

Abhandlungen  
der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
Mathematisch-naturwissenschaftliche Abteilung  
Neue Folge. Heft 40  
1936

---

Über Enneper'sche Flächen  
und Bäcklund'sche Transformation

von

Rudolf Steuerwald

Vorgelegt von C. Carathéodory in der Sitzung vom 1. Februar 1936

---

München 1936  
Verlag der Bayerischen Akademie der Wissenschaften  
in Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei  
in Nördlingen



## VORWORT.

Die vorliegende Arbeit handelt von den Enneperschen Flächen konstanter Krümmung mit einer Schar ebener Krümmungslinien (= Kr.-Ln.), die hier kurz als E-Fln. bezeichnet werden. Der I. Teil bringt das, was sich mit Gültigkeit für alle E-Fln. sagen läßt; der III. Teil lehrt deren Bäcklundsche Transformierten finden. Beide Teile sind so allgemein gehalten, daß sie in gleicher Weise für Flächen positiver und negativer Krümmung gelten. Der II. Teil dagegen beschäftigt sich speziell mit den reellen E-Fln. negativer Krümmung.

Deren eingehende Untersuchung war ursprünglich gar nicht beabsichtigt. Der Verfasser gedachte vielmehr ihre Kenntnis der Literatur zu entnehmen und sofort an ihre Transformation zu gehen. Aber bald zeigte sich, daß das über diese Flächen vorhandene Material trotz seines nicht ganz geringen Umfanges noch keine tragfähige Unterlage für eine Weiterarbeit abgeben konnte. Denn erstens erwies sich — wie übrigens auch für die Flächen positiver Krümmung (s. § 17) — die mehrfach verbesserte Realitätsbedingung als immer noch zu eng. Zweitens sind auch die als vorhanden erwiesenen Flächen verhältnismäßig selten bis zur Greifbarkeit diskutiert, und auch dann nur isoliert voneinander und in so verschiedener Form, daß die Möglichkeit vergleichenden Überblicks fehlt, und infolgedessen auch tatsächlich einige an speziellen Beispielen festgestellte Beziehungen nicht in ihrer Allgemeingültigkeit und Tragweite erkannt wurden.

Hier konnte nicht geflickt, sondern nur umgeschmolzen werden. So versucht der Verfasser, unter jeweiliger Verwertung des Vorgefundenen<sup>1</sup> auf eigene Faust zu einer verhältnismäßig abgerundeten Systematik und Morphologie dieser Flächen in einheitlicher Darstellung zu gelangen.

In diesem Sinn umreißt und erweitert der I. Teil die allgemeine Theorie. § 1, § 2 und Satz 1 mit 5 des § 3 sagen im wesentlichen Bekanntes in neuer Form, wobei einiges verschärft, anderes Verstreute zusammengefaßt werden konnte.<sup>2</sup> An Ergänzungen seien erwähnt die Einführung des Hilfsparameters  $w$  statt  $v$  (§ 2, f) und die Feststellung, daß

<sup>1</sup> Bei Literaturnachweisen wird jeweils nur der Name des Verfassers zitiert. Die zugehörige Schrift ist aus dem Verzeichnis S. 100 ersichtlich.

<sup>2</sup> Die Konstanten  $A$  und  $B$ , welche hier neben dem Krümmungsradius zur Charakterisierung der einzelnen Flächen dienen, sind nicht identisch mit den von Enneper und seinen Nachfolgern benützten. Folgende Bezeichnungen entsprechen sich:

$$\begin{array}{ll} \text{hier:} & R, u, v, U, V, \frac{A^2 + B^2}{2}, \left(\frac{A^2 - B^2}{2}\right)^2; \\ \text{bei Enneper:} & g, \frac{v}{g}, \frac{u}{g}, v_1, u_1, C, A^2 - B^2. \end{array}$$

Die übrigen Autoren übernehmen größtenteils wenigstens die beiden letzten Bezeichnungen. Bolke nennt  $C$  und  $C + A$ , was hier  $A^2$  und  $B^2$  heißt.

gewisse ebene Kr.-Ln. ( $v \sim 0$ ) elastische Kurven sind (in Satz 5, 4). Dadurch werden nämlich die bisher nirgends vollständig ausgesprochenen Sätze 6 mit 11 vorbereitet. 6, 7 und 8 sagen einfache Beziehungen aus, welche zwischen den ebenen Kr.-Ln. teils der nämlichen Fläche, teils der Flächenschar konstanten Moduls bezüglich der Funktionen von  $u$  ( $\frac{A}{B} = \text{const.}$ ) bestehen, und erweisen sich als fruchtbar: Satz 6 ermöglicht eine mechanische Herstellung solcher Kr.-Ln. (§ 10, III und Fig. 82), Satz 7 gestattet erst, die Untersuchung der reellen Flächen organisch, übersichtlich und ökonomisch zu gestalten. Die Sätze 9 mit 11 würden, um aktuell zu werden, die hier unterbliebene Einbeziehung der reellen E-Fln. positiver Krümmung erfordern.

Der II. Teil berichtigt zunächst in Satz 12 (§ 4) die Realitätsbedingung für die E-Fln. negativer Krümmung. Dadurch erscheinen nicht nur die Rotationsflächen überraschend in neuem Zusammenhang (§ 11), sondern treten auch die in §§ 12 und 13 beschriebenen neuen Flächen auf. Ferner ergibt sich dabei nebenher die seltsame Tatsache, daß die mit (11) a und (11) b bezeichneten (in §§ 6 und 8 beschriebenen) gestaltlich ganz verschiedenen Flächen, die zu den nämlichen Konstanten  $A$  und  $B$  gehören, und sinngemäß deren Entartungen (§§ 7 und 9) als reelle Bereiche der nämlichen komplexen Fläche betrachtet werden dürfen; jedoch kann nur immer jeweils einer von ihnen realisiert werden, während der andere ihm gegenüber imaginär (bei Entartung asymptotisch) verschraubt erscheint. In § 10 werden hieraus weitere Folgerungen gezogen.

Bei der in § 5 einsetzenden vergleichenden Untersuchung der reellen negativ gekrümmten E-Fln. sind folgende methodischen Gesichtspunkte leitend:

1. Aus der einzelnen Fläche wird jeweils nur ein „reeller Elementarbereich“  $\mathfrak{E}_v$  herausgegriffen, aus dem sich die ganze Fläche durch geeignete symmetrische Fortsetzung ableiten läßt.
2. Neben diesem reellen Elementarbereich wird unter teilweiser Heranziehung des Komplexen ein „erweiterter Elementarbereich“  $\mathfrak{E}_w$  eingeführt (Parameter  $w$  statt  $v$ ); dadurch läßt sich Satz 7 zum Satz 15 verschärfen, der aussagt, daß alle Flächen der oben erwähnten Schar konstanten Moduls vom gleichen Typus im wesentlichen gestaltlich identische ebene Krümmungslinien besitzen, von denen aber in den meisten Fällen nur ein Teil in reellen Ebenen liegt, wie die Sätze 18, 20, 21 und 25 des näheren aussagen.
3. Die entarteten Flächen werden jeweils durch Grenzübergang aus den allgemeinen abgeleitet, um dadurch die Beziehungen zwischen ersteren und letzteren möglichst deutlich hervortreten zu lassen.

Bekanntes wurde dabei in §§ 5 mit 9 verarbeitet.

Im III. Teil kann dann endlich an die Bestimmung der Bäcklundschen Transformierten herangegangen werden. Es wird bewiesen und in § 15 für die reellen Flächen negativer Krümmung näher ausgeführt, daß jede E-Fläche im allgemeinen in doppelter Weise als ihre eigene Bäcklundsche Transformierte auftreten kann (Satz 27). Dadurch ergeben sich zwei partielle Integrale für die einschlägige Riccatische Differentialgleichung,

welche deren allgemeine Integration ermöglichen. Auf die Deutung des Ergebnisses und seine Spezialisierung für die Entartungsfälle konnte jedoch nicht mehr eingegangen werden.

Ebensowenig war es möglich, die reellen E-Fln. positiver Krümmung in die Untersuchung einzubeziehen. In Satz 31 ist aber wenigstens für die nicht entarteten derartigen Flächen die Realitätsbedingung ohne Beweis berichtet und damit gezeigt, daß auch bei ihnen Formen existieren, die sich bisher der Untersuchung entzogen haben, darunter wiederum speziell solche, die zu den in §§ 12 und 13 behandelten Flächen negativer Krümmung analog sind.

Die vorliegende Arbeit geht zurück auf eine Anregung von Herrn Geh. Rat A. Voß † und fand wohlwollendste Förderung durch Herrn Geh. Rat C. Carathéodory. Beiden schulde und sage ich aufrichtigsten Dank.

# ERSTER TEIL.

## DIE E-FLÄCHEN IM ALLGEMEINEN.

### § 1. GRUNDLAGEN.<sup>3</sup>

a) Die Ausführungen dieses ersten Teiles sollen, soweit nicht ausdrücklich das Gegenteil gesagt ist, so allgemein gehalten werden, daß sie auch für komplexe Werte der vorkommenden Größen gelten, also z. B. ohne weiteres auf Flächen positiver Krümmung übertragbar sind. Dabei sollen die analytischen Beziehungen so formuliert werden, daß sie für reelle Flächengebiete mit folgenden Festsetzungen<sup>4</sup> in Einklang sind:

1. Zugrunde liegt ein Kartesisches Rechtssystem  $x, y, z$ , vielfach zu ersetzen durch ein System zylindrischer Polarkoordinaten mittels der Beziehungen:  $x = r \cos \varphi$ ;  $y = r \sin \varphi$ .

2. Die positiven Richtungen der Kr.-L.  $v$ , der Kr.-L.  $u$  (d. h. Kr.-L.  $v = \text{const.}$  bzw.  $u = \text{const.}$ ) und der Flächennormale, die durch den nämlichen Flächenpunkt gehen, sollen in der genannten Reihenfolge ein Rechtssystem bilden, desgleichen die positiven Richtungen der Tangente, Haupt- und Binormale einer jeden Kurve auf der Fläche.

3. Die Krümmung einer Kurve sei positiv, wenn die positive Richtung der Hauptnormale vom Kurvenpunkt zum Krümmungszentrum weist, andernfalls negativ. Analoges gilt für die Hauptkrümmungen der Fläche bezüglich der Richtung der Flächennormale.

4. Einer rechtsgewundenen Kurve soll positive, einer linksgewundenen negative Windung zukommen.

b) Bezogen auf Kr.-Ln. seien die Fundamentalformen einer Fläche:

$$\text{I. } ds^2 = E du^2 + G dv^2;$$

$$\text{II. } L du^2 + N dv^2.$$

Hat die Fläche die konstante Krümmung  $-\frac{1}{R^2}$ , so darf man o. B. d. A. (= ohne Beschränkung der Allgemeinheit) setzen:<sup>5</sup>

$$\sqrt{E} = R \cos \vartheta; \quad \sqrt{G} = R \sin \vartheta; \quad L = -N = -R \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (1; 1)$$

$R$  bedeutet dabei einen eindeutig gewählten Wert von  $\sqrt{R^2}$ .

<sup>3</sup> §§ 1 und 2 stimmen formal mit keiner der vorliegenden Darstellungen völlig überein. Die Gedankenführung läßt sich am ehesten mit der von Bolke (S. 60 ff.) vergleichen.

<sup>4</sup> Die einschlägige Literatur hat teilweise andere Festsetzungen.

<sup>5</sup> Bianchi, Lezioni S. 672 ff.

Setzt man noch die Linienelemente der

$$\begin{array}{lll} \text{Kr.-Ln. } v & \text{Kr.-Ln. } u & \text{Asymptotenlinien } u - v = \text{const.} \\ \text{gleich } R \cos \vartheta du & R \sin \vartheta du & R du, \end{array}$$

so mißt  $\vartheta$  in einem Punkt einer reellen Fläche die Drehung, welche die positive Richtung der Kr.-L.  $v$  in die positive Richtung der Asymptotenlinie  $u - v = \text{const.}$  überführt.

$\vartheta$  muß der Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v^2} = \sin \vartheta \cos \vartheta. \quad (1; 2)$$

c) Unter den Flächen konstanter Krümmung lassen sich die E-Fln. (= Enneperschen Flächen mit einer Schar ebener Kr.-Ln.) dadurch charakterisieren,<sup>6</sup> daß

$$\text{tg } \frac{\vartheta}{2} = e^{U+V} \quad (1; 3)$$

sein soll, wo  $U$  Funktion von  $u$  allein,  $V$  Funktion von  $v$  allein ist.

Sei nun  $U' = \frac{dU}{du}$ ;  $U'' = \frac{d^2 U}{du^2}$  usw.; analog  $V' = \frac{dV}{dv}$  usw. Schließt man den trivialen Fall  $\vartheta = \text{const.}$  zunächst aus, dann geht (1; 2) mittels (1; 3) über in

$$(U'' - V'') \text{ch}(U + V) + (1 + V'^2 - U'^2) \text{sh}(U + V) = 0. \quad (1; 4)$$

Die Integration dieser Gleichung führt im allgemeinen auf elliptische Funktionen von  $u$  und  $v$ . Wir schließen nun zur Vermeidung von Schwerfälligkeiten in diesem ersten Teil alle Fälle aus, in denen diese elliptischen Funktionen entarten, mit dem Vorbehalt, bei Diskussion der reellen Flächen diese „entarteten Flächen“ durch Grenzübergang wieder einzubeziehen. Dann sind alle weiterhin vorzunehmenden Operationen erlaubt, die Ergebnisse bleiben aber darüber hinaus gültig, soweit sie dann überhaupt noch einen bestimmten Sinn haben.

d) Aus (1; 4) erhält man durch Differentiation nach  $u$  und  $v$  und nachfolgende Elimination von  $\text{ch}(U + V)$  und  $\text{sh}(U + V)$ :

$$\begin{aligned} U' [(U''^2 - V''^2) + (1 + V'^2 - U'^2)^2] + U''' [1 + V'^2 - U'^2] &= 0; \\ V' [(U''^2 - V''^2) - (1 + V'^2 - U'^2)^2] + V''' [1 + V'^2 - U'^2] &= 0. \end{aligned} \quad (1; 5)$$

Indem man nochmals nach  $u$  und  $v$  differenziert und dann die eckigen Klammern eliminiert, trennt man die Variablen:

$$\begin{aligned} U' U'''' - U'' U''' - 4 U'^3 U'' &= 0; \\ V' V'''' - V'' V''' - 4 V'^3 V'' &= 0. \end{aligned} \quad (1; 6)$$

---

<sup>6</sup> Andere charakteristische Eigenschaften in Satz 1 S. 16.

Je zwei Quadraturen ergeben jetzt:

$$U''^2 = (U'^2 - A^2)(U'^2 - B^2); \quad V''^2 = (V'^2 - C^2)(V'^2 - D^2). \quad (1; 7)$$

$A^2, B^2, C^2, D^2$  sind Integrationskonstante, gleich o. B. d. A. in zweckmäßiger Form eingeführt. Sie sind aber nicht unabhängig voneinander; denn aus (1; 5) und (1; 7) folgt:

$$V'^2(C^2 + D^2 + 2 - A^2 - B^2) - C^2D^2 + (A^2 - 1)(B^2 - 1) = 0,$$

woraus man wegen  $V' \neq \text{const.}$  o. B. d. A. folgern darf:

$$C^2 = A^2 - 1; \quad D^2 = B^2 - 1. \quad (1; 8)$$

Nach unserer Verabredung darf keine der Konstanten  $A, B, C, D, A^2 - B^2$  verschwinden.

