Ein Cyclus

von

Determinanten - Gleichungen.

(Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.)

Von

Otto Hesse.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der W. II. Cl. XI. Bd. I. Abth.

München 1872.
Verlag der k. Akademie,
in Commission bei G. Franz.
Akademische Buchdruckerei von F. Straub.

Ein Cyclus von Determinanten-Gleichungen.

(Eine analytische Erweiterung des Pascal'schen Theoremes.)

Von

Otto Hesse.

I.

In den dreissiger Jahren hat Steiner eine Figur entdeckt, die wohl zu den elegantesten Erfindungen der neueren Geometrie gehört. Die Entdeckung hat er in seiner Geometrie p. 311 mit folgenden Worten ausgedrückt: „Irgend 6 Punkte eines Kegelschnittes bestimmen 60 einbeschriebene einfache Sechsecke; in jedem der letzteren liegen die drei Punkte, in welchen die gegenüberliegenden Seiten sich schneiden, in einer Geraden P, so dass 60 solcher Geraden P stattfinden; von diesen 60 Geraden gehen drei und drei durch irgend einen Punkt R, so dass 20 solcher Punkte R entstehen; und von diesen 20 Punkten R liegen 15 mal 4 in einer Geraden S, so dass jeder in drei solcher Geraden liegt. (Welche Beziehungen haben diese 15 Geraden S zu einander)."

Wenn man die Steiner'sche Figur ablöset von dem Kegelschnitte, auf welchen sie sich bezieht, so besteht dieselbe nur aus 15 geraden Linien S, welche sich zu dreien 20 mal in einem der 20 Punkte R schneiden. Der Charakter dieser complicirten Figur lässt sich, wie ich in Crelles Journal Bd. 42 p. 269 gezeigt habe, viel einfacher als durch eine Zeichnung in folgenden 20 linearen identischen Gleichungen darlegen:

$$\delta)\quad \varrho + \varrho' + \varrho'' = 0$$

$$1)\ldots\quad \begin{array}{lll}
\alpha^0)\ b - c = \varrho & \beta^0)\ c - a = \varrho' & \gamma^0)\ a - b = \varrho'' \\
\alpha')\ b' - c' = \varrho & \beta')\ c' - a' = \varrho' & \gamma')\ a' - b' = \varrho'' \\
\alpha'')\ b'' - c'' = \varrho & \beta'')\ c'' - a'' = \varrho' & \gamma'')\ a'' - b'' = \varrho'' \\
 & & \\
\alpha_0)\ a' - a'' = r & \alpha_{,})\ a'' - a = r' & \alpha_{,,})\ a - a' = r'' \\
\beta_0)\ b' - b'' = r & \beta_{,})\ b'' - b = r' & \beta_{,,})\ b - b' = r'' \\
\gamma_0)\ c' - c'' = r & \gamma_{,})\ c'' - c = r' & \gamma_{,,})\ c - c' = r''
\end{array}$$

$$d)\quad r + r' + r'' = 0$$

Die geometrische Deutung dieser 20 identischen Gleichungen, vorzugsweise die analytische Ausdehnung derselben Gleichungen, unter Beschränkungen die am Ende dieses Abschnittes dargelegt werden sollen, bilden den Gegenstand dieser Abhandlung.

Die Steiner'sche Figur geht von irgend drei geraden Linien ϱ, ϱ', ϱ'' aus, welche sich in einem beliebigen Punkte δ schneiden. Sind demnach $\varrho = 0$, $\varrho' = 0$, $\varrho'' = 0$ die Gleichungen dieser geraden Linien, so müssen sich dieselben mit constanten Factoren multipliciren lassen der Art, dass ihre Summe identisch verschwindet. Nimmt man aber an, dass die angegebenen Gleichungen schon diese Factoren haben, so ist die in 1) aufgeführte identische Gleichung δ) die Bedingung des Anfanges der weiter auszuführenden Steiner'schen Figur.

Den genannten drei geraden Linien ist irgend ein Dreieck einbeschrieben, dessen Ecken α^0, β^0, γ^0 der Reihe nach in den geraden Linien ϱ, ϱ', ϱ'' liegen. Sind nun $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ die Gleichungen der den genannten Ecken gegenüberliegenden Seiten, so müssen sich sechs constante Factoren α, β, γ, α', β', γ' finden lassen der Art, dass man identisch hat:

$$\beta B - \gamma' C = \varrho \qquad \gamma C - \alpha' A = \varrho' \qquad \alpha A - \beta' B = \varrho''$$

und mit Rücksicht auf die identische Gleichung δ:

$$(\alpha - \alpha')\,\mathrm{A} + (\beta - \beta')\,\mathrm{B} + (\gamma - \gamma')\,\mathrm{C} = 0\,.$$

Da diese identische Gleichung aber aussagt, dass die Seiten des Dreieckes durch einen und denselben Punkt gehen, was gegen die Voraussetzung ist, so muss $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ sein. Setzt man nun $\alpha\mathrm{A} = \mathrm{a}$, $\beta\mathrm{B} = \mathrm{b}$, $\gamma\mathrm{C} = \mathrm{c}$, so sind $\mathrm{a} = 0$, $\mathrm{b} = 0$, $\mathrm{c} = 0$ die Gleichungen der Seiten des Dreieckes und die identischen Gleichungen α^0), β^0), γ^0) die Bedingungen, dass das Dreieck den drei geraden Linien ϱ wirklich einbeschrieben ist.

