entsprechen.

die Resultante von f, φ, ψ wie in § 1 durch die symmetrischen Functionen der Schnittpuncte der Curven:

$$f(xy) = o; \quad \varphi(xy) = o$$

darstellt, so wird:

$$\Gamma_\omega = T_0^p \psi(x_1 y_1) \psi(x_2 y_2) \cdots \psi(x_\varrho y_\varrho),$$

wo T_0 der Coefficient der höchsten Potenz von t in der Resultante aus $f(xy)$, $\varphi(xy)$ und $t - \lambda x - \mu y$ (s. § 1) ist, p die Ordnung des höchsten Gliedes in $\psi(xy)$, ϱ die Anzahl der Schnittpunkte von $f = o$ und $\varphi = o$, die nicht in die gemeinsamen Puncte a, b; a', b'; .... fallen, und nicht unendlich grosse Coordinaten besitzen. Wenn Schnittpuncte von f und φ von der letzterwähnten Art überhaupt nicht auftreten, so ist:

$$\omega + \varrho = mn,$$

wo m und n die Gradzahlen von f und φ sind. Dividirt man den Ausdruck Γ_ω durch den Coefficienten von γ^ω in dem Product:

$$r(\alpha\beta\gamma)\, r'(\alpha\beta\gamma)\, r''(\alpha\beta\gamma) \cdots,$$

so erhält man die reducirte Resultante. Da nun nach Voraussetzung die $r, r', \ldots$ identisch nicht verschwinden, was gleichbedeutend ist mit der Annahme, dass f_i, φ_k, ψ_l keinen gemeinsamen Theiler haben (§ 1), ferner $f_{i'}, \varphi_{k'}, \psi_{l'}$ keinen, u. s. w., so ist der Coefficient von γ^ω in $r.r'.r'' \cdots$ gleich dem Product der Resultanten $(f_i\, \varphi_k)$, $(f_{i'}\, \varphi_{k'})$, $(f_{i''}\, \varphi_{k''}) \ldots$ je der eingeklammerten Binärformen, erhoben auf die l^{te}, l'^{te}, ... Potenz (§ 1). Die reducirte Resultante von f, φ, ψ ist also:

$$P = \frac{\Gamma_\omega}{(f_i\, \varphi_k)^l\, (f_{i'}\, \varphi_{k'})^{l'} \cdots},$$

während die Zahlen $\pi, \pi', \ldots$ die Werthe ik, $i'k'$, ... haben, so dass der Grad von P in den Coefficienten von ψ wird:

$$\begin{aligned} \varrho &= mn - ik - i'k' - \cdots \\ &= mn - \Sigma ik. \end{aligned}$$

Andererseits sind bekanntlich die in Γ_ω auftretenden symmetrischen Functionen der $x_1 y_1$, $x_2 y_2$, ... von der Ordnung p in den Coefficienten der Gleichung $T = o$, also von der Ordnung z. B. von T_0^p. Aber T_0 (§ 1) ist die Resultante aus den Gliedern höchster Dimension in f und φ, also von der Ordnung n in den Coefficienten von f, m in denen von φ; T_0 hat also den Grad np, mp bezw. in den Coefficienten von f und φ. Der Quotient P ist hiernach von der Ordnung:

$$np - \Sigma il$$

in den Coefficienten von f,

$$mp - \Sigma kl$$

in denen von φ. — Vergleicht man diese Zahlen mit der oben erhaltenen ϱ, so liegt in der symmetrischen Bildung der drei Ausdrücke ein nachträglicher Beweis für die symmetrische Gestaltung des (unsymmetrisch entstandenen) Endausdrucks P hinsichtlich der Coefficienten von f, φ, ψ, und eine Bestätigung dafür, dass die aus T_ω auszuscheidenden Factoren alle gefunden sind.

Anwendungen des Vorstehenden auf die Bildung von Resultanten aus Correspondenzgleichungen, wie sie in der Theorie der algebraischen Functionen auftreten, behalte ich mir vor an einer anderen Stelle mitzutheilen.

Andere Beispiele von reducirten Resultanten, auch solche, wobei eine Berührung der Curven in den gemeinsamen Puncten angenommen wird, findet man in der früher erwähnten Abhandlung des Verfassers vom Jahre 1871.

Handelt es sich um eine Ausdehnung des Obigen auf den Fall von vier Flächengleichungen, so bedarf es keiner neuen Betrachtungen, wenn die vier Flächen nur Schnittpuncte (von übrigens beliebiger Multiplicität), nicht aber Linienelemente gemeinsam haben. Analoges gilt für Gleichungssysteme mit mehr Veränderlichen.