Wir führen jetzt als ständige Abkürzungen ein:

$$\begin{aligned} W &= \sqrt{1 + V'^2}; \quad X_1 = \sqrt{U'^2 - A^2}; \quad X_2 = \sqrt{U'^2 - B^2}; \\ Y_1 &= \sqrt{V'^2 - C^2} = \sqrt{W^2 - A^2}; \quad Y_2 = \sqrt{V'^2 - D^2} = \sqrt{W^2 - B^2}. \end{aligned} \quad (1; 9)$$

Die Wurzeln sollen vorbehaltlich näherer Bestimmung den Bedingungen genügen

$$U'' = X_1X_2; \quad V'' = Y_1Y_2. \quad (1; 10)$$

Ferner setzen wir im Einklang mit (1; 4)

$$S \equiv U'^2 sh(U + V) - U'' ch(U + V) = W^2 sh(U + V) - V'' ch(U + V) \quad (1; 11)$$

und verifizieren:

$$S^2 + U'^2 W^2 = A^2 B^2 ch^2(U + V). \quad (1; 12)$$

e) Mittels (1; 10) folgt aus (1; 4):  $\tanh(U + V) = \frac{X_1X_2 - Y_1Y_2}{U'^2 - W^2}$  und daraus o. B. d. A., weil willkürliche Bestimmung des Vorzeichens von  $sh(U + V)$  nur Verfügung über die noch nicht festgelegte positive Richtung der Kr.-Ln.  $u$  bedeutet:<sup>7</sup>

$$\begin{aligned} e^{U+V} &= \frac{i(X_2 + X_1)}{Y_2 - Y_1} = \frac{i(Y_2 + Y_1)}{X_2 - X_1} = \frac{i(X_2 + X_1)(Y_2 + Y_1)}{A^2 - B^2} = \frac{i(A^2 - B^2)}{(X_2 - X_1)(Y_2 - Y_1)}; \\ ch(U + V) &= \frac{i(U'^2 - W^2)}{X_1Y_2 - X_2Y_1} = \frac{i(X_1Y_2 + X_2Y_1)}{A^2 - B^2}; \\ sh(U + V) &= \frac{i(X_1X_2 - Y_1Y_2)}{X_1Y_2 - X_2Y_1} = \frac{i(X_1Y_1 + X_2Y_2)}{A^2 - B^2}; \\ S &= \frac{i(W^2U'' - U'^2V'')}{X_1Y_2 - X_2Y_1} = A^2 sh(U + V) - iX_1Y_1 \\ &= B^2 sh(U + V) + iX_2Y_2 = \frac{i(A^2X_2Y_2 + B^2X_1Y_1)}{A^2 - B^2}. \end{aligned} \quad (1; 13)$$

<sup>7</sup> Wo in Entartungsfällen einer der angegebenen Ausdrücke sinnlos wird, ein anderer sinnvoll bleibt, ist hier wie stets der letztere zu wählen.



In den die Fläche der Gestalt nach eindeutig bestimmenden Fundamentalformen und in der Bedingungsgleichung (1; 4) kommen die Größen  $U$  und  $V$  selbst nur in der Verbindung  $U + V$  vor, sonst nur deren Ableitungen. Daher ist eine Aufspaltung von  $U + V$  in Summanden  $U$  und  $V$  nicht nötig, darf aber andererseits, wo sie zweckmäßig erscheinen sollte, in willkürlicher, ja nach Bedarf von Fall zu Fall wechselnder Weise erfolgen.

f) Jetzt bleibt nur noch (1; 10) zu integrieren. Zu diesem Zweck führen wir die elliptischen Funktionen in der Weierstraßschen Form ein und unterscheiden die Funktionen von  $v$  einschließlich der zugehörigen Konstanten von den analogen Funktionen von  $u$  durch Überstreichung, die sich bei einer indizierten Größe auch auf den Index, bei  $\sigma$ -Quotienten auf Zähler und Nenner beziehen soll, sofern beide gleiches Argument haben.<sup>8</sup>  $\lambda, \mu, \nu$  bedeuten in einer von Fall zu Fall erst zu bestimmenden Reihenfolge die Indexziffern 1, 2, 3 für die Funktionen von  $u$ , analog  $\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$  für die von  $v$ . Wegen der Bedeutung der übrigen Bezeichnungen sei auf Schwarz-Weierstraß, insbesondere Art. 27 und 28 verwiesen.

In diesem Sinne setzen wir

$$\begin{aligned} e_\lambda &= -\frac{A^2 + B^2}{3}; & e_\mu &= \frac{2A^2 - B^2}{3}; & e_\nu &= \frac{2B^2 - A^2}{3}; \\ \bar{e}_\lambda &= -\frac{C^2 + D^2}{3}; & \bar{e}_\mu &= \frac{2C^2 - D^2}{3}; & \bar{e}_\nu &= \frac{2D^2 - C^2}{3}. \end{aligned} \quad (1; 14)$$

Dann wird (1; 10) gelöst durch den Ansatz:

$$\begin{aligned} U' &= \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} u; & X_1 &= -\frac{\sigma_\mu}{\sigma} u; & X_2 &= \frac{\sigma_\nu}{\sigma} u; \\ V' &= -\frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} v; & Y_1 &= \frac{\bar{\sigma}_\mu}{\sigma} v; & Y_2 &= \frac{\bar{\sigma}_\nu}{\sigma} v, \end{aligned} \quad (1; 15)$$

und zwar o. B. d. A. Denn die Wahl einer anderen mit (1; 10) verträglichen Vorzeichenverbindung für die  $\sigma$ - bzw.  $\bar{\sigma}$ -Quotienten ist gleichbedeutend damit, daß man in (1; 15) zu  $u$  und  $v$  geeignete Perioden als additive Konstante hinzufügt; wegen Zulassung komplexer Werte für  $u$  und  $v$  darf man aber o. B. d. A. über die additiven Integrationskonstanten bei  $u$  und  $v$  ganz beliebig verfügen.<sup>9</sup>

<sup>8</sup> Also z. B.  $\frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma_\mu} v = \frac{\bar{\sigma}_\lambda(v)}{\bar{\sigma}_\mu(v)}$ .

<sup>9</sup> Die Vorzeichenwahl in (1; 15) ist nicht symmetrisch in  $u$  und  $v$ , führt aber auf besonders einfache Parameterintervalle für die „Elementarbereiche“ der reellen Flächen negativer Krümmung (§§ 5 u. 12). Zur Herstellung der Symmetrie brauchte man nur etwa  $u$  durch  $u + 2\omega_\nu$  zu ersetzen.

## § 2. KOORDINATEN.

a) Außer den Bezeichnungen des § 1 seien noch folgende eingeführt:

Für die Kr.-Ln.  $v$ :

|                                                   |                          |
|---------------------------------------------------|--------------------------|
| Richtungswinkel der Tangente                      | $\alpha' \beta' \gamma'$ |
| Richtungswinkel der Hauptnormale                  | $\xi' \eta' \zeta'$      |
| Richtungswinkel der Binormale                     | $\lambda' \mu' \nu'$     |
| Krümmungsradius                                   | $\rho'$                  |
| Windungsradius                                    | $T'$                     |
| Radius der Normalkrümmung                         | $r'$                     |
| (Hauptkrümmungsradius der Fläche)                 |                          |
| Radius der geodätischen Krümmung                  | $\rho_g'$                |
| Radius der Schmiegunskugel                        | $R'$                     |
| Koordinaten des Mittelpunktes der Schmiegunskugel | $x' y' z'$               |
| Winkel zwischen Binormale und Flächennormale      | $\delta'$                |

Die analogen Größen für die Kr.-Ln.  $u$  sollen statt eines Akzentes deren zwei bekommen.

Ferner: Richtungswinkel der Flächennormale  $\alpha \beta \gamma$

b) Die Berechnung der Koordinaten stützt sich auf die „Fundamentalgleichungen der Flächentheorie“<sup>10</sup> und die Serret-Frenetschen Formeln.<sup>10</sup> Mittels § 1 findet man daraus zunächst:

$$\rho' = -\frac{Rsh(U+V)}{W}; \quad \rho'' = \frac{R}{\sqrt{U'^2 + sh^2(U+V)}}, \quad (2; 1)$$

vorbehaltlich näherer Verfügung über die Wurzeln.<sup>11</sup>

Ferner ergeben sich bei Bevorzugung der  $x$ -Achse die Gleichungen:

$$P_0 = \frac{P_1 \cos \alpha + P_2 \cos \alpha' + P_3 \cos \alpha''}{P_4}, \quad (2; 2)$$

wobei für  $P_0, P_1, P_2, P_3, P_4$  die Werte einer beliebigen Querreihe der nachstehenden Übersicht gesetzt werden dürfen; dazu die analogen Gleichungen, die bei Bevorzugung der  $y$ -Achse und der  $z$ -Achse entstehen.

<sup>10</sup> Siehe z. B. Bianchi, Lezioni S. 181 u. S. 13; hier aber  $T$  mit entgegengesetztem Vorzeichen!

<sup>11</sup> Wo aber diese Wurzeln später auftreten (auch in Tab. I), sollen sie jedenfalls überall das nämliche wie hier bedeuten.



| $P_0$                                       | $P_1$      | $P_2$      | $P_3$     | $P_4$                     |
|---------------------------------------------|------------|------------|-----------|---------------------------|
| $\frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial u}$ | o          | $-sh(U+V)$ | o         | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{1}{R} \frac{\partial x}{\partial v}$ | o          | o          | 1         | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{\partial \cos \alpha}{\partial u}$   | o          | 1          | o         | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{\partial \cos \alpha'}{\partial u}$  | -1         | o          | $V'$      | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{\partial \cos \alpha''}{\partial u}$ | o          | $-V'$      | o         | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{\partial \cos \alpha}{\partial v}$   | o          | o          | $sh(U+V)$ | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{\partial \cos \alpha'}{\partial v}$  | o          | o          | $U'$      | $ch(U+V)$                 |
| $\frac{\partial \cos \alpha''}{\partial v}$ | $-sh(U+V)$ | $-U'$      | o         | $ch(U+V)$                 |
| $\cos \xi'$                                 | -1         | o          | $V'$      | $W$                       |
| $\cos \lambda'$                             | $V'$       | o          | 1         | $W$                       |
| $\frac{\partial \cos \lambda'}{\partial v}$ | -S         | $-U'W^2$   | $V'S$     | $W^3 ch(U+V)$             |
| $\cos \xi''$                                | $-sh(U+V)$ | $-U'$      | o         | $\sqrt{U'^2 + sh^2(U+V)}$ |
| $\cos \lambda''$                            | $U'$       | $-sh(U+V)$ | o         | $\sqrt{U'^2 + sh^2(U+V)}$ |

Damit verifiziert man:

$$\frac{\partial \cos \lambda'}{\partial u} = \frac{\partial \cos \mu'}{\partial u} = \frac{\partial \cos \nu'}{\partial u} = 0; \quad (2; 3)$$

ferner, wenn  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  ad hoc definiert werden durch

$$\cos \alpha_0 = \frac{-U' \cos \alpha + S \cos \alpha' + U'V' \cos \alpha''}{ABch(U+V)} \quad (2; 4)$$

nebst den beiden analogen<sup>12</sup> Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha_0}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial \alpha_0}{\partial v} = 0; \text{ usw.}; \quad \cos^2 \alpha_0 + \cos^2 \beta_0 + \cos^2 \gamma_0 = 1; \\ \cos \alpha_0 \cos \lambda' + \cos \beta_0 \cos \mu' + \cos \gamma_0 \cos \nu' = 0. \end{aligned} \quad (2; 5)$$

(2; 3) und (2; 5) besagen: Die Kr.-Ln.  $v$  liegen in Ebenen, die zu der durch  $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$  definierten festen Richtung parallel sind. Legt man nun die  $z$ -Achse parallel dieser Richtung, so kann man setzen:

$$\cos \lambda' = -\sin \varphi; \quad \cos \mu' = \cos \varphi; \quad \cos \nu' = 0 \quad (2; 6)$$

und berechnet mittels (2; 2) und (1; 12):

$$\frac{d\varphi}{dv} = \frac{AB}{W^2}, \quad (2; 7)$$

wobei noch offen bleiben muß, welcher Wert von  $\sqrt{A^2}$  und  $\sqrt{B^2}$  für  $A$  und  $B$  zu setzen ist.

Die Ebene einer Kr.-L.  $v$ , welche den Punkt  $(x, y, z)$  enthält, hat von der  $z$ -Achse den von  $u$  unabhängigen Abstand  $y \cos \varphi - x \sin \varphi = \Psi(\varphi)$ , wie er ad hoc, als Funktion von  $\varphi$  betrachtet, heißen möge. Man verifiziert:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\varphi^2} + \Psi = 0 \quad (2; 8)$$

und schließt daraus:  $\Psi = b \cos \varphi - a \sin \varphi$  ( $a, b$  konstant), d. h.: Die Ebenen der Kr.-Ln.  $v$  gehen alle durch eine feste Gerade. Wählt man endgültig diese als  $z$ -Achse, so wird identisch  $\Psi \equiv 0$  und  $\varphi$  geht über in den zu Anfang des § 1 ebenso bezeichneten Winkel eines Systems zylindrischer Polarkoordinaten.

Mittels  $\frac{d\Psi}{d\varphi} = 0$  und der früheren Beziehungen berechnet man jetzt  $r = x \cos \varphi + y \sin \varphi$  und weiterhin die übrigen Größen, die in Tabelle I (am Ende der Abhandlung) zusammengestellt sind. Zur Vermeidung unnötiger Mehrdeutigkeiten darf man dabei setzen:

$$\sin \gamma' = -\cos \zeta'; \quad \sin \delta' = -\frac{\rho'}{r'}; \quad \sin \delta'' = -\frac{\rho''}{r''}. \quad (2; 9)$$

c) In den auf diese Weise für  $z$  und  $\varphi$  gefundenen Ausdrücken treten Integrale auf, die noch zu berechnen sind. Man findet:

$$\int U'^2 du = \int (\wp u - e_\lambda) du = -\frac{\sigma'}{\sigma} u - e_\lambda u + c_z; \quad (2; 10)$$

( $c_z$  Integrationskonstante)

$$\varphi = \int \frac{AB dv}{W^2} = \frac{1}{2i} \int \frac{-\bar{\wp}' v_0 dv}{\bar{\wp} v - \bar{\wp} v_0} = i v \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \frac{i}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)} + c_\varphi. \quad (2; 11)$$

( $c_\varphi$  Integrationskonstante)

<sup>12</sup> „Analog“ heißt hier: man ersetze alle  $\alpha$  durch  $\beta$  bzw.  $\gamma$ .

<sup>13</sup> Schwarz-Weierstraß Art. 60 (1), S. 95.

Die in (2; 11) auftretende Größe  $v_0$  ist dabei definiert durch:

$$\bar{\varphi} v_0 = \bar{e}_i - 1; \quad \bar{\varphi}' v_0 = -2 i A B, \quad (2; 12)$$

also nur bis auf additive Perioden bestimmt, darf aber beliebig eindeutig festgelegt werden.

d)  $r$  ist wegen der Wurzel  $W = \sqrt{1 + V'^2}$ ,  $\varphi$  wegen des  $\ln$  mehrdeutig. Trotzdem läßt sich erreichen, daß die Kartesischen Koordinaten eines Flächenpunktes nicht nur in  $u$ , sondern auch in  $v$  eindeutig werden. Nach (2; 12) läßt sich nämlich schreiben:

$$W = \sqrt{\bar{\varphi} v - \bar{\varphi} v_0} = i \frac{\bar{\sigma}(v - v_0)}{\bar{\sigma} v \bar{\sigma} v_0} \sqrt{\frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}}. \quad (2; 13)$$

Über die letzte Wurzel darf man aber o. B. d. A. folgendermaßen verfügen: es sei ein für allemal

$$\sqrt{\frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}} = e^{\frac{1}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}}, \quad (2; 14)$$

wobei der  $\ln$  in (2; 14) die nämliche Bedeutung wie in (2; 11) haben soll. Dadurch wird  $W e^{i\varphi}$  eine eindeutige Funktion von  $v$ .

e) Aus dem Bau der Koordinaten ersieht man, daß sich dieselben, und zwar auch für reelle Flächen, nicht wesentlich ändern, wenn man eine der folgenden Änderungen oder mehrere derselben gleichzeitig vornimmt:

1. Ersatz von  $R$  durch  $-R$ .
2. Ersatz von  $A$  durch  $-A$ .
3. Ersatz von  $B$  durch  $-B$ .
4. Vertauschung von  $A$  und  $B$ .
5. Ersatz von  $v_0$  durch  $v_0 +$  beliebige Periode von  $\bar{\varphi} v$ .
6. Addition eines ganzen Vielfachen von  $2\pi i$  zu  $\ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}$ .
7. Addition eines geraden Vielfachen einer beliebigen Periode von  $\varphi u$  zu  $u$ .
8. Addition eines geraden Vielfachen einer beliebigen Periode von  $\bar{\varphi} v$  zu  $v$ .
9. Addition eines ungeraden Vielfachen von  $2\omega_i$  zu  $u$ .
10. Addition eines ungeraden Vielfachen von  $2\bar{\omega}_i$  zu  $v$ .
11. Addition eines ungeraden Vielfachen von  $2\omega_\mu$  zu  $u$  bei gleichzeitiger Addition eines ungeraden Vielfachen von  $2\bar{\omega}_\nu$  zu  $v$ .
12. Addition eines ungeraden Vielfachen von  $2\omega_\nu$  zu  $u$  bei gleichzeitiger Addition eines ungeraden Vielfachen von  $2\bar{\omega}_\mu$  zu  $v$ .

Denn alle diese Änderungen lassen sich durch geeignete Wahl von  $c_z$  und  $c_\varphi$  entweder ganz ausgleichen oder auf eine Umwendung der Fläche um eine der Koordinatenachsen zurückführen.