Beschreibt man den drei geraden Linien ϱ ein zweites Dreieck $\alpha'\beta'\gamma'$ ein, dessen Seiten in gleicher Weise durch die Gleichungen $\mathrm{a}' = 0$, $\mathrm{b}' = 0$, $\mathrm{c}' = 0$ ausgedrückt seien und ein drittes Dreieck mit den Seiten $\mathrm{a}'' = 0$, $\mathrm{b}'' = 0$, $\mathrm{c}'' = 0$, so lässt sich annehmen, dass diese Gleichungen bereits mit solchen constanten Factoren multiplicirt seien, dass man die identischen Gleichungen hat α') β') γ'), α'') β'') γ''), welche die Bedingungen der bis dahin beschriebenen Steiner'schen Figur ausdrücken.

Definirt man nun die drei linearen Ausdrücke r, r', r'' durch die identischen Gleichungen α_0), $\alpha_,$), $\alpha_{,,}$), so sieht man, dass alle übrigen Gleichungen 1) aus den besprochenen unmittelbare Folgen sind. Diese Gleichungen sind aber der Ausdruck für bemerkenswerthe Eigenschaften der beschriebenen Figur. Denn die identischen Gleichungen α_0), β_0), γ_0) beweisen, dass die correspondirenden Seiten des zweiten und dritten Dreieckes, welche den drei geraden Linien ϱ einbeschrieben wurden, sich in drei Punkten α_0, β_0, γ_0 schneiden, welche auf derselben geraden Linie $\mathrm{r} = 0$ liegen. Combinirt man ebenso das dritte und erste den geraden Linien ϱ einbeschriebene Dreieck oder das erste und zweite, so erhält man die Schnittpunkte $\alpha_,$, $\beta_,$, $\gamma_,$ oder $\alpha_{,,}$, $\beta_{,,}$, $\gamma_{,,}$, welche respective auf den geraden Linien $\mathrm{r}' = 0$ oder $\mathrm{r}'' = 0$ liegen. Die letzte identische Gleichung 1) giebt den Beweis, dass auch die drei geraden Linien r sich in einem Punkte d schneiden.

Die beschriebene Figur ist die Steiner'sche. Sie besteht aus 15 geraden Linien S:

$$2) \ldots \quad \begin{matrix} \varrho & \varrho' & \varrho'' \\ r & r' & r'' \end{matrix} \qquad \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

und den 20 Punkten R:

$$3) \ldots \quad \begin{matrix} \delta & \alpha^0\ \beta^0\ \gamma^0 & \alpha'\ \beta'\ \gamma' & \alpha''\ \beta''\ \gamma'' \\ d & \alpha_0\ \beta_0\ \gamma_0 & \alpha_{,}\ \beta_{,}\ \gamma_{,} & \alpha_{,,}\ \beta_{,,}\ \gamma_{,,} \end{matrix}$$

Die Steiner'sche Figur lässt sich bequem in folgendem Satze ausdrücken:

„Wenn man dreien geraden Linien ϱ, welche von demselben „Punkte δ ausgehen, drei Dreiecke einbeschreibt, so schneiden sich „die correspondirenden Seiten von je zwei dieser Dreiecke in drei „Punkten, welche in einer geraden Linie r liegen und die drei den „Dreieck-Paaren entsprechenden geraden Linien r schneiden sich „wieder in einem Punkte d."

Der Charakter der Figur spricht sich in diesem Satze aber nicht so deutlich aus als in den aufgestellten identischen Gleichungen 1). Denn aus dem Satze ist es nicht sogleich ersichtlich, wie man umgekehrt von den drei geraden Linien r ausgehend, welche sich in dem Punkte d schneiden, in umgekehrter Richtung ohne die Figur zu verlassen zu dem dem Punkte d entsprechenden Punkte δ gelangen muss.

Dass die Punkte δ und d in der Figur gleichberechtigt sind, ersieht man aus den identischen Gleichungen 1) sofort, wenn man die geometrische Interpretation derselben in umgekehrter Ordnung, von der letzten Gleichung ausgehend, unternimmt. Die Punkte δ und d sind deshalb conjugirte Punkte.

Ebenso wie die Punkte δ und d in der Steiner'schen Figur einander entsprechen, so entsprechen einander auch je zwei von den 20 Punkten R, wie die Zusammenstellung derselben in 3) angiebt zum Beispiel die Punkte α^0 und α_0.