Man darf also insbesondere o. B. d. A. für  $R$ ,  $A$  und  $B$  je einen ganz bestimmten Wert von  $\sqrt{R^2}$ ,  $\sqrt{A^2}$  und  $\sqrt{B^2}$  beliebig wählen. Die dadurch bis auf die Lage eindeutig bestimmte Fläche werde daher nötigenfalls kurz als Fläche  $(R, A, B)$  oder symbolisch mit  $F(R, A, B)$  bezeichnet.

f) Für manche Untersuchungen, bei denen es nur auf  $r$  und  $z$ , aber nicht auf  $\wp$  ankommt, ist es zweckmäßig, ja nötig,  $v$  durch einen anderen Parameter  $w$  zu ersetzen. Zu diesem Zweck definieren wir  $w(v)$  als stetige Funktion von  $v$  durch die folgenden, miteinander verträglichen Gleichungen, in welchen die nicht überstrichenen Funktionszeichen die nämliche Bedeutung haben wie bisher für das Argument  $u$ :

$$\frac{\sigma_\lambda}{\sigma} w = W; \quad \frac{\sigma_\mu}{\sigma} w = \frac{\bar{\sigma}_\mu}{\sigma} v = Y_1; \quad \frac{\sigma_\nu}{\sigma} w = \frac{\bar{\sigma}_\nu}{\sigma} v = Y_2; \quad (2; 15)$$

daraus folgt u. a.:

$$\wp w = \bar{\wp} v + \frac{1}{3}; \quad \wp' w = -\frac{W}{V'} \bar{\wp}' v; \quad \frac{dw}{dv} = -\frac{V'}{W}; \quad \frac{dW}{dw} = -V''. \quad (2; 16)$$

Durch (2; 15) wird jedenfalls einem beliebigen  $v$  mindestens ein  $w$  zugeordnet und umgekehrt. Durch Beschränkung auf geeignete Gebiete der komplexen  $v$ - und  $w$ -Ebene läßt sich sogar Eineindeutigkeit dieser Zuordnung erreichen.

### § 3. EIGENSCHAFTEN DER E-FLÄCHEN.

Es bezeichne  $u \sim c$  einen zu  $c$  homologen Punkt der komplexen  $u$ -Ebene, d. h.  $u = c + \text{Periode von } \wp u$ ; analog  $v \sim \bar{c}$ .

Statt „Ebene der Kr.-L.  $v = \text{const.}$ “ werde kurz gesagt: „Ebene  $v = \text{const.}$ “; analog: „Kugel  $u = \text{const.}$ “

Die Untersuchung der Fläche in ihrer komplexen Allgemeinheit soll hier nur soweit getrieben werden, als dadurch für die reellen Flächen Wiederholungen vermieden oder Zusammenhänge verdeutlicht werden. Unter diesem Gesichtspunkt schließen wir von der Diskussion von vornherein die Punkte aus, welche folgenden Parameterpaaren entsprechen:

$$u \sim \omega_\mu, v \sim \bar{\omega}_\mu; \quad u \sim \omega_\nu, v \sim \bar{\omega}_\nu; \quad u \text{ beliebig, } v \sim \pm v_0.$$

Ferner sollen von den Punkten, welche zu den Parameterpaaren  $u \sim 0, v \sim 0$  gehören, alle diejenigen ausgeschlossen werden, für welche gleichzeitig entweder die Kongruenzen  $u \equiv 0 \pmod{2\omega_\lambda, 4\omega_\mu, 4\omega_\nu}$  und  $v \equiv 0 \pmod{2\bar{\omega}_\lambda, 4\bar{\omega}_\mu, 4\bar{\omega}_\nu}$  oder die Kongruenzen  $u \equiv 2\omega_\mu$  und  $v \equiv 2\bar{\omega}_\mu \pmod{\text{wie vorher}}$  erfüllt sind, von welchen letztere die Kongruenzen  $u \equiv 2\omega_\nu; v \equiv 2\bar{\omega}_\nu$  nach sich ziehen. Wo also von derartigen Punkten die Rede ist, sind darunter nur solche zu verstehen, für welche entweder  $u \equiv 0$  und  $v \equiv 2\bar{\omega}_\mu \equiv 2\bar{\omega}_\nu$  oder  $u \equiv 2\omega_\mu \equiv 2\omega_\nu$  und  $v \equiv 0 \pmod{\text{wie vorher}}$  ist.

Endlich sollen Wege in der  $v$ -Ebene niemals einen zu  $\pm v_0$  homologen Punkt enthalten dürfen.

### I. Eigenschaften der Krümmungslinien.

Satz 1:<sup>14</sup> 1. Die Kr.-Ln.  $v$  sind eben. Ihre Ebenen gehen alle durch eine feste Gerade, die „Achse“ der Fläche.

Die Krümmungsmittelpunkte aller Kr.-Ln.  $v$  liegen für den nämlichen Wert von  $u$  in einer zur Flächenachse senkrechten Ebene.

2. Die Kr.-Ln.  $u$  liegen auf Kugeln, welche die Fläche senkrecht schneiden und ihre Mittelpunkte auf der Flächenachse haben.

Sie haben konstante geodätische Krümmung; diese ist, eventuell bis auf das Vorzeichen, gleich der Krümmung der betreffenden Kugel  $u = \text{const.}$

Die drei fett gedruckten Eigenschaften sind charakteristisch für die E-Fln.,<sup>15</sup> jede einzelne von ihnen ist gleichbedeutend mit der von uns als Ausgangspunkt gewählten Beziehung (1; 3).

Satz 2: Die Kugeln  $u = \text{const.}$  entarten in folgenden Fällen:

Die Kr.-Ln.  $u \sim 0$  reduzieren sich auf einen Punkt.

Die Kr.-Ln.  $u \sim \omega_\lambda$  sind eben; ihre Ebene steht senkrecht zur Flächenachse.

### II. Symmetrieeigenschaften einer E-Fläche.

Satz 3: Es sind S.-Zentren die Punkte  $u \sim 0$ ,

S.-Ebenen senkrecht zur Achse die Ebenen  $u \sim \omega_\lambda$ ,

S.-Ebenen durch die Achse die Ebenen  $v \sim 0$  und  $v \sim \bar{\omega}_\lambda$ ,

S.-Achsen die Lote zur Flächenachse

in den Ebenen  $v \sim 0$  durch die Punkte  $u \sim \omega_\lambda$ ,

in den Ebenen  $v \sim \bar{\omega}_\lambda$  durch die Punkte  $u \sim \omega_\lambda$ ,

in den Ebenen  $v \sim \bar{\omega}_\nu$  durch die Punkte  $u \sim \omega_\mu$ ,

in den Ebenen  $v \sim \bar{\omega}_\mu$  durch die Punkte  $u \sim \omega_\nu$ ,

senkrecht zu den Ebenen  $v \sim 0$  durch die Punkte  $u \sim 0$ ,

senkrecht zu den Ebenen  $v \sim \bar{\omega}_\lambda$  durch die Punkte  $u \sim 0$ .

Diese S.-Elemente sind nicht alle unabhängig voneinander.

### III. Periodizität der Fläche.

Satz 4: Eine Translation längs der Achse vom Betrage  $-\frac{4R}{AB}(\eta_1 + e_\lambda \omega_1)$  oder eine Drehung um die Achse vom Betrage  $4i(\bar{\omega}_1 \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \bar{\eta}_1 v_0)$  führt die Fläche in sich selbst über ( $l = 1, 2, 3$ ).

<sup>14</sup> Vgl. § 2 und Tab. I, 9, 15 u. 16; Bolke S. 61; Sievert S. 13.

<sup>15</sup> Der Beweis hierfür ist unterdrückt. Vgl. dazu z. B. Bianchi, Lezioni S. 698/99 und den Satz von Brioschi bei Cesàro S. 222.

#### IV. Ausgezeichnete Punkte und Kurven.

Die folgenden geometrischen Aussagen sind zum Teil gar nicht, zum Teil mindestens nicht ohne nähere Erläuterung ins Komplexe übertragbar, sollen daher in ihrer Gesamtheit nur für den Fall ausgesprochen werden, daß die betreffenden Flächengebiete reell sind.

**Satz 5:** Für reelle Flächengebiete gilt folgendes:

1. Die Punkte  $u \sim o$  sind konische Punkte der Fläche. Die Kr.-Ln.  $v$  haben für  $u \sim o$  einen Wendepunkt.
2. Die ebenen Kr.-Ln.  $u \sim \omega_\lambda$  sind geodätische Linien.
3. Die ebenen Kr.-Ln.  $v \sim \bar{\omega}_\lambda$  sind geodätische Linien.
4. Eine ebene Kr.-L.  $v \sim o$  ist durch die Beziehung  $r \cdot \varphi' = \text{const.}$  als elastische Linie charakterisiert. Sie ist ferner Rückkehrkurve, ihre Ebene Tangentialebene der Fläche. Die Kr.-Ln.  $u$  haben diese Ebene im Inzidenzpunkt zur rektifizierenden Ebene und durchsetzen sie, indem sie dieselbe in einer Spitze berühren. Die Torsion einer nicht ebenen Kr.-L.  $u$  ändert ihr Vorzeichen, wenn  $v$  durch  $v \sim o$  geht. Die Kurve  $v \sim o$  berührt alle durch den Inzidenzpunkt gehenden Flächenkurven, für welche  $\frac{du}{dv}$  weder unbestimmt noch 0 ist, also insbesondere die Asymptotenlinien beider Scharen.
5. Eine Kurve  $U + V = 0$  ist räumliche Rückkehrkurve der Fläche. Die Kr.-Ln.  $v$  haben für  $U + V = 0$  eine Spitze, außer bei  $u \sim \omega_\lambda$ , wo die betreffende Kr.-L. die normale Form behält. Die Tangentialebene der Fläche in einem Punkt der Kurve  $U + V = 0$  ist gleichzeitig Schmiegungsebene der durch diesen Punkt gehenden Kr.-L.  $u$ . Die Kurve  $U + V = 0$  berührt alle durch den Inzidenzpunkt gehenden Flächenkurven, für welche  $\frac{dv}{du}$  weder unbestimmt noch 0 ist, also insbesondere die Kr.-Ln.  $u$  und die Asymptotenlinien beider Scharen.
6. Für  $S = 0$  haben die Kr.-Ln.  $v$  im allgemeinen einen Extremwert von  $z$  bei normaler Form. Ausnahmen:
  - $\alpha$ )  $u \sim \omega_\mu$ ,  $v \sim \bar{\omega}_\nu$  und  $u \sim \omega_\nu$ ,  $v \sim \bar{\omega}_\mu$ ; die betreffende Kr.-L.  $v$  hat in diesem Fall eine Spitze, deren Tangente senkrecht zur Achse steht.
  - $\beta$ )  $u \sim o$ ; die betreffende Kr.-L.  $v$  hat einen Wendepunkt, dessen Tangente senkrecht zur Achse steht.

#### V. Beziehungen zwischen den Kr.-Ln. $v$ der nämlichen Fläche.

Bezeichnet  $v$  einen beliebigen, nur nicht zu  $\pm v_0$  homologen Wert von  $v$ , und  $w$  einen beliebigen unter den der Gl. (2; 15) genügenden Werten  $w(v)$ , so bestehen für jedes  $u$  die Identitäten:

$$\begin{aligned} r(u, v) \mp \frac{R}{W} \sin \gamma' &= r(u \pm w, 0); \\ z(u, v) \mp \frac{R}{W} \cos \gamma' &= z(u \pm w, 0) \pm \frac{R}{AB} \left( \frac{\sigma'_\lambda}{\sigma_\lambda} w + e_\lambda w \right), \end{aligned} \quad (3; 1)$$

und zwar sind überall die oberen oder überall die unteren Vorzeichen zu nehmen.

Zur Verifikation hat man zunächst die vorkommenden Größen mittels Tabelle I und § 1 als Funktionen von  $u$  und  $v$ , bzw. von  $u \pm w$  und  $0$  darzustellen. Dabei darf [vgl. (2; 13) und (2; 14)] o. B. d. A.  $\ln \frac{\bar{\sigma}(v+v_0)}{\bar{\sigma}(v-v_0)}$  für  $v=0$  gleich  $+\pi$  gesetzt werden, da ja hier die Kr.-L.  $v=0$  isoliert betrachtet wird. Dann sind die Funktionen von  $u \pm w$  mittels der Additionstheoreme der  $\sigma$ -Funktionen<sup>16</sup> auf solche mit einfachem Argument zurückzuführen.

Die geometrische Deutung von (3; 1) ergibt den

**Satz 6:**<sup>17</sup> *Trägt man auf den Tangenten einer beliebigen Kr.-L.  $v$  vom Berührungspunkte aus in stetig veränderlicher Richtung die Strecke  $\frac{R}{W(v)}$  ab, so ist der Ort der Endpunkte dieser Strecken gestaltlich identisch mit der elastischen Linie  $v=0$ .*

Jede Kr.-L.  $v (\neq 0)$  läßt sich also gestaltlich, und zwar in doppelter Weise, als „Traktrix“<sup>18</sup> der elastischen Linie  $v=0$ , also diese umgekehrt als „Äquitangentialkurve“ aller übrigen Kr.-Ln.  $v$  der nämlichen Fläche auffassen.

## VI. Beziehungen zwischen verschiedenen Flächen.

a) Die Flächenschar konstanten Moduls und gleicher Krümmung.

$$\left( \frac{A^2}{B^2} = \text{const.}; R = \text{const.} \right)$$

1. Mit  $\frac{A^2}{B^2}$  wird der Modul der elliptischen Funktionen von  $u$  konstant. Wir betrachten eine bestimmte Fläche  $F(R, A, B)$  und eine zweite Fläche  $\tilde{F}(R, qA, qB)$ ; dabei ist  $q = \text{const.} \neq \infty$ . Alle auf  $\tilde{F}$  bezüglichen Größen sollen von den analogen auf  $F$  bezüglichen durch das Zeichen „ $\sim$ “ unterschieden werden.

Wir definieren  $w(v)$  und analog  $\tilde{w}(\tilde{v})$  durch (2; 15) und stellen dann eine stetige Zuordnung zwischen den Punkten  $(u, v)$  von  $F$  und den Punkten  $(\tilde{u}, \tilde{v})$  von  $\tilde{F}$  her mittels der Beziehungen:

$$\tilde{u} = \frac{u}{q}; \quad \tilde{w}(\tilde{v}) = \frac{w(v)}{q}. \quad (3; 2)$$

Hierdurch wird jedenfalls einer beliebigen Kr.-L.  $v$  von  $F$  mindestens eine Kr.-L.  $\tilde{v}$  von  $\tilde{F}$  zugeordnet und umgekehrt. Setzen wir noch  $\tilde{c}_z = \frac{c_z}{q}$ ,  
(3; 3)  
so folgt aus den Homogenitätseigenschaften der elliptischen Funktionen für die Koordinaten entsprechender Punkte von  $F$  und  $\tilde{F}$ :

<sup>16</sup> Schwarz-Weierstraß Art. 38 [D], S. 51.

<sup>17</sup> Bolke (S. 40 u. S. 56) kennt zwei Spezialfälle dieses Satzes.

<sup>18</sup> „Traktrix“ im weiteren Sinn wie bei Loria S. 566.



$$r(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{r(u, v)}{q}; \quad \tilde{z}(\tilde{u}, \tilde{v}) = \frac{z(u, v)}{q}, \quad (3; 4)$$

also insbesondere der

**Satz 7:**<sup>19</sup> Die Kr.-Ln.  $\tilde{v}$  auf  $\tilde{F}(R, qA, qB)$  stellen ein ähnliches Abbild im Maßstab  $\frac{1}{q}$  der ihnen nach (3; 2) entsprechenden Kr.-Ln.  $v$  von  $F(R, A, B)$  dar.

2. Wir machen nun die folgenden spezielleren Annahmen:

1. Es sei  $q > 1$  reell.
2. Den reellen Kr.-Ln.  $v$  von  $F$ , deren Ebenen den reellen Keil  $\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2$  erfüllen, sollen vermöge (3; 2) eineindeutig reelle Kr.-Ln.  $\tilde{v}$  auf  $\tilde{F}$  entsprechen, deren Ebenen dort den reellen Keil  $\tilde{\varphi}_1 \leq \tilde{\varphi} \leq \tilde{\varphi}_2$  erfüllen, und zwar so, daß  $\tilde{\varphi}$  mit  $\varphi$  stetig und monoton wächst. Dann ergibt sich:

$$d\tilde{\varphi} = d\varphi \cdot \frac{d\tilde{v}}{dv} = d\varphi \cdot \frac{V'}{\tilde{V}'} = \frac{d\varphi}{q \sqrt{1 + \frac{1}{V'^2} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}}. \quad (3; 5)$$

Soll  $\tilde{\varphi}$  mit  $\varphi$  monoton wachsen, so muß die Wurzel in (3; 5) reell und nicht negativ sein. Andererseits ist für reelle Flächengebiete  $V'$  seiner geometrischen Bedeutung nach (Tab. I, 7)

wesentlich reell. Daraus und aus  $q > 1$  folgt weiter:  $\sqrt{1 + \frac{1}{V'^2} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)} \geq 1$ , wobei „=“ nur für eine eventuell vorkommende Kr.-L.  $v \sim o$  gilt. Endlich:

$$\int_{\tilde{\varphi}_1}^{\tilde{\varphi}_2} d\tilde{\varphi} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{d\varphi}{q \sqrt{1 + \frac{1}{V'^2} \left(1 - \frac{1}{q^2}\right)}} < \frac{1}{q} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi < \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi, \text{ oder kurz:}$$

$$\tilde{\varphi}_2 - \tilde{\varphi}_1 < \frac{1}{q} (\varphi_2 - \varphi_1) < \varphi_2 - \varphi_1. \quad (3; 6)$$

Da sich ersichtlich für die Absolutwerte der Differenzen die nämliche Ungleichung ergibt, wenn  $\tilde{\varphi}$  mit wachsendem  $\varphi$  monoton abnimmt, gilt der

**Satz 8:** Soweit durch (3; 2) ein reelles Gebiet von  $F(R, A, B)$  und ein reelles Gebiet von  $\tilde{F}(R, qA, qB)$  ( $q$  reell  $> 1$ ) derart eineindeutig aufeinander abgebildet werden, daß einer stetigen und monotonen Änderung von  $\varphi$  auf  $F$  eine ebensolche Änderung von  $\tilde{\varphi}$  auf  $\tilde{F}$  entspricht, bilden die Ebenen zweier Kr.-Ln.  $\tilde{v}$  auf  $\tilde{F}$  miteinander einen kleineren Winkel als die Ebenen der entsprechenden Kr.-Ln.  $v$  auf  $F$ .