Um dieses leichter einzusehen, wiederholen wir nur die 20 identischen Gleichungen in veränderter Reihenfolge:

$$\alpha^0)\quad b - c - \varrho = 0$$

$$\begin{array}{llll}
\beta^0)\ a + \varrho' = c & \gamma^0)\ a - \varrho'' = b & \delta)\ -\varrho' - \varrho'' = \varrho \\
\gamma_{,})\ c'' - r' = c & \beta_{,})\ b'' - r' = b & \alpha'')\ b'' - c'' = \varrho \\
\gamma_{,,})\ c' + r'' = c & \beta_{,,})\ b' + r'' = b & \alpha')\ b' - c' = \varrho \\
\\
\gamma')\ b' + \varrho'' = a' & \gamma'')\ b'' + \varrho'' = a'' & \beta_0)\ b' - b'' = r \\
\beta')\ c' - \varrho' = a' & \beta'')\ c'' - \varrho' = a'' & \gamma_0)\ c' - c'' = r \\
\alpha_{,,})\ a - r'' = a' & \alpha_{,})\ a + r' = a'' & d)\ -r' - r'' = r
\end{array}$$

$$\alpha_0)\quad a' - a'' - r = 0$$

Denn die geometrische Interpretation dieser Gleichungen nach Art der Gleichungen 1) ergiebt, dass, wenn man von den drei geraden Linien b, c, ϱ ausgeht, welche sich in dem Punkte α^0 schneiden, man in der Steiner'schen Figur auf die geraden Linien a', a'', r geführt wird, welche sich in dem, dem Punkte α^0 entsprechenden, Punkte α_0 schneiden.

Es vereinfacht sich demnach die Anschauung der Steiner'schen Figur, wenn man die ältere Bezeichnung der 20 Steiner'schen Punkte aufgiebt und, wie von Schröter in seiner Geometrie p. 166 bereits geschehen, nunmehr von den 10 Steiner'schen Punktepaaren R und den 15 Steiner'schen geraden Linien S spricht.

Diese Bezeichnung wird sich mehr noch empfehlen, wenn man die Steiner'sche Figur nicht, wie hier, von ihrem Ursprunge, den 6 Punkten auf einem Kegelschnitte, trennt und es unternimmt nach Anleitung in

Crelles Journal Bd. 68 pag. 205 und mit Hülfe des Uebertragungs-Prinzipes in Schlömilchs Journal 11. Jahrgang p. 425 die Resolventen des 10. und 15. Grades von Lagrange, Traité de la résolution des équations numériques p. 260 einer algebraischen Gleichung des 6. Grades geometrisch zu construiren.

Die discutirte Steiner'sche Figur ging von drei geraden Linien ϱ aus, welchen irgend drei Dreiecke abc, a'b'c', a''b''c'' einbeschrieben waren. Nimmt man aber Abstand von dem dritten einbeschriebenen Dreiecke und definirt die drei Ausdrücke a'' b'' c'' durch die identischen Gleichungen:

$$a'' + b + c' = 0 \quad , \quad b'' + c + a' = 0 \quad , \quad c'' + a + b' = 0$$

so sieht man, dass in 1) die Gleichungen α'') β'') γ'') aus den vorhergehenden und den die Ausdrücke a'' b'' c'' definirenden Gleichungen folgen. Es ist deshalb das Dreieck mit den Seiten a'' = 0, b'' = 0, c'' = 0 ebenfalls den drei geraden Linien ϱ einbeschrieben, jedoch nicht willkürlich, sondern bedingt durch die beiden ersten Dreiecke. Die Figur wird hierdurch eine specielle Steiner'sche und ihr Charakter drückt sich ebenfalls durch die 20 identischen Gleichungen 1) aus, aber mit Anschluss der identischen Gleichungen:

$$4) \ldots \begin{array}{lll} a'' + b + c' = 0 & b'' + c + a' = 0 & c'' + a + b' = 0 \\ a'' + b' + c = 0 & b'' + c' + a = 0 & c'' + a' + b = 0 \end{array}$$

welche einfache Folgen aus den kurz vorhergehenden sind.

Die Gleichungen $\alpha_{,,}$) $\beta_{,,}$) $\gamma_{,,}$) beweisen, dass die geraden Linien aa', bb', cc' die gegenüberliegenden Seiten eines Pascal'schen Sechseckes sind, welche sich paarweise in drei Punkten der Pascal'schen Linie r'' schneiden. In diesem Sechsecke sind, wie die Gleichungen 4) darthun a'' b'' c'' die Diagonalen, welche die gegenüberliegenden Ecken des Sechseckes verbinden.

Geht man nun in der Beschreibung der speciellen Steiner'schen Figur, welche in den angegebenen 26 Gleichungen ihren analytischen Ausdruck hat, nicht von den drei geraden Linien ϱ aus, welchen drei Dreiecke einbeschrieben wurden, sondern von dem genannten Pascal'schen Sechsecke, so lässt sich dieselbe durch folgenden Satz ausdrücken:

„Wenn man in einem Pascal'schen Sechsecke die drei Dia-„gonalen zieht, welche die gegenüberliegenden Ecken verbinden, „so bilden die geraden Seiten des Sechseckes, die ungeraden Seiten „und die drei Diagonalen drei Dreiecke, welche dreien von einem „Punkte ausgehenden geraden Linien ϱ einbeschrieben sind. Die „entsprechenden Seiten je zweier von diesen Dreiecken schneiden „sich paarweise in einer geraden Linie r, und die drei geraden „Linien r schneiden sich wieder in einem Punkte."

Die Erweiterung dieses Satzes oder, analytisch gefasst, die Erweiterung der 26 den Satz beweisenden identischen Gleichungen wird der Gegenstand des folgenden Abschnittes sein.

II.

Wenn R die Determinante bedeutet: $R = \sum \pm u_0^0 u_1^1 \ldots u_m^m$, so hat man bekanntlich:

$$\frac{d^2R}{du_\varkappa^\lambda du_{\varkappa'}^{\lambda'}} \cdot R = \frac{dR}{du_\varkappa^\lambda} \frac{dR}{du_{\varkappa'}^{\lambda'}} - \frac{dR}{du_\varkappa^{\lambda'}} \frac{dR}{du_{\varkappa'}^{\lambda}}.$$

Die Ausdrücke, aus welchen die Gleichung zusammengesetzt ist, sind sämmtlich Determinanten. Führt man die Bezeichnungen ein: $\triangle$, $[\alpha\gamma, \beta\delta]$, $[\alpha\beta]$ für die Determinanten:

$$5) \ldots \quad \triangle = \begin{vmatrix} u_0^0 & \ldots & u_n^0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0^n & \ldots & u_n^n \end{vmatrix}, \quad [\alpha\gamma, \beta\delta] = \begin{vmatrix} u_0^0 & \ldots & u_n^0, & \alpha_0, & \gamma_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0^n & \ldots & u_n^n, & \alpha_n, & \gamma_n \\ \beta_0 & \ldots & \beta_n, & 0, & 0 \\ \delta_0 & \ldots & \delta_n, & 0, & 0 \end{vmatrix}, \quad [\alpha\beta] = \begin{vmatrix} u_0^0 & \ldots & u_n^0, & \alpha_0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ u_0^n & \ldots & u_n^n, & \alpha_n \\ \beta_0 & \ldots & \beta_n, & 0 \end{vmatrix}.$$

so hat man aüf Grund der angegebenen Gleichung:

$$6) \ldots \quad \triangle[\alpha\gamma, \beta\delta] = [\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta].$$

Diese Gleichung unter der Bezeichnung 5) wird der Ausgangspunkt sein der nachfolgenden Entwickelungen. Sie lehrt, dass die Determinante $[\alpha\gamma, \beta\delta]$ nur ihr Vorzeichen ändert, wenn man die Buchstaben α und γ oder die Buchstaben β und δ mit einander vertauscht, was auch an der Determinante selber in 5) zu Tage tritt.

Wenn man in der Gleichung 6) die Buchstaben β und γ mit einander vertauscht und in der daraus hervorgehenden Gleichung wieder die Buchstaben β und δ mit einander vertauscht, so erhält man:

$$\begin{aligned} \triangle[\alpha\beta, \gamma\delta] &= [\alpha\gamma][\beta\delta] - [\alpha\delta][\beta\gamma] \\ \triangle[\alpha\delta, \gamma\beta] &= [\alpha\gamma][\delta\beta] - [\alpha\beta][\delta\gamma]. \end{aligned}$$

Die Differenz der beiden Gleichungen giebt unter der Voraussetzung dass $\mu_\varkappa^\lambda = \mu_\lambda^\varkappa$, dass also die Determinante $\triangle$ eine symmetrische sei, weil dann $[\beta\delta] = [\delta\beta]$ ist, mit Rücksicht auf 6) folgendes Resultat:

$$\begin{aligned} \triangle\Big\{[\alpha\beta, \gamma\delta] - [\alpha\delta, \gamma\beta]\Big\} &= [\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta] \\ &= \triangle[\alpha\gamma, \beta\delta], \end{aligned}$$

und mit Unterdrückung des Factors $\triangle$ haben wir:

$$7^*) \ldots \quad [\alpha\beta, \gamma\delta] = [\alpha\gamma, \beta\delta] + [\alpha\delta, \gamma\beta].$$

Von dieser Gleichung wird in dem Folgenden kein Gebrauch gemacht werden. Ich habe sie aber nicht unterdrücken wollen, weil sie beweiset, dass man, wie von dem Multiplications-Theorem der Determinanten, so auch unter Beschränkungen von dem Additions-Theorem der Determinanten sprechen kann. Wie das Produkt zweier Determinanten sich wieder als eine Determinante darstellt, welche zusammengesetzt ist aus den Elementen der Factoren, so stellt sich hier die Summe zweier Determinanten dar als eine Determinante zusammengesetzt aus den Elementen der Summanden.