<sup>19</sup> Dieser Satz umfaßt eine Feststellung von Bockwoldt (S. 31) über spezielle Flächen positiver Krümmung, die von Lenz (S. 26) irrtümlich für Flächen negativer Krümmung als unzutreffend erklärt wird.

b) Durch Hazzidakissche Transformation „konjugierte“ Flächenpaare gleicher Krümmung.

Satz 9:<sup>20</sup> Ist  $A^2 + B^{*2} = 1$  und  $B^2 + A^{*2} = 1$ , so ist von den E-Fln.  $F(R, A, B)$  und  $F^*(R, A^*, B^*)$  jede die Hazzidakissche Transformierte der anderen, und zwar derart, daß den ebenen Kr.-Ln. der einen Fläche die sphärischen Kr.-Ln. der anderen entsprechen.<sup>21</sup>

Dabei ist in unserer Darstellungsform die Hazzidakissche Transformation folgendermaßen zu definieren: Zu einer Fläche konstanter Krümmung  $-\frac{1}{R^2}$ , welche im Sinn des § 1, b die Fundamentalformen

$$\begin{aligned} I &\equiv R^2 (\cos^2 \vartheta du^2 + \sin^2 \vartheta dv^2); \\ II &\equiv R \sin \vartheta \cos \vartheta (dv^2 - du^2) \text{ hat,} \end{aligned}$$

existiert eine zweite Fläche mit der nämlichen Krümmung, welche bei geeigneter Bezeichnungsweise die Fundamentalformen

$$\begin{aligned} I' &\equiv -R^2 (\cos^2 \vartheta dv^2 + \sin^2 \vartheta du^2); \\ II' &= II \text{ hat.} \end{aligned}$$

Zum Beweis des Satzes 9 unterscheiden wir alle auf  $F^*$  bezüglichen Größen von den entsprechenden auf  $F$  bezüglichen durch einen Stern.<sup>22</sup> Dann folgt aus der Voraussetzung:

$$e_\lambda + \bar{e}_\lambda^* = e_\mu + \bar{e}_\mu^* = e_\nu + \bar{e}_\nu^* = \bar{e}_\lambda + e_\lambda^* = \bar{e}_\mu + e_\mu^* = \bar{e}_\nu + e_\nu^* = 0. \quad (3; 7)$$

Daraus schließt man: Sind  $2\omega_1, 2\omega_3$  und  $2\bar{\omega}_1, 2\bar{\omega}_3$  primitive Periodenpaare für die Funktionen von  $u$  bzw.  $v$ , so darf man als weitere solche Paare wählen

$$\text{für die Funktionen von } v^*: \quad 2\bar{\omega}_1^* = \frac{2\omega_3}{i}; \quad 2\bar{\omega}_3^* = -\frac{2\omega_1}{i};$$

$$\text{für die Funktionen von } u^*: \quad 2\omega_1^* = \frac{2\bar{\omega}_3}{i}; \quad 2\omega_3^* = -\frac{2\bar{\omega}_1}{i}.$$

Damit ist gleichzeitig über die Indizes  $\lambda, \lambda^*$  usw. derart verfügt, daß wegen der Homogenitätseigenschaften der  $\sigma$ -Quotienten die Beziehungen bestehen:

<sup>20</sup> Einen Spezialfall dieses Satzes für bestimmte entartete Flächen positiver Krümmung beweist Rembs 1930. Die Hazzidakissche Transformation führt naturgemäß nur bei Flächen positiver Krümmung Reelles in Reelles über.

<sup>21</sup> Nach § 2, e dürfte man  $A^*$  und  $B^*$  vertauschen. Hier wie in Satz 10 ist aber die vorliegende Fassung gewählt, weil sie sich den später für reelle Flächen zu treffenden Sonderabmachungen am besten anpaßt. Der gleiche Gesichtspunkt führte zu der speziellen Wahl der primitiven Periodenpaare im Verlauf des Beweises.

<sup>22</sup> Die Sterne beziehen sich auch hier gegebenenfalls auf Zähler, Nenner und Indizes; es braucht also nicht  $\lambda^* = \bar{\lambda}$  zu sein usw.

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_{\mu}^*}{\sigma} u^* &= i \frac{\bar{\sigma}_{\nu}}{\sigma} (i u^*); & \frac{\sigma_{\nu}^*}{\sigma} u^* &= i \frac{\bar{\sigma}_{\mu}}{\sigma} (i u^*); \\ \frac{\bar{\sigma}_{\mu}^*}{\sigma} v^* &= i \frac{\sigma_{\nu}}{\sigma} (i v^*); & \frac{\bar{\sigma}_{\nu}^*}{\sigma} v^* &= i \frac{\sigma_{\mu}}{\sigma} (i v^*).\end{aligned}\quad (3; 8)$$

Bildet man nun gemäß (1; 3), (1; 13) und (1; 15) die Fundamentalformen von  $\mathbf{F}$  und  $\mathbf{F}^*$  und ersetzt dann  $i u^*$  durch  $v$  und  $i v^*$  durch  $u$ , so ergibt sich mittels (3; 8) die Behauptung.

c) Beziehungen zwischen Flächen verschiedener Krümmung.

1. Satz 10: Ist  $R^2 + {}^*R^2 = A^2 + {}^*B^2 = B^2 + {}^*A^2 = 0$ , so enthalten die E-Fln.  $\mathbf{F}(R, A, B)$  und  ${}^*\mathbf{F}({}^*R, {}^*A, {}^*B)$  die nämliche Elastika  $v = 0$ . Eine Translation längs der Achse, die  $\mathbf{F}$  nach Satz 4 in sich selbst überführt, führt auch  ${}^*\mathbf{F}$  in sich selbst über.

Beweis: Bei analoger Bezeichnungsweise wie vorher folgt aus der Voraussetzung:

$$e_{\lambda} + {}^*e_{\lambda} = e_{\mu} + {}^*e_{\nu} = e_{\nu} + {}^*e_{\mu} = 0. \quad (3; 9)$$

Setzt man demgemäß analog wie oben:  ${}^*\omega_1 = \frac{\omega_3}{i}$ ;  ${}^*\omega_3 = -\frac{\omega_1}{i}$ , so gilt:

$$\frac{{}^*\sigma_{\lambda}}{\sigma} {}^*u = i \frac{\sigma_{\lambda}}{\sigma} (i {}^*u); \quad \frac{{}^*\sigma_{\mu}}{\sigma} {}^*u = i \frac{\sigma_{\nu}}{\sigma} (i {}^*u); \quad \frac{{}^*\sigma_{\nu}}{\sigma} {}^*u = i \frac{\sigma_{\mu}}{\sigma} (i {}^*u). \quad (3; 10)$$

Berechnet man nun unter der Annahme  $v = {}^*v = 0$  die Größen  $r(u)$ ,  ${}^*r({}^*u)$ ,  $z(u)$ ,  ${}^*z({}^*u)$  und setzt dann  ${}^*R = iR$ ;  ${}^*A = iB$ ;  ${}^*B = iA$ ;  ${}^*c_z = ic_z$ ;  $i {}^*u = u$ , so ergibt sich  $r(u) = {}^*r({}^*u)$ ;  $z(u) = {}^*z({}^*u)$ . Analog beweist man den zweiten Teil der Behauptung.

2. Der Winkel  $\varphi$  (Tab. I, 1) hängt nur von  $A$  und  $B$ , aber nicht von  $R$  ab. Daraus folgt:

Satz 11: Eine Drehung um die Achse, welche nach Satz 4 die E-Fl.  $\mathbf{F}(R, A, B)$  in sich selbst überführt, führt auch jede andere E-Fl. mit den Konstanten  $A$  und  $B$  — ohne Rücksicht auf den Wert von  $R$  — in sich selbst über.

Der Inhalt dieses Paragraphen gilt sinngemäß auch bei Entartung der elliptischen Funktionen. Nur muß man bei II alle Entartungsgebilde einer allgemeinen Fläche zusammennehmen und nötigenfalls zur Herstellung der vollen Symmetrie unendlich oft zählen (vgl. Periodenparallelogramm und Periodenstreifen). Insbesondere gilt VI a sowohl für die Beziehungen der entarteten Flächen untereinander wie auch für ihre Beziehungen zu den nicht entarteten Flächen.

## ZWEITER TEIL. DIE REELLEN E-FLÄCHEN NEGATIVER KRÜMMUNG.

### § 4. REALITÄTSBEDINGUNG. EINTEILUNG.

a) Soll ein Gebiet einer nicht entarteten E-Fl. negativer Krümmung lauter reelle Punkte enthalten, so müssen für jeden inneren Punkt desselben folgende Größen ihrer geometrischen Bedeutung nach reelle Werte annehmen:

1.  $R$ ;
2.  $e^{U+V} = \operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}$ , also auch  $U$  und  $V$  selbst bis auf additive imaginäre Konstanten, deren Summe ein Vielfaches von  $i\pi$  ist;
3.  $U' = -\frac{R}{\rho_g}$  und  $V' = \cot \delta'$ , also wegen 2. auch  $u$  und  $v$  selbst bis auf additive imaginäre Konstanten;
4.  $\varphi$ , also zufolge 3. auch  $AB = W^2 \frac{d\varphi}{dv}$ ;
5.  $U'^2 = U'^4 - U'^2(A^2 + B^2) + A^2B^2$ , also wegen 3. und 4. auch  $A^2 + B^2$ ;  
aus 4. und 5. folgt:
6.  $(A+B)^2$  und  $(A-B)^2$  müssen reell sein. Berücksichtigt man, daß nach § 2, e 3 Er-satz von  $B$  durch  $-B$  unwesentlich ist, so erhält man zunächst folgende Möglichkeiten:
  - $\alpha$ )  $A+B$  reell;  $A-B$  reell;  $A$  und  $B$  reell;
  - $\beta$ )  $A+B$  reell;  $A-B$  imaginär;  $A$  und  $B$  konjugiert komplex;
  - $\gamma$ )  $A+B$  imaginär;  $A-B$  imaginär;  $A$  und  $B$  imaginär.

Unter der Annahme  $\gamma$ ) können aber keine reellen Flächengebiete existieren. Beweis:

O. B. d. A. darf man annehmen:  $0 > A^2 > B^2$ ;  $\lambda = 1$ ;  $\mu = 2$ ;  $\nu = 3$ , also  $e_1 > e_2 > e_3$  reell;  $\omega_1$  und  $\frac{\omega_3}{i}$  positiv reell, nebst den analogen Annahmen für die Funktionen von  $v$ .  
Um  $U'^2$  und  $V'^2$  positiv zu erhalten, muß man  $u$  und  $v$  bis auf additive Vielfache von  $2\omega_3$  bzw.  $2\bar{\omega}_3$  reell wählen. Dann wird aber  $e^{U+V}$  imaginär.

Analog beweist man für die Entartungsfälle  $A^2 = B^2 \leq 0$ .

Die Annahmen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) führen wirklich, wie sich zeigen wird, auf reelle Flächengebiete. Unter Einbeziehung der Entartungsfälle erhält man so den

**Satz 12:** Eine E-Fl. negativer Krümmung  $F(R, A, B)$  ( $R$  reell  $\neq \infty$ ) enthält dann und nur dann reelle Gebiete, wenn  
entweder  $A^2$  und  $B^2$  beide endlich, reell, nicht negativ und nicht gleichzeitig null sind,  
oder  $A^2$  und  $B^2$  endlich und konjugiert komplex mit nicht verschwindendem Imagi-närteil sind.<sup>23</sup>

<sup>23</sup> Demgegenüber lautet die Realitätsbedingung bei Enneper und Lenz in unserer Schreibweise:  
 $\frac{A^2 + B^2}{2} \geq \left| \frac{A^2 - B^2}{2} \right| + 1$ . Sie wurde von Kuen (Fußnote S. 202 und 203) und Sievert (S. 26) er-weitert zu  $A^2 \geq B^2 > 0$ .

Nach § 2, e darf man o. B. d. A. setzen:  $R > 0$ ; ferner

im ersteren Fall  $A \geq B \geq 0$ , wobei jedoch nicht beide  $=$ -Zeichen gleichzeitig stehen dürfen;

im letzteren Fall  $A = \mathfrak{A} + i\mathfrak{B}$ ,  $B = \mathfrak{A} - i\mathfrak{B}$ , wobei  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  positive Zahlen bedeuten.

Im folgenden wird stets diese spezielle Wahl zugrunde gelegt und stillschweigend negative Krümmung vorausgesetzt.

b) Schließt man zur Vermeidung von Weitläufigkeiten die Entartungsfälle wieder aus, so gilt nunmehr folgendes:

Sind  $A$  und  $B$  reell, so werden alle  $e_l$  und  $\bar{e}_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ) reell. Sind  $A$  und  $B$  konjugiert komplex, so werden zwei der Größen  $e_l$  bzw.  $\bar{e}_l$  auch konjugiert komplex, die dritte reell. Es liegen also gerade die Sonderfälle der elliptischen Funktionen vor, welche bei Schwarz-Weierstraß in den Artikeln 45, 46, 51, 52 besonders eingehend behandelt sind. Deshalb sollen hier auch alle dort eingeführten Festsetzungen und Bezeichnungen übernommen werden, und zwar die primitiven Perioden so, wie sie den dortigen Gleichungen 1 mit 17 der Art. 45 und 46 entsprechen. Demnach sind den Indizes  $\lambda, \mu, \nu, \bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$  folgende Werte zu erteilen:

|                                    |                                                    |
|------------------------------------|----------------------------------------------------|
| Wenn $A$ und $B$ reell sind, stets | $\lambda = 3; \mu = 1; \nu = 2,$                   |
| dagegen, wenn $A > B > 1$ , dann   | $\bar{\lambda} = 3; \bar{\mu} = 1; \bar{\nu} = 2,$ |
| wenn $A > 1 > B$ , dann            | $\bar{\lambda} = 2; \bar{\mu} = 1; \bar{\nu} = 3,$ |
| wenn $1 > A > B$ , dann            | $\bar{\lambda} = 1; \bar{\mu} = 2; \bar{\nu} = 3.$ |

Wenn  $A$  und  $B$  konjugiert komplex sind, stets  $\lambda = \bar{\lambda} = 2; \mu = \bar{\mu} = 1; \nu = \bar{\nu} = 3.$

c) Imaginäre additive Konstanten bei  $u$  und  $v$  sind jetzt nicht mehr unwesentlich. Nähere Untersuchung<sup>24</sup> ergibt:

Dann und nur dann werden  $r, z$  und  $\varphi$  reell bis auf additive imaginäre Konstanten bei  $z$  und  $\varphi$ , die sich durch geeignete Wahl von  $c_z$  und  $c_\varphi$  beseitigen lassen, wenn

bei reellem  $A$  und  $B$ :  $u = u + m\omega_3; v = v + n\bar{\omega}_3,$

bei konjugiert komplexem  $A$  und  $B$ :  $u = u + m\omega'_2; v = v + n\bar{\omega}'_2$  ist.

Dabei bedeuten  $u$  und  $v$  unbeschränkt veränderliche reelle Variablen,  $m$  und  $n$  ganze rationale Zahlen, die mit nachstehenden Einschränkungen beliebig gewählt werden dürfen:

Sind  $A$  und  $B$  reell und ist  $A > B > 1$ , so muß

entweder  $m$  gerade und  $n$  ungerade

oder  $m$  ungerade und  $n$  gerade sein.

Sind  $A$  und  $B$  reell und ist  $B < 1$ , so muß

$m$  ungerade und  $n$  gerade sein.

Sind  $A$  und  $B$  konjugiert komplex, so muß

entweder  $m$  gerade und  $n$  ungerade

oder  $m$  ungerade und  $n$  gerade sein.