Eine zweite ähnlich gebildete Gleichung leitet man unter der gleichen Voraussetzung $\mu_\varkappa^\lambda = \mu_\lambda^\varkappa$ aus den beiden oben aus 6) hervorgegangenen Gleichungen ab, wenn man die erste mit $[\alpha\beta][\gamma\delta]$ multiplicirt und die zweite mit $[\alpha\delta][\gamma\beta]$ multiplicirte Gleichung abzieht. Dadurch erhält man mit Rücksicht auf 6):

$$\begin{aligned}\triangle\Big\{[\alpha\beta,\gamma\delta][\alpha\beta][\gamma\delta]-[\alpha\delta,\gamma\beta][\alpha\delta][\gamma\beta]\Big\} &= [\alpha\gamma][\beta\delta]\Big\{[\alpha\beta][\gamma\delta]-[\alpha\delta][\gamma\beta]\Big\}\\ &= \triangle[\alpha\gamma][\beta\delta][\alpha\gamma,\beta\delta]\ ,\end{aligned}$$

und mit Unterdrückung des Factors $\triangle$

$$8^*)\ \ldots\quad [\alpha\beta,\gamma\delta][\alpha\beta][\gamma\delta] = [\alpha\gamma,\beta\delta][\alpha\gamma][\beta\delta]+[\alpha\delta,\gamma\beta][\alpha\delta][\gamma\beta]\ ,$$

eine Gleichung, welche wegen ihrer Beschränkung ebensowenig als die vorhergehende 7*) in die folgenden Entwickelungen einzugreifen berufen ist.

Um eine andere Art von Determinanten-Gleichungen abzuleiten, welche der eben gemachten Voraussetzung nicht bedürfen, setzen wir in 6) für die Buchstaben β und γ respective ζ und ε. Dadurch geht die genannte Gleichung über in:

$$\triangle[\alpha\varepsilon,\zeta\delta] = [\alpha\zeta][\varepsilon\delta]-[\alpha\delta][\varepsilon\zeta].$$

Multiplicirt man diese Gleichung mit $[\gamma\beta]$ und zieht sie von der mit $[\varepsilon\zeta]$ mltiplicirten Gleichung 6) ab, so erhält man:

$$\triangle\left\{[\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\beta\delta]-[\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\zeta\delta]\right\} = [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta]-[\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta]\,.$$

Der linke Theil dieser identischen Gleichung ist das Product zweier Factoren, von welchen der erste $\triangle$ sich nicht ändert, wenn die Buchstaben α, β, . . ζ verändert werden. Der andere Factor ϱ'':

$$\varrho'' = [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\beta\delta]-[\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\zeta\delta]$$

ändert sich jedoch zugleich mit den Buchstaben α, $\beta\ldots\zeta$. Vertauscht man aber diese Buchstaben in der Weise, dass der rechte Theil der vorhergehenden identischen Gleichung ungeändert bleibt, so wird durch die gleiche Vertauschung auch ϱ'' ungeändert bleiben, wenn gleich die Form dieses Ausdruckes sich ändert.

Der rechte Theil der angegebenen identischen Gleichung bleibt aber ungeändert, wenn man für die Buchstaben α, β, γ, δ, ε, ζ respective setzt γ, δ, ε, ζ, α, β oder ε, ζ, α, β, γ, δ. Man hat daher:

9) . . . . $$\triangle\varrho'' = [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta]-[\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta]$$

10) . . . . $$\begin{aligned}\varrho'' &= [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\beta\delta]-[\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\zeta\delta]\\ &= [\alpha\beta][\gamma\varepsilon,\delta\zeta]-[\varepsilon\delta][\gamma\alpha,\beta\zeta]\\ &= [\gamma\delta][\varepsilon\alpha,\zeta\beta]-[\alpha\zeta][\varepsilon\gamma,\delta\beta]\,.\end{aligned}$$

Hieraus entspringt nun durch cyclische Vertauschung der Buchstaben α, γ, ε ein ganzes System identischer Gleichungen. Denn setzt man γ, ε, α für α, γ, ε so wird:

11) . . . . $$\triangle\varrho = [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta]-[\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta]$$

12) . . . . $$\begin{aligned}\varrho &= [\alpha\zeta][\gamma\varepsilon,\beta\delta]-[\varepsilon\beta][\gamma\alpha,\zeta\delta]\\ &= [\gamma\beta][\varepsilon\alpha,\delta\zeta]-[\alpha\delta][\varepsilon\gamma,\beta\zeta]\\ &= [\varepsilon\delta][\alpha\gamma,\zeta\beta]-[\gamma\zeta][\alpha\varepsilon,\delta\beta]\,.\end{aligned}$$