Bedeutet nun  $m', n'$  ein beliebiges, aber bestimmtes zulässiges Wertpaar  $m, n$ , so kann man  $c_z$  und  $c_\varphi$  derart wählen, daß  $z$  und  $\varphi$  für  $m = m'$  und  $n = n'$  reell werden. Hält

<sup>24</sup> Man verfährt dabei analog wie unter a dieses Paragraphen zum Ausschluß der Annahme  $\gamma$ .

man die so gewählten Größen  $c_z$  und  $c_\varphi$  fest, ersetzt aber  $m'$ ,  $n'$  durch ein anderes zulässiges Wertpaar, so treten stets additive imaginäre Konstanten bei im übrigen reellem  $z$  und  $\varphi$  auf, und zwar für verschiedene Wertpaare  $m$ ,  $n$  niemals genau die gleichen, da sich mit  $m$  die Konstante bei  $z$ , mit  $n$  die bei  $\varphi$  ändert.

Nehmen wir nun, bei gegebenem  $R$ ,  $A$  und  $B$ ,  $c_z$  und  $c_\varphi$  als ein für allemal fest gewählt an. Dann heiße die Gesamtheit der Punkte, die man für ein beliebiges, aber bestimmtes Wertpaar  $m$ ,  $n$  bei unbeschränkt reell veränderlichem  $u$  und  $v$  erhält, ein „reeller Bereich“ der betreffenden E-Fläche. Ist dabei weder  $z$  noch  $\varphi$  mit einer additiven imaginären Konstanten behaftet, so sagen wir, der reelle Bereich „liege im reellen Raumgebiet“, andernfalls, er „liege im nichtreellen Raumgebiet“. Dann läßt sich der Sachverhalt kurz so aussprechen:

**Satz 13:** *Wenn eine nicht entartete E-Fläche überhaupt einen reellen Bereich enthält, so enthält sie deren  $\infty^2$ . Jeder beliebige von diesen läßt sich durch geeignete Wahl von  $c_z$  und  $c_\varphi$  ins reelle Raumgebiet verlegen, aber niemals zwei von ihnen gleichzeitig. Wird statt eines reellen Bereiches ein anderer ins reelle Raumgebiet verlegt, so bedeutet dies im allgemeinen eine imaginäre Schraubung der Fläche um ihre Achse. Diese Schraubung entartet in eine Translation, wenn nur  $c_z$ , in eine Drehung, wenn nur  $c_\varphi$  geändert wird.*

d) Diese  $\infty^2$  reellen Bereiche sind, mindestens der Lage nach, als voneinander verschieden zu betrachten, solange man sie als Bestandteile der ganzen komplexen Fläche auffaßt. Läßt man dagegen für jeden einzelnen von ihnen eine individuelle Wahl von  $c_z$  und  $c_\varphi$  zu, die ihn ins reelle Raumgebiet verlegt, so folgt aus § 2, e der

**Satz 14:** *Alle reellen Bereiche der nämlichen E-Fl. negativer Krümmung dürfen als gestaltlich identisch betrachtet werden, außer wenn  $A > B > 1$  ist. In letzterem Falle sind zwei Typen zu unterscheiden:*

*Typus a entsteht, wenn  $m$  gerade,  $n$  ungerade ist,*

*Typus b entsteht, wenn  $m$  ungerade,  $n$  gerade ist.*

*Zwei Bereiche des nämlichen Typus sind auch hier gestaltlich identisch, dagegen nicht zwei Bereiche, die verschiedenen Typen angehören.*

Es genügt also, in dem letztgenannten Fall je einen Bereich des Typus  $a$  und des Typus  $b$ , in allen übrigen Fällen einen einzigen reellen Bereich zur Untersuchung der Gestalt willkürlich herauszugreifen. Ein solcher, isoliert ins reelle Raumgebiet verlegter reeller Bereich ist identisch mit dem, was man gewöhnlich unter einer „reellen E-Fl.“ versteht, soll daher auch künftig so genannt und zum Unterschied von der allgemeinen Fläche mit  $f(R, A, B)$  bezeichnet werden. Analog sprechen wir von „entarteten reellen Flächen“. Sofern aber eine reelle Fläche bei Entartung in mehrere, nur asymptotisch zusammenhängende Grenzgebilde zerfällt, soll jedes einzelne von diesen als eigene Fläche gelten.

Für den Fall der Nichtentartung wählen wir diejenigen Bereiche zur Untersuchung aus, die folgenden Wertpaaren  $m$ ,  $n$  entsprechen:

Wenn  $A > B > 1$ , für den Typus  $a$ :  $m = 0$ ;  $n = +1$ ;

in allen übrigen Fällen:  $m = -1$ ;  $n = 0$ .



Dazu kommen noch die Entartungsfälle: es entarten, wenn  $A$  und  $B$  reell sind,

für  $A > B = 1$  und für  $1 = A > B > 0$  nur die Funktionen von  $v$ ;

für  $A > B = 0$  nur die Funktionen von  $u$ ;

für  $A = 1$ ;  $B = 0$  und für  $A = B > 0$  die Funktionen von  $u$  und  $v$ .

Die hiernach zu untersuchenden Fälle sollen kurz durch Symbole  $(\psi\chi)$ ,  $[\psi\chi]$ ,  $\{\psi\chi\}$  bezeichnet werden. Es bedeutet:

$( )$ : die Funktionen keines Parameters entarten;

$[ ]$ : die Funktionen eines Parameters entarten;

$\{ \}$ : die Funktionen beider Parameter entarten.

$\psi = 1: A > 1$

$\chi = 1: B > 1$

$\psi = 2: A = 1$

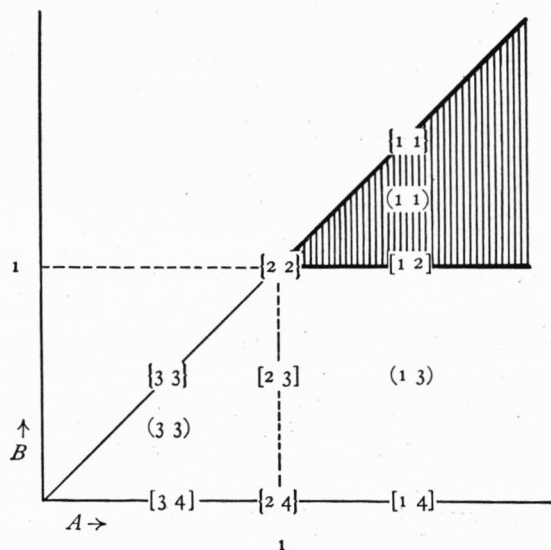
$\chi = 2: B = 1$

$\psi = 3: 1 > A > 0$

$\chi = 3: 1 > B > 0$

$\chi = 4: B = 0$ .

In einem rechtwinkligen  $A, B$ -System ergibt sich daraus folgende Übersicht:



Für das schraffierte Gebiet einschließlich der Randstrahlen sind zwei Flächentypen  $a$  und  $b$  zu unterscheiden.

Sind  $A$  und  $B$  konjugiert komplex, also  $A = \mathfrak{A} + i\mathfrak{B}$ ,  $B = \mathfrak{A} - i\mathfrak{B}$ , so treten Entartungen ein für  $\mathfrak{B} = 0$  oder  $\mathfrak{A} = 0$  oder  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B} = 0$ . Die erste Annahme führt aber auf schon eingereihte Fälle, die beiden anderen (vgl. a dieses Paragraphen) auf Flächen ohne reellen Bereich.

e) Für die Untersuchung der reellen Flächen in § 5 bis § 13 sollen folgende o. B. d. A. vereinfachenden Vereinbarungen getroffen werden:

1. Es werde  $R = 1$  gesetzt.

2. Soweit nicht ausdrücklich etwas anderes gesagt ist, bedeute

$\ln$  den Hauptwert des betreffenden Logarithmus,

eine Wurzel mit positivem Radikanden den positiven Wert,

$\arcsin$ ,  $\arctg$  usw. mit positivem Argument den spitzen Winkel.



§ 5.  $A$  UND  $B$  REELL.

## a) Einführung reeller Parameter und Konstanten.

Um Wiederholungen zu vermeiden, werde hier vorweggenommen, was sich für alle nichtentarteten einschlägigen reellen Flächen gemeinsam erledigen läßt, also für die Fälle (11)a, (11)b, (13), (33). Dabei sollen hier die drei letzteren wegen weitgehender Analogien unter dem Namen „Flächen vom Typus  $b''$ “ oder kurz „Fln.  $b''$ “ zusammengefaßt werden.

Statt der Parameter  $u, v, w$  führen wir deren Realteile  $u, v, w$  ein, haben also zu setzen (wegen  $w$  vgl. unter c)

$$\begin{aligned} \text{im Falle (11)a: } u &= u; v = v + \bar{\omega}_3; w = w + \omega_3; \\ \text{in den übrigen Fällen: } u &= u - \omega_3; v = v; w = w. \end{aligned}$$

Wenn  $A < 1$ , setzen wir  $iC = C' > 0$ ; wenn  $B < 1$ ,  $iD = D' > 0$ .

## b) Beseitigung von Mehrdeutigkeiten.

$$1. \text{ Wir setzen } v_0 = \varepsilon \bar{\omega}_3 \quad (0 < \varepsilon < 1). \quad (5; 1)$$

2. Über  $\ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}$ ,  $c_\varphi$  und  $c_z$  soll so verfügt werden, daß  $\varphi$  ( $v = 0$ ) und  $z$  ( $u = 0$ ) verschwinden. Daraus folgt

$$\text{im Falle (11)a: } \ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)} = 2\bar{\eta}_3 v_0 + \ln \frac{\bar{\sigma}_3(v + v_0)}{\bar{\sigma}_3(v - v_0)}; \quad (5; 2)'$$

$$c_\varphi = i \left( \bar{\eta}_3 v_0 - \bar{\omega}_3 \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} v_0 \right); \quad c_z = 0,$$

$$\text{in den übrigen Fällen: } \ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)} = i\pi + \ln \frac{\bar{\sigma}(v_0 + v)}{\bar{\sigma}(v_0 - v)}; \quad (5; 2)''$$

$$c_\varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad c_z = -(\eta_3 + e_3 \omega_3).$$

In beiden Fällen ist dem letzten Logarithmus der Hauptwert beizulegen. Dadurch wird gleichzeitig  $W$  eindeutig, und zwar für  $0 < v < 2\bar{\omega}_1$  positiv.

## c) Beschränkung des Untersuchungsbereiches.

Infolge der Symmetrieeigenschaften der Flächen (§ 3, II) genügt es, den Bereich zu diskutieren, den man erhält für

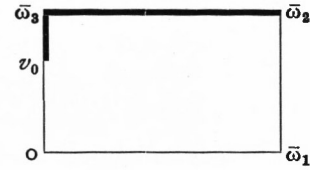
$$0 \leq u \leq 2\omega_1; \quad 0 \leq v \leq \bar{\omega}_1.$$

Er heiße der „reelle Elementarbereich“  $\mathfrak{E}_v$ .

Vielfach ist es aber zweckmäßig, ihn durch Hinzunahme weiterer nicht reeller Werte von  $v$  zu erweitern, und zwar folgendermaßen: Wir definieren, nunmehr eineindeutig,

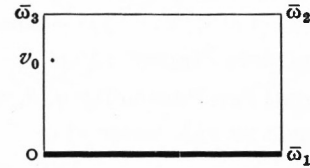
im Falle (11) a:  $w = \omega_3 + w = \omega_3 + \int_{v_0}^v \frac{V' dv}{W}$ ;

Integrationsweg: das Knickintervall  $[v_0 \dots \bar{\omega}_3 \dots \bar{\omega}_2]$ ;



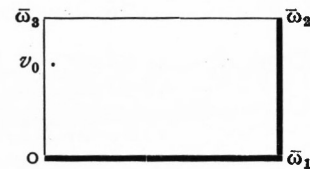
in den Fällen (11) b und (13):  $w = w = \int_0^v \frac{V' dv}{W}$ ;

Integrationsweg: die Strecke  $[0 \dots \bar{\omega}_1]$ ;



im Falle (33):  $w = w = \int_0^v \frac{V' dv}{W}$ ;

Integrationsweg: das Knickintervall  $[0 \dots \bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_2]$ .



Im Einklang mit b) ist dabei stets  $W \geq 0$  zu wählen.

Durchläuft die obere Integrationsgrenze das ganze jeweils angegebene Intervall, so geht  $w$  von 0 bis  $\omega_1$ . Wir definieren nun den „erweiterten Elementarbereich“  $\mathfrak{E}_w$  der Fläche durch den Wertvorrat:  $0 \leq u \leq 2\omega_1$ ;  $0 \leq w \leq \omega_1$ .

$\mathfrak{E}_w$  wird nur für (11) b und (13) mit  $\mathfrak{E}_v$  identisch; in allen übrigen Fällen umfaßt  $\mathfrak{E}_w$  mehr Werte von  $v$  als  $\mathfrak{E}_v$ . Für eine Kr.-L.  $v$ , die zu  $\mathfrak{E}_w$ , aber nicht zu  $\mathfrak{E}_v$  gehört, wird zwar  $r$  und  $z$ , aber nicht  $\varphi$  reell. Sie liegt also auf der Fläche selbst nicht, wie die Kr.-Ln. des  $\mathfrak{E}_v$ , in einer reellen Ebene, läßt sich aber in einer solchen zeichnen und diskutieren.

Nunmehr lassen sich im Sinn des § 3, VI a 1 die  $\mathfrak{E}_w$  aller zum gleichen Typus gehörigen Flächen der Schar  $\frac{A}{B} = \text{const.}$  eineindeutig aufeinander abbilden, d. h.

**Satz 15:** Die Kr.-Ln.  $w$  der  $\mathfrak{E}_w$  aller zum gleichen Typus gehörigen Flächen der Schar  $\frac{A}{B} = \text{const.}$  sind bis auf den Maßstab gestaltlich identisch, ihren linearen Ausmaßen nach proportional zu  $\frac{1}{A}$ .

d) Wertvorrat der wichtigsten Größen für den  $\mathfrak{E}_w$ .

Setzt man (vgl. Text zu (1; 13))

im Falle (11) a:  $e^U = \frac{1}{X_2 - X_1}$ ;  $e^V = i(Y_2 + Y_1)$ , (5; 3)'

in den übrigen Fällen:  $e^U = \frac{i}{X_2 - X_1}$ ;  $e^V = Y_2 + Y_1$ , (5; 3)''

so gilt nachstehende Übersicht.<sup>25</sup> In dieser, wie stets künftig, bedeuten die Pfeile monotone Änderung und weisen vom kleineren zum größeren Wert.  $\pm \infty$  sind als Grenzwerte bei Annäherung vom Innern des betrachteten Intervalls her aufzufassen.

1. für (11) a

| $u = \mathfrak{u}$ | $e^U$                        | $U'$         | $X_1$        | $X_2$              | $U''$        |
|--------------------|------------------------------|--------------|--------------|--------------------|--------------|
| 0                  | 0                            | $+\infty$    | $-\infty$    | $+\infty$          | $-\infty$    |
| $\downarrow$       | $\downarrow$                 | $\uparrow$   | $\downarrow$ | $\uparrow$         | $\downarrow$ |
| $\omega_1$         | $\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}}$ | $A$          | 0            | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | 0            |
| $\downarrow$       | $\downarrow$                 | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$       | $\downarrow$ |
| $2\omega_1$        | $+\infty$                    | $+\infty$    | $+\infty$    | $+\infty$          | $+\infty$    |

2. für (11) a

| $v$              | $\mathfrak{w}$                 | $e^V$              | $V'$       | $W$          | $iY_1$             | $iY_2$     | $V''$        |
|------------------|--------------------------------|--------------------|------------|--------------|--------------------|------------|--------------|
| $v_0$            | 0                              | $A + B$            | $i$        | 0            | $A$                | $B$        | $-AB$        |
|                  | $\downarrow$                   | $\uparrow$         |            | $\downarrow$ | $\uparrow$         | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
| $\bar{\omega}_3$ | $\mathfrak{w}(\bar{\omega}_3)$ | $C + D$            | 0          | 1            | $C$                | $D$        | $-CD$        |
|                  | $\downarrow$                   | $\uparrow$         | $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$         | $\uparrow$ | $\downarrow$ |
| $\bar{\omega}_2$ | $\omega_1$                     | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | $-D$       | $B$          | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | 0          | 0            |

3. für alle  
Flächen b

| $u$                    | $\mathfrak{u}$ | $e^U$                        | $U'$         | $iX_1$             | $iX_2$       | $U''$      |
|------------------------|----------------|------------------------------|--------------|--------------------|--------------|------------|
| $-\omega_3$            | 0              | $\frac{1}{A + B}$            | 0            | $A$                | $-B$         | $AB$       |
|                        | $\downarrow$   | $\downarrow$                 | $\downarrow$ | $\uparrow$         | $\downarrow$ | $\uparrow$ |
| $\omega_1 - \omega_3$  | $\omega_1$     | $\frac{1}{\sqrt{A^2 - B^2}}$ | $B$          | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | 0            | 0          |
|                        | $\downarrow$   | $\downarrow$                 | $\uparrow$   | $\downarrow$       | $\downarrow$ | $\uparrow$ |
| $2\omega_1 - \omega_3$ | $2\omega_1$    | $\frac{1}{A - B}$            | 0            | $A$                | $B$          | $-AB$      |

4. für (11) b  
und (13)

| $v = \mathfrak{v}$ | $\mathfrak{w}$ | $e^V$              | $V'$         | $W$        | $Y_1$      | $Y_2$              | $V''$      |
|--------------------|----------------|--------------------|--------------|------------|------------|--------------------|------------|
| 0                  | 0              | $+\infty$          | $-\infty$    | $+\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$          | $+\infty$  |
| $\downarrow$       | $\downarrow$   | $\uparrow$         | $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$         | $\uparrow$ |
| $\bar{\omega}_1$   | $\omega_1$     | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | $-C$         | $A$        | 0          | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | 0          |

<sup>25</sup> Diese Übersicht bleibt sinngemäß für alle Entartungsfälle gültig, in denen  $B > 0$  ist.