Setzt man ε, α, γ für α, γ, ε, so gehen 9) und 10) über in:

13) . . . . $$\Delta\varrho' = [\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta] - [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta]$$

14) . . . $$\begin{aligned} \varrho' &= [\gamma\zeta][\varepsilon\alpha,\beta\delta] - [\alpha\beta][\varepsilon\gamma,\zeta\delta] \\ &= [\varepsilon\beta][\alpha\gamma,\delta\zeta] - [\gamma\delta][\alpha\varepsilon,\beta\zeta] \\ &= [\alpha\delta][\gamma\varepsilon,\zeta\beta] - [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha,\delta\beta]\,. \end{aligned}$$

Addirt man endlich 9), 11), 13), so erhält man:

15) . . . . $$\varrho + \varrho' + \varrho'' = 0$$

Hieraus entspringt nun ein zweites System identischer Gleichungen, wenn man die Buchstaben δ und ζ mit einander vertauscht. Bezeichnet man nämlich die Ausdrücke, in welche ϱ'', ϱ, ϱ' durch diese Vertauschungen übergehen respective mit r'', r', r, so erhält man aus 9) bis 15) folgendes System:

16) . . . . $$\Delta \mathrm{r}'' = [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] - [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta]$$

17) . . . . $$\begin{aligned} \mathrm{r}'' &= [\varepsilon\delta][\alpha\gamma,\beta\zeta] - [\gamma\beta][\alpha\varepsilon,\delta\zeta] \\ &= [\alpha\beta][\gamma\varepsilon,\zeta\delta] - [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha,\beta\delta] \\ &= [\gamma\zeta][\varepsilon\alpha,\delta\beta] - [\alpha\delta][\varepsilon\gamma,\zeta\beta] \end{aligned}$$

18) . . . . $$\Delta \mathrm{r}' = [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta] - [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta]$$

19) . . . . $$\begin{aligned} \mathrm{r}' &= [\alpha\delta][\gamma\varepsilon,\beta\zeta] - [\varepsilon\beta][\gamma\alpha,\delta\zeta] \\ &= [\gamma\beta][\varepsilon\alpha,\zeta\delta] - [\alpha\zeta][\varepsilon\gamma,\beta\delta] \\ &= [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma,\delta\beta] - [\gamma\delta][\alpha\varepsilon,\zeta\beta] \end{aligned}$$

20) . . . . $$\Delta \mathrm{r} = [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta] - [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta]$$

21) . . . . $$\begin{aligned} \mathrm{r} &= [\gamma\delta][\varepsilon\alpha,\beta\zeta] - [\alpha\beta][\varepsilon\gamma,\delta\zeta] \\ &= [\varepsilon\beta][\alpha\gamma,\zeta\delta] - [\gamma\zeta][\alpha\varepsilon,\beta\delta] \\ &= [\alpha\zeta][\gamma\varepsilon,\delta\beta] - [\varepsilon\delta][\gamma\alpha,\zeta\beta] \end{aligned}$$

$$22) \ldots \quad r + r' + r'' = 0 .$$

Um über dieses Chaos von Gleichungen einen Ueberblick zu gewinnen, führen wir die Bezeichnungen ein:

$$23) \ldots \begin{array}{lll} a = [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha, \delta\beta] & a' = [\alpha\beta][\varepsilon\gamma, \zeta\delta] & a'' = [\gamma\delta][\varepsilon\alpha, \zeta\beta] \\ b = [\gamma\beta][\varepsilon\alpha, \delta\zeta] & b' = [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \zeta\beta] & b'' = [\alpha\zeta][\varepsilon\gamma, \delta\beta] \\ c = [\alpha\delta][\varepsilon\gamma, \beta\zeta] & c' = [\gamma\zeta][\alpha\varepsilon, \delta\beta] & c'' = [\varepsilon\beta][\alpha\gamma, \delta\zeta] . \end{array}$$

Hierdurch kommen nämlich alle Gleichungen 9) bis 22) zurück auf die 20 Gleichungen 1) mit Ausschluss der 6 folgenden Gleichungen, welche die 6 Ausdrücke ϱ und r definiren:

$$24) \ldots \begin{array}{l} \triangle\varrho = [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta] - [\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta] \\ \triangle\varrho' = [\varepsilon\beta][\alpha\delta][\gamma\zeta] - [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta] \\ \triangle\varrho'' = [\alpha\beta][\gamma\delta][\varepsilon\zeta] - [\gamma\beta][\varepsilon\delta][\alpha\zeta] \\ \\ \triangle r = [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta] - [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] \\ \triangle r' = [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta] - [\varepsilon\beta][\alpha\zeta][\gamma\delta] \\ \triangle r'' = [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] - [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta] . \end{array}$$

An den 9 Determinanten-Ausdrücken 23) kann man die Bemerkung machen, dass dieselben in einander übergehen aber das entgegengesetzte Vorzeichen annehmen, wenn man entweder irgend zwei von den Buchstaben α, γ, ε oder irgend zwei von den Buchstaben β, δ, ζ mit einander vertauscht.

Von diesen Eigenschaften der 9 Determinanten-Ausdrücke 23) werden wir Gebrauch machen zur Entscheidung der Frage, ob dieselben so allgemein sind, dass sie nur den 20 Gleichungen 1) genügen, oder ob sie auch den Bedingungen 4) oder ähnlichen Bedingungen unterworfen sind. Das letztere trifft zu, und es wird unsere Aufgabe sein, dieses nachzuweisen.

Nehmen wir zu diesem Zwecke irgend einen der Ausdrücke, welche nach 4) verschwinden, zum Beispiel den Ausdruck E:

25) . . . . $$E = a + b' + c'',$$

so stellt sich derselbe nach 23) so dar:

26) . . . . $$E = [\varepsilon\zeta][\alpha\gamma, \beta\delta] + [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \zeta\beta] + [\varepsilon\beta][\alpha\gamma, \delta\zeta].$$

Man hat aber nach 6) und mit Vertauschung der Buchstaben in dieser Gleichung:

$$\begin{aligned} \triangle[\alpha\gamma, \beta\delta] &= [\alpha\beta][\gamma\delta] - [\alpha\delta][\gamma\beta] \\ \triangle[\alpha\gamma, \zeta\beta] &= [\alpha\zeta][\gamma\beta] - [\alpha\beta][\gamma\zeta] \\ \triangle[\alpha\gamma, \delta\zeta] &= [\alpha\delta][\gamma\zeta] - [\alpha\zeta][\gamma\delta]. \end{aligned}$$

Multiplicirt man demnach die Gleichung 26) mit $\triangle$, so stellt sich der rechte Theil der Gleichung als eine Determinante dar wie folgt:

27) . . . . $$\triangle E = \begin{vmatrix} [\alpha\beta], & [\alpha\delta], & [\alpha\zeta] \\ [\gamma\beta], & [\gamma\delta], & [\gamma\zeta] \\ [\varepsilon\beta], & [\varepsilon\delta], & [\varepsilon\zeta] \end{vmatrix}$$

welche beweiset, dass E nur sein Vorzeichen ändert, wenn man irgend zwei Buchstaben α, γ, ε oder irgend zwei Buchstaben β, δ, ζ mit einander vertauscht.

Diese Vertauschungen lassen nun aus 25) folgende 6 identische Gleichungen hervorgehen:

28) . . . . $$\begin{aligned} &a'' + b + c' = E \qquad && b'' + c + a' = E \qquad && c'' + a + b' = E \\ &a'' + b' + c = E && b'' + c' + a = E && c'' + a' + b = E. \end{aligned}$$

Gleichungen, welche in die Gleichungen 4) vollständig übergehen, wenn E verschwindet. Dieses trifft aber wohl nur zu wenn $n = 1$, wie nachgewiesen werden soll.

Denkt man sich die Determinante ΔE entwickelt, so wird ein beliebiges Glied der Entwickelung nur die Form haben können:

$$C\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e \cdot \beta_b\delta_d\zeta_f \,.$$

Dieses eine Glied bedingt, weil die Determinante auch zwischen den Buchstaben β, δ, ζ alternirt, andere Glieder mit abwechselnden Vorzeichen, deren Summe ist:

$$C\alpha_a\gamma_c\varepsilon_e \cdot \sum \pm \beta_b\delta_d\zeta_f$$

und diese Summe als ein Glied der Entwickelung aufgefasst, bedingt, weil die Determinante auch zwischen den Buchstaben α, γ, ε alternirt, wieder Glieder, deren Summe ist:

$$C\sum \pm \alpha_a\gamma_c\varepsilon_e \cdot \sum \pm \beta_b\delta_d\zeta_f \,.$$

Da nun im Falle $n = 1$ die Indices a, c, e und die Indices b, d, f nur die Zahlen 0 und 1 bedeuten können, in welchem Falle sowohl der erste als der zweite Factor neben C verschwindet, so sieht man, dass das aus der Entwickelung der Determinante ΔE hervorgehobene Glied nicht vorkommen kann, dass also die Determinante selber verschwindet. Der in 5) definirte Ausdruck Δ verschwindet nicht. Es muss desshalb E verschwinden. Dadurch gehen nun die Gleichungen 28) über in die Gleichungen 4).

In dem allgemeinen Falle, wenn $n > 1$, lässt sich für das Verschwinden von E ein gleicher Beweis nicht führen und wir müssen an Stelle Gleichungen 4) die Gleichungen 28) gelten lassen.