5. für (33)

| $v$              | $w$                 | $e^V$              | $V'$         | $W$        | $Y_1$      | $Y_2$              | $V''$      |
|------------------|---------------------|--------------------|--------------|------------|------------|--------------------|------------|
| 0                | 0                   | $+\infty$          | $-\infty$    | $+\infty$  | $+\infty$  | $+\infty$          | $+\infty$  |
| $\downarrow$     | $\downarrow$        | $\uparrow$         | $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$         | $\uparrow$ |
| $\bar{\omega}_1$ | $w(\bar{\omega}_1)$ | $C' + D'$          | 0            | 1          | $C'$       | $D'$               | $C'D'$     |
|                  | $\downarrow$        | $\uparrow$         |              | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$         | $\uparrow$ |
| $\bar{\omega}_2$ | $\omega_1$          | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | $iC'$        | $A$        | 0          | $\sqrt{A^2 - B^2}$ | 0          |

e) Ausgezeichnete Punkte der Kr.-Ln.  $w$ .Zugrunde liegt  $\mathfrak{E}_w$ .1. Wir definieren einen Spezialwert von  $w$  durch die verträglichen Gleichungen:

$$\frac{\sigma_1}{\sigma} w = B; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} w = A; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma} w = \sqrt{A^2 + B^2}. \quad (5; 4)$$

Dieser Wert möge mit  $w_1$  oder mit  $w_2$  bezeichnet werden, je nachdem er bei (11) a oder bei den Fln. b auftritt, nicht nur weil ihm im ersteren Fall ein anderer Wert von  $v$  entspricht als im letzteren, sondern auch um späterer Analogien willen.

$\frac{w_1}{\omega_1}$  hat für alle Flächen der Schar  $\frac{A}{B} = \text{const.}$  den nämlichen Wert. Geht  $\frac{B}{A}$  von 0 bis 1, so geht  $\frac{w_1}{\omega_1}$  monoton von 1 bis 0.

Beweis: Nach (2; 15) und (2; 16) ist für die Flächen b  $W(w) = \frac{\sigma_3}{\sigma} w$  und  $w = \int_{W(w)}^{W(0)} \frac{dW}{V''}$ . Führt man hierin  $\eta = \frac{W}{W(w)}$  als neue Integrationsvariable ein, spezialisiert für  $w = w_1 = w_2$  und  $w = \omega_1$  und setzt noch ad hoc  $\frac{B}{A} = \lambda$ , so ergibt sich:

$$\frac{w_1}{\omega_1} = \left\{ \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{\left[\eta^2 - \frac{1}{1+\lambda^2}\right] \left[(\eta^2 - 1)\lambda^2 + \eta^2\right]}} \right\} : \left\{ \int_1^\infty \frac{d\eta}{\sqrt{(\eta^2 - 1)(\eta^2 - \lambda^2)}} \right\}, \quad (5; 5)$$

woraus man abliest, daß mit wachsendem  $\lambda$  das erste Integral ab-, das zweite zunimmt.

Für  $\frac{A^2}{B^2} = \frac{1}{2}(\sqrt{5} + 1)$  wird  $w_1 = \frac{\omega_1}{2}$ .

Als Nachtrag zu d) dieses Paragraphen ergibt sich:

für (11) a

| $v$   | $w$   | $e^V$              | $V'$                                    | $W$                           | $iY_1$                         | $iY_2$                         | $V''$                        |
|-------|-------|--------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|--------------------------------|--------------------------------|------------------------------|
| $v_1$ | $w_1$ | $\sqrt{A^2 + B^2}$ | $-\sqrt{\frac{C^2 D^2 - 1}{A^2 + B^2}}$ | $\frac{AB}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | $\frac{A^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | $\frac{B^2}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | $\frac{-A^2 B^2}{A^2 + B^2}$ |

Für  $CD < 1$  ist  $V'(w_1)$  positiv imaginär.

für die Flächen b

| $v$   | $w$   | $e^V$   | $V'$                    | $W$                | $Y_1$ | $Y_2$ | $V''$ |
|-------|-------|---------|-------------------------|--------------------|-------|-------|-------|
| $v_2$ | $w_2$ | $A + B$ | $-\sqrt{A^2 + B^2 - 1}$ | $\sqrt{A^2 + B^2}$ | $B$   | $A$   | $AB$  |

Für  $A^2 + B^2 < 1$  ist  $V'(w_2)$  positiv imaginär.

2. Bei Beschränkung auf die Werte des  $\mathfrak{C}_w$  existiert zu gegebenem  $w$  höchstens ein Wert von  $u$ , für den  $S(u, w) = 0$  wird;<sup>26</sup> er heiße, wenn vorhanden,  $u_m(w)$ .

Im gleichen Sinn existiert zu gegebenem  $w$  höchstens ein Wert von  $u$ , für den  $U(u) + V(w) = 0$  wird; er heiße, wenn vorhanden,  $u_s(w)$ .

Soweit zu dem nämlichen  $w$  gleichzeitig  $u_m(w)$  und  $u_s(w)$  existieren, ist im Falle (11) a stets  $u_m \leq u_s \leq \omega_1$ , in den Fällen b  $u_s \leq u_m \leq \omega_1$ . Dabei ist für  $w = \omega_1$  überall „=“ zu lesen, sonst überall „<“.

Statt  $r[u_m(w), w]$ ,  $z[u_s(w), w]$  usw. werde künftig kurz geschrieben:  $r_m(w)$ ,  $z_s(w)$  usw.

3.  $u_m(w)$  existiert bei den Flächen b zu jedem  $w$ ; bei (11) a nur, wenn  $w_1 \leq w \leq \omega_1$  ist. Aus  $S_m(w) = 0$  folgt  $\cos \gamma'_m(w) = 0$ , d. h.  $z(w = \text{const.})$  erreicht für  $u = u_m(w)$  im allgemeinen einen Extremwert, und zwar bei (11) a ein Maximum, bei den Flächen b ein Minimum.

Ausnahmsweise entsteht aus Symmetriegründen statt eines Extremums von  $z$ :

bei (11) a für  $w = w_1$ ,  $u = 0$  ein Wendepunkt;

bei allen Flächen für  $w = \omega_1$ ,  $u = \omega_1$  eine Spitze.

4.  $u_s(w)$  existiert bei (11) a zu jedem  $w$ ; bei den Flächen b nur, wenn  $w_2 \leq w \leq \omega_1$  ist. Aus  $U_s(w) + V(w) = 0$  folgt  $\rho'_s(w) = 0$ , d. h. die betreffende Kr.-L.  $w$  hat im allgemeinen bei  $u = u_s(w)$  eine Spitze.

Ausnahmsweise behält aus Symmetriegründen die Kr.-L.  $w = w_2$  der Flächen b bei  $u = 0$  die normale Form.

#### f) Die räumliche Rückkehrkurve (R.-K.).

Sie wird gebildet von der abgeschlossenen Menge der unter e 4 erwähnten Spitzen, soweit diese der reellen Fläche angehören. Zwecks leichterer Veranschaulichung legen

<sup>26</sup> Für  $w = w_1$  im Falle (11) a und  $w = 0$  bei den Flächen b ist  $S = 0$  zu ersetzen durch

$\lim_{u \rightarrow 0} S(u, w_1) = 0$  bzw.  $\lim_{w \rightarrow 0} S(u = w_1, w) = 0$ .

wir durch jede Spitze einer Kr.-L.  $v$  des  $\mathfrak{C}_0$  eine Parallele zur  $z$ -Achse und wickeln die so entstandene Zylinderfläche auf eine Ebene ab. In dieser führen wir ein neues Kartesisches Rechtssystem  $(\bar{y}, \bar{z})$  ein, nämlich als  $\bar{z}$ -Achse die zum kleinsten nicht negativen Wert von  $v$  gehörige Mantellinie des Zylinders, als  $\bar{y}$ -Achse dessen Schnittlinie mit der Ebene  $z = 0$  des ursprünglichen Koordinatensystems.  $\bar{y}$  ist also die Bogenlänge der Projektion der R.-K. auf die Ebene  $z = 0$ , und zwar wachsend mit  $v$ , somit:

$$\bar{y} = \frac{1}{AB} \int_{0 \text{ bzw. } v_1}^v dv \sqrt{A^2 B^2 - U'^2 V'^2}; \quad \bar{z} = z_s(w); \quad \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} = \frac{-U'V'}{\sqrt{A^2 B^2 - U'^2 V'^2}}; \quad (5; 6)$$

$$\frac{d}{dv} \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \right) = \frac{A^2 B^2 V'' (V'^2 - U'^2)}{U' (A^2 B^2 - U'^2 V'^2)^{3/2}}; \quad \text{dabei ist } U' = \sqrt{A^2 + B^2 - W^2} \text{ zu setzen.}$$

Die Fortsetzung über den  $\mathfrak{C}_0$  hinaus ergibt sich aus der jeweiligen Symmetrie. Vgl. ferner Satz 5; 5, S. 17.

#### g) $Z$ und $\Phi$ .

Wir setzen

$$-\frac{\eta_1 + e_3 \omega_1}{AB} = Z; \quad i \left( \bar{\omega}_1 \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \bar{\eta}_1 v_0 \right) - \frac{\pi}{2} = \Phi \quad (5; 7)$$

und verifizieren

$$\text{für alle Fälle:} \quad \frac{1}{2} z(u = 2\omega_1) = Z, \text{ unabhängig von } w; \quad (5; 8)$$

$$\text{für (11) a:} \quad \varphi(v = \bar{\omega}_1) = \frac{1}{2i} \int_{\bar{\omega}_1}^{\bar{\omega}_2} \frac{-\bar{\wp}' v_0 dv}{\bar{\wp} v - \bar{\wp} v_0} = \Phi + \frac{\pi}{2};^{27} \quad (5; 9)'$$

$$\text{für die Flächen b:} \quad \varphi(v = \bar{\omega}_1) = \frac{1}{2i} \int_0^{\bar{\omega}_1} \frac{-\bar{\wp}' v_0 dv}{\bar{\wp} v - \bar{\wp} v_0} = \Phi. \quad (5; 9)''$$

Über additive Vielfache von  $\frac{\pi}{2}$  bei  $\Phi$  wird dabei folgendermaßen entschieden: man betrachtet  $v_0$  ad hoc als variablen Parameter und führt diesen von seinem ursprünglichen Wert aus stetig in die nächste dem Integrationsweg nicht angehörige primitive Halperiode, also in  $\bar{\omega}_1$  bzw.  $\bar{\omega}_3$  über.<sup>28</sup>

<sup>27</sup> Der Akzent bedeutet Integration auf direktem Wege und ist bei der Integration längs eines reellen Intervalls weggelassen.

(5; 9)' bestätigt eine Vermutung von Lenz (S. 23).

<sup>28</sup> Schwarz-Weierstraß Art. 60 S. 95.

Um zu sehen, wie sich  $Z$  und  $\Phi$  bei Änderung von  $A$  und  $B$  verhalten, stellen wir diese Größen als Integrale dar, und zwar unter Zugrundelegung einer Fläche  $b$ . Setzt

man bei einer solchen  $w = \omega_1$ , so wird  $\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{A X_2^2}{B X_1^2}$ , also  $Z = \frac{A}{B} \int_0^{\omega_1} \frac{U'^2 - B^2}{U'^2 - A^2} du$ ; ander-

seits  $\Phi = AB \int_0^{\bar{\omega}_1} \frac{dv}{W^2}$ . In diesen Ausdrücken führen wir statt  $u$  und  $v$  andere Integrationsvariable ein, nämlich

$$\text{bei } Z: \zeta = \frac{U'}{B};$$

$$\text{bei } \Phi \text{ in den Fällen (11)b und (13): } \eta = \frac{A}{W},$$

$$\text{im Falle (33): } \eta = \frac{1}{W}.$$

Dann ergibt sich mittels der Übersicht d) dieses Paragraphen:

$$Z = \frac{B}{A^2} \int_0^1 \frac{d\zeta \sqrt{1-\zeta^2}}{\left(1-\zeta^2 \frac{B^2}{A^2}\right)^{3/2}}, \quad (5; 10)$$

$$\text{ferner für (11)b und (13): } \Phi = \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)(A^2-\eta^2)\left(\frac{A^2}{B^2}-\eta^2\right)}}; \quad (5; 11)'$$

$$\text{dagegen für (33): } \Phi = \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{(1-\eta^2)\left(\frac{1}{A^2}-\eta^2\right)\left(\frac{1}{B^2}-\eta^2\right)}}. \quad (5; 11)''$$

Daraus liest man folgendes ab:

Satz 16:<sup>29</sup>

1. Stets ist  $Z > 0$  und  $\Phi > 0$ ;  $A \rightarrow \infty$  mit  $\frac{B}{A} < 1$  führt auf  $Z \rightarrow 0$  und  $\Phi \rightarrow 0$ .
2. Ist  $A > B > 0$ , so nimmt  $Z$  zu, wenn von den Größen  $\frac{A^2}{B}$  und  $\frac{A}{B}$  keine zunimmt und wenigstens eine abnimmt.
3. Ist  $A > 1$  und  $A > B > 0$ , so nimmt  $\Phi$  zu, wenn von den Größen  $A$  und  $\frac{A}{B}$  keine zunimmt und wenigstens eine abnimmt.

---

<sup>29</sup> Die Sätze 1, 2, 3, 5 gelten auch für  $B = 1$ ; die Sätze 1 und 2 auch für  $A = 1$ .



4. Ist  $1 > A > B > 0$ , so nimmt  $\Phi$  zu, wenn von den Größen  $A$  und  $B$  keine abnimmt und wenigstens eine zunimmt.

5. Ist  $A^2 - B^2 \geq 1$  oder  $A^2 + B^2 \leq 1$ , so ist  $\Phi < \frac{\pi}{2}$ .

Zum Beweis der letzten Behauptung überzeugt man sich leicht, daß bei Erfüllung einer der beiden Voraussetzungen der Integrand in  $(5; 11)'$  bzw.  $(5; 11)''$  für alle  $\eta < 1$  unter  $\frac{1}{\sqrt{1-\eta^2}}$

bleibt und für  $\eta = 1$  diese Schranke höchstens erreicht. Also:  $\Phi < \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} = \frac{\pi}{2}$ .<sup>30</sup>

## § 6. DIE FÄLLE (11) a UND [12] a.

I. (11) a  $A > B > 1$ .<sup>31</sup>

a) Koordinaten.

$$r(u, w) = \frac{(A^2 - B^2) \sigma u \sigma w}{A \sigma_2 u \sigma_2 w - B \sigma_1 u \sigma_1 w};$$

$$z(u, w) = -\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma_3'}{\sigma_3} u + e_3 u \right) - \frac{\sigma}{\sigma_3} u \cdot \frac{A \sigma_2 u \sigma_1 w - B \sigma_1 u \sigma_2 w}{A \sigma_2 u \sigma_2 w - B \sigma_1 u \sigma_1 w}; \quad (6; 1)$$

$$\varphi(v) = i v \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \frac{i}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}_3(v + v_0)}{\bar{\sigma}_3(v - v_0)}.$$

b) Gestalt der Kr.-Ln.  $w$  des  $\mathfrak{E}_w$ .

Wir teilen die Kr.-Ln.  $w$  des  $\mathfrak{E}_w$  in 5 Formklassen:

|                |     |                   |       |                   |            |
|----------------|-----|-------------------|-------|-------------------|------------|
| Wert von $w$ : | 0   | $\longrightarrow$ | $w_1$ | $\longrightarrow$ | $\omega_1$ |
| Formklasse:    | 1 a | 2 a               | 3 a   | 4 a               | 5 a        |

1 a:  $r = 0$ ;  $\gamma' = \pi$  für jedes  $u$ ;  $z$  ändert sich mit  $u$  wie bei 2 a. Die Achse wird von  $z = 0$  bis  $z = z_s < 0$ , dann in entgegengesetzter Richtung von  $z = z_s$  bis  $z = 2Z > 0$  durchlaufen. Fig. 13.

<sup>30</sup> Die nur von  $\frac{A}{B}$  abhängigen Ausdrücke  $AZ$ ,  $BZ$  und  $\frac{AB}{A+B}Z$  stellen in dieser Reihenfolge das Verhältnis  $\frac{Z}{r_{\max}}$  dar für die Kr.-L.  $w = \omega_1$  von (11) a, für die Kr.-L.  $w = \omega_1$  der Flächen  $b$  und für die Kr.-L.  $w = 0$  der Flächen  $b$ . Alle drei wachsen, wenn  $\frac{A}{B}$  abnimmt.

<sup>31</sup> Vgl. Lenz S. 21—25.

Fig. 12.

2 a:

| $u$          | $r$          | $z$          | $\gamma'$    | $\rho'$    | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                                 |
|--------------|--------------|--------------|--------------|------------|-------------------------------|----------------------------------------------|
| o            | o            | o            | stumpf       | $+\infty$  |                               | Wendepunkt                                   |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$ | $\uparrow$ | konkav                        |                                              |
| $u_s$        | $r_s$        | $z_s$        | stumpf       | o          |                               | Spitze<br>Maximum von $r$<br>Minimum von $z$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ | konvex                        |                                              |
| $2\omega_1$  | o            | $2Z$         | stumpf       | $-\infty$  |                               | Wendepunkt                                   |

3 a:  $\gamma'(u=0) = \gamma'_m(w_1) = \frac{\pi}{2}$ ; sonst wie 2 a. Fig. 11.

Fig. 10.

4 a:

| $u$          | $r$          | $z$          | $\gamma'$       | $\rho'$    | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                                 |
|--------------|--------------|--------------|-----------------|------------|-------------------------------|----------------------------------------------|
| o            | o            | o            | spitz           | $+\infty$  |                               | Wendepunkt                                   |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                                              |
| $u_m$        | $r_m$        | $z_m < Z$    | $\frac{\pi}{2}$ | $\rho'_m$  |                               | Maximum von $z$                              |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konkav                        |                                              |
| $u_s$        | $r_s$        | $z_s$        | stumpf          | o          |                               | Spitze<br>Maximum von $r$<br>Minimum von $z$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                                              |
| $2\omega_1$  | o            | $2Z$         | stumpf          | $-\infty$  |                               | Wendepunkt                                   |

$z_s(w)$  wächst monoton mit  $w$ .  $z_s(w_1) < 0$ ;  $z_s(\omega_1) = Z > 0$ . Also liegt zwischen  $w_1$  und  $\omega_1$  ein und nur ein Wert von  $w$ , für den  $z_s(w) = 0$  ist.

Fig. 9.

5 a:

| $u$                    | $r$           | $z$          | $\gamma'$       | $\rho'$    | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit              |
|------------------------|---------------|--------------|-----------------|------------|-------------------------------|---------------------------|
| o                      | o             | o            | spitz           | $+\infty$  |                               | Wendepunkt                |
| $\downarrow$           | $\downarrow$  | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                           |
| $\omega_1 = u_m = u_s$ | $\frac{1}{A}$ | $Z$          | $\frac{\pi}{2}$ | o          |                               | Spitze<br>Maximum von $r$ |
| $\downarrow$           | $\uparrow$    | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                           |
| $2\omega_1$            | o             | $2Z$         | stumpf          | $-\infty$  |                               | Wendepunkt                |

Die Spitzentangente ist hier Symmetrieachse der Kurve; diese selbst ist bis auf den Maßstab identisch mit dem Meridianprofil der Rotationsfläche ( $\tilde{A} = \frac{A}{B}$ ;  $\tilde{B} = 1$ ) vom elliptischen Typus (s. [12] a, S. 38).

Bei allen 5 Formklassen sind die Punkte  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  Symmetriezentren der über den Elementarbereich hinaus fortgesetzten Kurve.

c) Die in der vorstehenden Übersicht vorkommenden Größen ändern sich mit  $w$  in folgender Weise.

| $w$          | $\gamma'(u=0)$        | $\gamma'(u=2\omega_1)$                 | $u_s$        | $r_s$                        | $z_s$                                                                                  | $\gamma'_s$                          |
|--------------|-----------------------|----------------------------------------|--------------|------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|
| 0            | $\pi$                 | $\pi$                                  | $w_1$        | 0                            | $-\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} w_1 + e_3 w_1 \right)$<br>$< 0$ , endlich | $\pi$                                |
| $\downarrow$ | $\uparrow$            | $\uparrow$                             | $\downarrow$ | $\downarrow$                 | $\downarrow$                                                                           | $\uparrow$                           |
| $w_1$        | $\frac{\pi}{2}$       | $\frac{\pi}{2} + 2 \arctg \frac{B}{A}$ | $u_s(w_1)$   | $\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ | $< 0$                                                                                  | $\pi - \arccos \frac{AB}{A^2 + B^2}$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$            | $\uparrow$                             | $\downarrow$ | $\downarrow$                 | $\downarrow$                                                                           | $\uparrow$                           |
| $\omega_1$   | $\arccos \frac{B}{A}$ | $\pi - \arccos \frac{B}{A}$            | $\omega_1$   | $\frac{1}{A}$                | $Z > 0$                                                                                | $\frac{\pi}{2}$                      |

| $w$          | $u_m$        | $r_m$         | $z_m$        | $\rho'_m$  |
|--------------|--------------|---------------|--------------|------------|
| $w_1$        | 0            | 0             | 0            | $+\infty$  |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$  | $\downarrow$ | $\uparrow$ |
| $\omega_1$   | $\omega_1$   | $\frac{1}{A}$ | $Z$          | 0          |

d) Der reelle Elementarbereich  $\mathfrak{E}_v$ .

$u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  sind konische Punkte.

Die Kr.-L.  $v = 0$  ist geodätische Linie.

$\varphi$  wächst monoton mit  $v$ .  $\varphi(v=0) = 0$ ;  $\varphi(v=\omega_1) = \Phi + \frac{\pi}{2}$ .

Je nachdem  $CD \gtrless 1$ , also  $\frac{1}{A^2} + \frac{1}{B^2} \gtrless 1$  ist, wird  $w(\bar{\omega}_2) \gtrless w_1$ , gehört also die Kr.-L.

$v = 0$  zur Formklasse  $\begin{smallmatrix} 2a \\ 3a \\ 4a \end{smallmatrix}$ . Sie nähert sich für  $B \rightarrow \infty$  bei konstantem  $\frac{A}{B}$  immer mehr der Form 1a, ohne diese wirklich zu erreichen. Nur die  $w \geq w(\bar{\omega}_2)$  entsprechenden Kr.-Ln.  $w$  gehören dem  $\mathfrak{E}_v$  an.

Im einzelnen ergeben sich für  $v = 0$  folgende Werte:

| $u$                        | $r$                             | $z$   | $\gamma'$                     | $\rho'$                         |
|----------------------------|---------------------------------|-------|-------------------------------|---------------------------------|
| 0                          | 0                               | 0     | $\arctg C + \arctg D$         | $+\infty$                       |
| $u_s$                      | $\frac{1}{AB}$                  | $z_s$ | $\pi - \arccos \frac{CD}{AB}$ | 0                               |
| $2\omega_1$                | 0                               | $2Z$  | $\pi - \arctg C + \arctg D$   | $-\infty$                       |
| Dazu nur für $CD \leq 1$ : |                                 |       |                               |                                 |
| $u_m$                      | $\frac{\sqrt{1 - C^2 D^2}}{AB}$ | $z_m$ | $\frac{\pi}{2}$               | $\frac{CD}{\sqrt{1 - C^2 D^2}}$ |

$$\gamma' (u = 0, v = 0) = \arctg \frac{C + D}{1 - CD} \text{ ist } \begin{matrix} \text{stumpf} \\ \text{recht} \\ \text{spliz} \end{matrix}, \text{ je nachdem } CD \begin{matrix} \geq \\ < \end{matrix} 1.$$

e) Die konischen Punkte  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$ .

**Satz 17:** Wickelt man die Tangentenkegel in den Punkten  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  einer Fl. (11) a, soweit sie dem  $\mathfrak{E}_v$  angehören, auf eine Ebene ab, so entstehen zwei Sektoren, deren Öffnungswinkel — absolut genommen — supplementär sind.

Beweis: Bezeichnet man ad hoc diese Öffnungswinkel mit  $\varepsilon(0)$  und  $\varepsilon(2\omega_1)$ , so berechnet man:

$$\varepsilon(0) = i \int_0^{\bar{\omega}_1} (Y_1 + Y_2) dv = \left| \arctg \frac{Y_2}{iV'} + \arctg \frac{Y_1}{iV'} \right|_{v=\bar{\omega}_1}^{v=0} = \pi - \arccos \frac{D}{C};$$

$$\varepsilon(2\omega_1) = i \int_0^{\bar{\omega}_1} (Y_1 - Y_2) dv = \left| \arctg \frac{Y_2}{iV'} - \arctg \frac{Y_1}{iV'} \right|_{v=\bar{\omega}_1}^{v=0} = \arccos \frac{D}{C};$$

$$\text{also } \varepsilon(0) + \varepsilon(2\omega_1) = \pi.$$

f) Die Rückkehrkurve  $u = u_s(v)$  im  $\mathfrak{E}_v$ .

Ihre nach § 5, f hergestellte Abwicklung zeigt folgenden Verlauf:

Fig. 62.

| $v$              | $\bar{y}$                 | $\bar{z}$     | $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}}$ | der $\bar{y}$ -Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit          |
|------------------|---------------------------|---------------|-----------------------------|------------------------------------------|-----------------------|
| 0                | 0                         | $z_s (v = 0)$ | 0                           |                                          | Minimum von $\bar{z}$ |
| $\downarrow$     | $\downarrow$              | $\downarrow$  | $\downarrow$                | konvex                                   |                       |
| $\bar{\omega}_1$ | $\bar{y}(\bar{\omega}_1)$ | $Z$           | $D$                         |                                          | Wendepunkt            |

Fortsetzung über den  $\mathfrak{E}_0$  hinaus für  $-\infty < v < +\infty$ ;  $0 < u_s < 2\omega_1$  ergibt sinus-artigen Verlauf.

Die Projektion der R.-K. des  $\mathfrak{E}_0$  auf die Ebene  $z = 0$  ist frei von singulären Punkten, kehrt dem Pol  $r = 0$  die konkave Seite zu, steht für  $v = 0$  und  $v = \bar{\omega}_1$  auf dem Radiusvektor senkrecht und bildet im übrigen mit demselben spitze Winkel, die durch ein Minimum gehen.  $r_s$  wächst monoton mit  $\varphi$ .

g) Beziehungen zwischen den reellen Elementarbereichen  $\mathfrak{E}_v$  und  $\tilde{\mathfrak{E}}_v$  zweier Flächen  $\mathfrak{f}(AB)$  und  $\tilde{\mathfrak{f}}(qA, qB)$  vom Typus (11)a.

Wir nehmen an:  $q > 1$ , und bilden nach § 3, VI a  $\mathfrak{E}_w$  und  $\tilde{\mathfrak{E}}_w$  aufeinander ab. Nach § 5, c ist dies eineindeutig möglich. Dann ergibt sich für  $v = \bar{\omega}_3$ :

$$\wp w = \bar{e}_3 + \frac{1}{3} = e_3 + 1;$$

$$\tilde{\wp} \tilde{w} = q^2 \wp w = \bar{e}_3 + q^2;$$

$$\tilde{\wp} \tilde{v} = \bar{e}_3 + q^2 - \frac{1}{3} = \bar{e}_3 + q^2 - 1 > \bar{e}_3 = \tilde{\wp}(\tilde{\omega}_3).$$

Dem Wert  $v = \bar{\omega}_3$  entspricht also ein Wert  $\tilde{v} = \tilde{v}(\bar{\omega}_3) + \bar{\omega}_3$ , für welchen  $0 < \tilde{v}(\bar{\omega}_3) < \bar{\omega}_1$  ist. Demnach entspricht jeder Kr.-L.  $v$  von  $\mathfrak{E}_0$  eine und nur eine solche von  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ , aber nicht umgekehrt. Den Kr.-Ln.  $\tilde{v}$  von  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ , für welche  $0 \leq \tilde{v} < \tilde{v}(\bar{\omega}_3)$  ist, entsprechen Kr.-Ln. von  $\mathfrak{f}$ , die zwar noch dem  $\mathfrak{E}_w$ , aber nicht mehr dem  $\mathfrak{E}_0$  angehören. Das besagt:

**Satz 18:** Innerhalb der Flächenschar  $\frac{A}{B} = \text{const. vom Typus (11)a}$  wird, wenn  $A$  und  $B$  abnehmen, der Formenreichtum der Kr.-Ln.  $v$  des  $\mathfrak{E}_0$  geringer. Der Abbau erfolgt von der Seite  $v = 0$  her.

Für  $B \rightarrow 1$  bleibt nur noch die Form 5 a übrig als Meridian der Rotationsfläche vom elliptischen Typus [12] a.

Anderseits folgt aus Satz 16, 3 in § 5, S. 32

$$\tilde{\Phi}(qA, qB) < \Phi(A, B), \text{ wenn } q > 1.$$

Es gehört also zur formenreicheren Fläche der kleinere Wert von  $\Phi$ . Dieses Paradoxon findet seine Erklärung durch Satz 8, S. 19.

h) Die ganze Fläche (11)a.

Von den Symmetrieelementen des § 3, II treten bei (11)a folgende reell auf  $(\pm l, \pm l' = 0, 1, 2 \dots \text{unabhängig voneinander})$  (Fig. 76):

S.-Zentren

$$u = 2l\omega_1;^{32}$$

S.-Ebenen durch die Achse  $v = 2l\bar{\omega}_1$ ;

S.-Achsen: die Lote auf die Achse in den Ebenen  $v = (2l + 1)\bar{\omega}_1$  durch die Punkte  $u = (2l' + 1)\omega_1$ ;  
die Lote auf die Achse senkrecht zu den Ebenen  $v = 2l\bar{\omega}_1$  durch die Punkte  $u = 2l'\omega_1$ .

Demnach läßt sich die ganze Fläche aus dem  $\mathfrak{C}_0$  folgendermaßen herleiten:

1. Man lasse den  $\mathfrak{C}_0$  eine Drehung vom Betrage  $\pi$  um die Spitzentangente der Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_1$  ausführen;
2. man spiegle dann an der Ebene  $v = 0$ ;
3. man nehme zu dem ganzen jetzt vorhandenen Bereich alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Drehung um die Achse vom Betrage  $4l\left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right)$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) entstehen;
4. man lasse das Ergebnis von 3 eine Drehung vom Betrage  $\pi$  um das auf der Ebene  $v = 0$  im Punkte  $u = 0$  errichtete Lot ausführen;
5. man nehme zu dem ganzen jetzt vorhandenen Bereich alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Translation ohne Drehung längs der Flächenachse vom Betrage  $4lZ$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) entstehen.

Ziffer 1, 2 und 4 sind so zu verstehen, daß jeweils der neu entstehende Bereich zu dem vorher schon vorhandenen hinzuzunehmen ist. Entsprechend sind auch spätere derartige Vorschriften zu deuten.

## II. [12] a $A > B = 1$ .

$B \rightarrow 1$  führt auf  $\bar{\omega}_3 \rightarrow i\infty$ ;  $\bar{\omega}_1 \rightarrow \frac{\pi}{2C}$ ;  $\bar{\eta}_1 \rightarrow \frac{C\pi}{6}$ . Das frühere Knickintervall  $[v_0 \dots \bar{\omega}_3 \dots \bar{\omega}_2]$  reduziert sich auf den Strahl der positiv imaginären Achse von  $v_0 = \frac{i}{C} \ln(A + C)$  bis  $+i\infty$ , das Intervall  $[\bar{\omega}_3 \dots \bar{\omega}_2]$  also auf den unendlich fernen Punkt. Ausführung der Grenzübergänge ergibt für den  $\mathfrak{C}_0$ :

$$r = \frac{C}{A} \frac{\sigma}{\sigma_2} u; \quad z = -\frac{1}{A} \left( \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u + e_3 u \right); \quad \varphi = A v; \quad \Phi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{A}{C}.^{33} \quad (6; 2)$$

Das sind die Koordinaten einer Rotationsfläche vom elliptischen Typus (auch Kegeltypus genannt) mit den Meridianen  $v$  von der Form 5 a und den Parallelkreisen  $u$ . Die Rückkehrkurve hat sich zum Rückkehrparallelkreis verflacht. Fig. 63.

<sup>32</sup> Lenz (S. 23) gibt irrtümlich statt der S.-Zentren S.-Ebenen an.