Zum Schlusse führen wir noch ein System Gleichungen vor, welches sich aus 16) und 17) ergiebt, wenn man die Buchstaben $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ der Reihe nach verändert in $\varepsilon\ \zeta\ \beta\ \gamma\ \delta\ \alpha$ oder in $\beta\ \zeta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \alpha$, und annimmt, dass r'' durch diese Veränderung übergeht in $-r_0$ oder in $-r_1$.

29) . . . . $$\triangle r'' = [\alpha\beta][\gamma\zeta][\varepsilon\delta] - [\gamma\beta][\varepsilon\zeta][\alpha\delta]$$

30) . . . . $$\begin{aligned} r'' &= [\varepsilon\delta][\alpha\gamma, \beta\zeta] - [\gamma\beta][\alpha\varepsilon, \delta\zeta] \\ &= [\alpha\beta][\gamma\varepsilon, \zeta\delta] - [\varepsilon\zeta][\gamma\alpha, \beta\delta] \\ &= [\gamma\zeta][\varepsilon\alpha, \delta\beta] - [\alpha\delta][\varepsilon\gamma, \zeta\beta] \end{aligned}$$

31) . . . . $$-\triangle r_0 = [\delta\gamma][\beta\zeta][\varepsilon\alpha] - [\beta\gamma][\varepsilon\zeta][\delta\alpha]$$

32) . . . . $$\begin{aligned} -r_0 &= [\varepsilon\alpha][\delta\beta, \gamma\zeta] - [\beta\gamma][\delta\varepsilon, \alpha\zeta] \\ &= [\delta\gamma][\beta\varepsilon, \zeta\alpha] - [\varepsilon\zeta][\beta\delta, \gamma\alpha] \\ &= [\beta\zeta][\varepsilon\delta, \alpha\gamma] - [\delta\alpha][\varepsilon\beta, \zeta\gamma] \end{aligned}$$

33) . . . . $$-\triangle r_, = [\varepsilon\delta][\gamma\zeta][\beta\alpha] - [\gamma\delta][\beta\zeta][\varepsilon\alpha]$$

34) . . . . $$\begin{aligned} -r_, &= [\beta\alpha][\varepsilon\gamma, \delta\zeta] - [\gamma\delta][\varepsilon\beta, \alpha\zeta] \\ &= [\varepsilon\delta][\gamma\beta, \zeta\alpha] - [\beta\zeta][\gamma\varepsilon, \delta\alpha] \\ &= [\gamma\zeta][\beta\varepsilon, \alpha\delta] - [\varepsilon\alpha][\beta\gamma, \zeta\delta] \end{aligned}$$

Unter der ausdrücklichen Annahme, dass $\triangle$ eine symmetrische Determinante sei, geht dann aus 29), 31), 33) die einfache Gleichung hervor:

35*) . . . . $$r_0 + r_, + r'' = 0\,.$$

Die aufgeführten identischen Determinanten-Gleichungen sind vielfacher geometrischer Deutungen fähig, von welchen wir nur eine hervorheben wollen. Setzen wir zu diesem Zwecke $n = 1$ und lassen die Grössen u lineare Ausdrücke der Coordinaten eines variabeln Punktes bedeuten, so werden Determinanten-Ausdrücke von der Form $[\alpha\beta]$ die Repräsentanten von geraden Linien sein, welche irgend 6 auf dem Kegelschnitte $\triangle = 0$ gelegene Punkte $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ paarweise verbinden, denn nach 6) verschwindet $\triangle$, wenn $[\alpha\beta]$ und $[\alpha\delta]$ verschwinden oder $[\alpha\beta]$ und $[\gamma\beta]$. Es ist also $[\alpha\beta] = 0$ die Gleichung der geraden Linie, welche die Punkte α und β des Kegelschnittes verbindet. Geht man nun von dem, dem Kegelschnitte einbeschriebenen, Sechsecke $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$ aus, so beweisen die aufgeführten Determinanten-Gleichungen bis 28) den am Ende des vorhergehenden Abschnittes angegebenen Satz. Unter derselben Annahme $n = 1$ und unter der Beschränkung, dass $\triangle$ eine symmetrische Determinante sei, welche Beschränkung jeder Kegelschnitt gestattet, beweisen die mit 29) anhebenden Gleichungen, dass dem Kegelschnitte drei Sechsecke $\varepsilon\ \zeta\ \gamma\ \beta\ \alpha\ \delta$, $\varepsilon\ \zeta\ \beta\ \gamma\ \delta\ \alpha$, $\beta\ \zeta\ \gamma\ \delta\ \varepsilon\ \alpha$ einbeschrieben sind, deren Pascal'sche Linien $r''\ r_0\ r$, sich in einem Kirkman'schen Punkte schneiden.

München, im Februar 1872.