<sup>33</sup> Es fällt auf, daß  $\Phi$  hier einen bestimmten von 0 verschiedenen Grenzwert hat, trotzdem jede Meridianebene Symmetrieebene ist. Diese Tatsache tritt künftig wieder in Erscheinung bei den Beziehungen der Rotationsfläche [12] a zu ihrer nicht mehr rotationssymmetrischen Komplementärfläche [12] b; vgl. § 8, II, § 10 und § 15.

## § 7. DIE FÄLLE {11} a UND {22} a.

I. {11} a  $A = B > 1$ .<sup>34</sup>

Für  $A \rightarrow B$  werden  $\omega_1, \eta_1, \bar{\omega}_1, \bar{\eta}_1, Z$  und  $\Phi$  unendlich. Weitere Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{i\pi}{2A}; \quad \eta_3 = -\frac{A\pi i}{6}; \quad \bar{\omega}_3 = \frac{i\pi}{2C}; \quad \bar{\eta}_3 = -\frac{C\pi i}{6}; \\ v_0 &= \frac{i}{C} \operatorname{arctg} C; \quad w_1 = \frac{1}{A} \ln(1 + \sqrt{2}). \end{aligned} \quad (7; 1)$$

Das Knickintervall  $[v_0 \dots \bar{\omega}_3 \dots \bar{\omega}_2]$  geht von  $v_0$  geradlinig nach  $\bar{\omega}_3$  und von dort parallel zur Achse des positiv Reellen bis  $\infty$ .

Hält man beim Grenzübergang irgendeinen bestimmten Punkt des  $\mathfrak{E}_b$  von (11) a im Endlichen fest, so rücken andere Teile desselben ins Unendliche. So ergeben sich dreierlei verschiedene Grenzgebilde, je nachdem man festhält

- a) den Punkt  $u = 0, v = 0$ ;
- b) den Punkt  $u = \omega_1, v = \bar{\omega}_1$ ;
- c) einen der Punkte

$$u = 0, v = \bar{\omega}_1; \quad u = \omega_1, v = 0; \quad u = 2\omega_1, v = 0; \quad u = 2\omega_1, v = \bar{\omega}_1.$$

a) Grenzübergang ergibt:

$$w(v) = w(v) - \frac{i\pi}{2A} = \frac{1}{A} \ln \frac{-iA \operatorname{sh} Cv + \sqrt{-C^2 - A^2 \operatorname{sh}^2 Cv}}{C}. \quad (7; 2)$$

Für  $v = v_0 \dots \bar{\omega}_3$  ist in (7; 2)  $\operatorname{sh} Cv = i \sin C|v|$ , für  $v = \bar{\omega}_3 \dots \bar{\omega}_3 + \infty$  ist dort  $\operatorname{sh} Cv = i \operatorname{ch} Cv$  zu setzen. Je nachdem  $A \gtrless \sqrt{2}$  ist, wird  $w_1 \gtrless w(\bar{\omega}_3)$ .

$$\begin{aligned} r(u, w) &= \frac{2 \operatorname{sh} Au \operatorname{sh} Aw}{A (\operatorname{sh}^2 Au + \operatorname{ch}^2 Aw)}; \quad z(u, w) = u - \frac{\operatorname{sh}(2Au)}{A (\operatorname{sh}^2 Au + \operatorname{ch}^2 Aw)}; \\ r(u, v) &= \frac{2C \operatorname{sh} Au \sqrt{A^2 \operatorname{sh}^2 Cv + 1}}{A (C^2 \operatorname{sh}^2 Au + A^2 \operatorname{ch}^2 Cv)}; \quad z(u, v) = u - \frac{C^2 \operatorname{sh}(2Au)}{A (C^2 \operatorname{sh}^2 Au + A^2 \operatorname{ch}^2 Cv)}; \end{aligned} \quad (7; 3)$$

$$\varphi(v) = v + \operatorname{arctg}(C \tanh Cv).$$

§ 6, I b bis I g (S. 33 ff.) bleiben sinngemäß gültig, wenn man dort  $\omega_1, \bar{\omega}_1, Z$  und  $\Phi$  durch  $\infty$  ersetzt und für jedes  $w$ :  $\gamma'(u = \infty) = \pi$  setzt. Fig. 18–22.

Für endliches  $u$  und  $v$  verhält sich die neue Fläche im  $\mathfrak{E}_b$  ( $u \geq 0, v \geq 0$ ) ganz analog wie (11) a für  $0 \leq u < \omega_1$  und  $0 \leq v < \bar{\omega}_1$ .

<sup>34</sup> Koordinaten ohne Diskussion bei Kuen S. 204. Von den drei dort auf S. 205 als zulässig erklärten Arten der Parameterwahl führt die erste auf {11} b, die zweite auf {11} a und die dritte auf {33}.



$u \rightarrow \infty$  bei endlichem  $v$  führt auf  $r \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow \infty$ ;  $\gamma' \rightarrow \pi$ . Während also die Kr.-Ln.  $v$  von (11) a für  $u = 2\omega_1$  die Achse im Endlichen schneidend durchsetzen, nähern sie sich hier für  $u \rightarrow \infty$  der Achse als Asymptote. Der frühere konische Punkt  $u = 2\omega_1$  ist gegen  $z = +\infty$  zu einer asymptotischen Spitze ausgezogen, analog wie bei der Pseudosphäre im Vergleich zu den Rotationsflächen vom elliptischen Typus.

Für  $v \rightarrow +\infty$  und endliches  $u$  umwindet die Fläche die Achse asymptotisch. Der Öffnungswinkel am konischen Punkt  $u = 0$  nimmt mit wachsender Zahl der Umläufe gegen 0 ab.

Für  $v \rightarrow +\infty$  nähern sich die Kr.-Ln.  $v$  immer mehr der Traktrixform, indem gleichzeitig ihre Spitze längs der R.-K. gegen  $z = +\infty$  wandert. Der Neigungswinkel der R.-K. gegen die  $z$ -Achse nimmt hier wie früher mit wachsendem  $v$  monoton ab von  $\frac{\pi}{2}$  bis

$\frac{\pi}{2} - \arctg D$ . Während aber letzterer Wert bei (11) a für  $v = \bar{\omega}_1$  wirklich erreicht wurde, ist er hier der Grenzwert, dem jener Winkel bei wachsender Zahl schraubenartiger Umläufe um die Achse zustrebt. Aus all dem folgt: für  $v \rightarrow +\infty$  nimmt die Fläche in der Umgebung der R.-K. immer mehr den Charakter einer Schraubenfläche mit der Traktrix als Profil an. Eine solche ergibt sich in der Tat beim Grenzübergang b (s. unten).

Die Abwicklung der R.-K. im  $\mathfrak{E}_v$  erinnert an einen symmetrisch halbierten Hyperbelzweig. Der andere Halbzeig würde dem Wertbereich  $u = 0 \dots +\infty$ ;  $v = 0 \dots -\infty$  entsprechen. Fig. 68.

Die Projektion der R.-K. auf die Ebene  $z = 0$  nähert sich dem Kreis  $r = \frac{1}{A}$  von innen asymptotisch.

Satz 18 S. 37 bleibt sinngemäß gültig.

An Symmetrieelementen sind noch vorhanden:

- das S.-Zentrum  $u = 0$ ;
- die S.-Ebene  $v = 0$ ;
- eine S.-Achse senkrecht zu dieser Ebene durch den Punkt  $u = 0$ .

Demnach erhält man aus dem  $\mathfrak{E}_v$  die ganze Fläche folgendermaßen:

1. Man spiegle den  $\mathfrak{E}_v$  an der Ebene  $v = 0$ .
2. Man erteile dem Ergebnis von 1 eine Drehung vom Betrage  $\pi$  um das auf der Ebene  $v = 0$  im Punkte  $u = 0$  errichtete Lot.

Die ganze so erhaltene Fläche heiße kurz: „Hauptfläche  $\{11\}a$ “.

- b) Setzt man  $u - \omega_1 = u^*$ ;  $v - \bar{\omega}_1 = v^*$ ;  $w - \omega_1 = w^*$ ;

$$z - Z = z^*; \quad \varphi - \left(\Phi + \frac{\pi}{2}\right) = \varphi^*; \quad r = r^*,$$

stellt  $r^*$ ,  $z^*$  und  $\varphi^*$  als Funktionen von  $u^*$  und  $v^*$  bzw.  $w^*$  dar, geht dann zur Grenze  $A \rightarrow B$  über und läßt schließlich zur Vereinfachung alle Sterne wieder weg, so erhält man:

$$w = \frac{Cv}{A}; \quad r(u, w) = \frac{1}{A \cosh A(u-w)}; \quad z(u, w) = u - \frac{1}{A} \tanh A(u-w); \quad (7; 4)$$

$$\varphi = v; \quad r(u, v) = \frac{1}{A \cosh(Au - Cv)}; \quad z(u, v) = u - \frac{1}{A} \tanh(Au - Cv).$$

Dies sind, wie schon angekündigt, die Koordinaten einer rechtsgewundenen „Minding-Dinischen Schraubenfläche“. Ihr Profil ist die Traktrix, ihre R.-K. eine gewöhnliche Schraubenlinie mit  $r = \frac{1}{A}$ , der Ganghöhe  $\frac{2\pi C}{A}$  und dem Neigungswinkel  $\frac{\pi}{2} - \arctg C$  gegen die Achse. Die Abwicklung der R.-K. wird also hier eine Gerade.

c) Bei allen einschlägigen Grenzübergängen ergibt sich  $r \rightarrow 0$ . Grenzgebilde ist also die Achse, was aus deren Eigenschaft, Asymptote der Kr.-Ln.  $v$  der Hauptfläche zu sein, hinreichend evident ist.

Nachstehende Übersicht soll zusammenfassend und ergänzend veranschaulichen, welche Gebilde entstehen, wenn man jeweils den durch das Wertepaar  $u, v$  gekennzeichneten Punkt von (11) a beim Grenzübergang zu  $\{11\}$  a im Endlichen festhält. Dabei bedeutet  $H_a$  die Hauptfläche  $\{11\}$  a in der Lage, wie sie unter a gefunden wurde;

|                  |                   |       |                  |                   |
|------------------|-------------------|-------|------------------|-------------------|
| $2\omega_1$      |                   |       |                  | $H'_a$            |
| $\omega_1$       | L                 |       | R                |                   |
| 0                |                   | $H_a$ |                  |                   |
| $-\omega_1$      | R                 |       | L                |                   |
| $u \backslash v$ | $-\bar{\omega}_1$ | 0     | $\bar{\omega}_1$ | $2\bar{\omega}_1$ |

$H'_a$  die aus  $H_a$  durch Spiegelung an der Ebene  $z = 0$  (oder  $x = 0$ ) hervorgehende, nur der Lage nach von  $H_a$  verschiedene Fläche; R eine rechtsgewundene, L eine linksgewundene M.-D.sche Schraubenfläche; ein leeres Feld die Achse als Grenzgebilde. Die sinn-gemäße Fortsetzung der Übersicht für weitere Wert-paare  $u, v$  ergibt sich durch schlichte und lückenlose Überdeckung der Ebene mit Quadraten, die aus dem stark umrandeten durch Translation ohne Drehung hervorgehen. Erst die Gesamtheit der durch dieses Netz symbolisch dargestellten Flächen bildet das Analogon zur ganzen Fläche (11) a.

## II. (22) a $A = B = 1$ .

$\omega_1, \eta_1, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_3, Z$  und  $\Phi$  werden unendlich. Weitere Grenzwerte:

$$\bar{\eta}_1 = \bar{\eta}_3 = 0; \quad \omega_3 = \frac{i\pi}{2}; \quad \eta_3 = -\frac{i\pi}{6}; \quad v_0 = i; \quad w_1 = \ln(1 + \sqrt{2}). \quad (7; 5)$$

Nur wenn man einen Punkt der R.-K. im Endlichen festhält, entsteht beim Grenz-ü ergang aus (11) a ein von der Achse verschiedenes Grenzgebilde, und zwar die Ro-tationsfläche mit der Traktrix als Meridianprofil, die Pseudosphäre. Koordinaten:

$$r = \frac{1}{\cosh u}; \quad z = u - \tanh u; \quad \varphi = v; \quad w = 0. \quad (7; 6)$$

## § 8. DIE FÄLLE (11) b, [12] b, (13), [23] UND (33).

I. (11) b  $A > B > 1$ .<sup>35</sup>

a) Koordinaten.

$$r(u, w) = \frac{(A^2 - B^2) \sigma_3 u \sigma_3 w}{AB (A \sigma_2 u \sigma_2 w - B \sigma_1 u \sigma_1 w)};$$

$$z(u, w) = -\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma_3'}{\sigma_3} u + e_3 u \right) - \frac{\sigma}{\sigma_3} u \cdot \frac{A \sigma_2 u \sigma_1 w - B \sigma_1 u \sigma_2 w}{A \sigma_2 u \sigma_2 w - B \sigma_1 u \sigma_1 w}; \quad (8; 1)$$

$$\varphi(v) = i v \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \frac{i}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}(v_0 + v)}{\bar{\sigma}(v_0 - v)}.$$

b) Gestalt der Kr.-Ln.  $w$  des  $\mathfrak{E}_w$ .Wir teilen wieder die Kr.-Ln.  $w$  des  $\mathfrak{E}_w$  in 5 Formklassen:

|              |     |                   |       |                   |            |
|--------------|-----|-------------------|-------|-------------------|------------|
| Wert von $w$ | 0   | $\longrightarrow$ | $w_2$ | $\longrightarrow$ | $\omega_1$ |
| Formklasse   | 1 b | 2 b               | 3 b   | 4 b               | 5 b        |

Fig. 4.

1 b:

| $u$          | $r$        | $z$          | $\gamma'$       | $\rho'$    | der Achse zugekehrte Seite | Besonderheit    |
|--------------|------------|--------------|-----------------|------------|----------------------------|-----------------|
| 0            | $> 0$      | 0            | 0               | $< 0$      |                            | Maximum von $r$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konkav                     |                 |
| $u_m$        | $r_m$      | $z_m$        | $\frac{\pi}{2}$ | $\rho'_m$  |                            | Minimum von $z$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                     |                 |
| $2 \omega_1$ | $> 0$      | $2Z$         | $\pi$           | $< 0$      |                            | Minimum von $r$ |

1 b ist elastische Linie.

2 b: Verläuft, abgesehen von quantitativen Unterschieden, wie 1 b, ist aber keine Elastika. Fig. 5.

3 b: Ebenso; nur wird für  $u = 0 = u_s(w_2)$  bei normaler Gestalt  $\rho' = 0$ , wodurch sich die für  $w > w_2$  auftretende Spitze ankündigt. Fig. 6.<sup>35</sup> Vgl. Lenz S. 11-20.

Fig. 7.

4 b:

| u            | r            | z            | $\gamma'$       | $\rho'$    | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                 |
|--------------|--------------|--------------|-----------------|------------|-------------------------------|------------------------------|
| o            | $> 0$        | o            | o               | $> 0$      |                               | Minimum von r                |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                              |
| $u_s$        | $r_s$        | $z_s < Z$    | spitz           | o          |                               | Spitze<br>Maximum von r u. z |
| $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\uparrow$   | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konkav                        |                              |
| $u_m$        | $r_m$        | $z_m$        | $\frac{\pi}{2}$ | $\rho'_m$  |                               | Minimum von z                |
| $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                              |
| $2\omega_1$  | $> 0$        | $2Z$         | $\pi$           | $< 0$      |                               | Minimum von r                |

Setzt man eine Kr.-L. 1 b, 2 b oder 3 b über den E.-B. hinaus durch Spiegelung an der Ebene  $z = 0$  fort, so entsteht in dieser Ebene ein Doppelpunkt, da ja  $z_m < 0$ ;  $2Z > 0$ .

$z_m(w)$  wächst monoton mit  $w$ .  $z_m(w_2) < 0$ ;  $z_m(\omega_1) = Z > 0$ . Also liegt zwischen  $w_2$  und  $\omega_1$  ein und nur ein Wert von  $w$ , für den  $z_m = 0$  wird; er werde ad hoc mit  $w^*$  bezeichnet. Für eine Kr.-L. 4 b ist demnach  $z_m \leq 0$ , je nachdem  $w \leq w^*$ . Setzt man eine solche Kr.-L. durch Spiegelung an der Ebene  $z = 0$  fort, so entstehen in dieser Ebene für  $w < w^*$  zwei Doppelpunkte, die für  $w = w^*$  in einen Punkt der Selbstberührung zusammenrücken und für  $w > w^*$  fehlen.

Fig. 8.

5 b:

| u            | r                             | z            | $\gamma'$       | $\rho'$                        | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit            |
|--------------|-------------------------------|--------------|-----------------|--------------------------------|-------------------------------|-------------------------|
| o            | $\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{AB}$ | o            | o               | $\frac{B}{A\sqrt{A^2 - B^2}}$  |                               | Minimum von r           |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                  | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$                     | konvex                        |                         |
| $\omega_1$   | $\frac{1}{B}$                 | Z            | $\frac{\pi}{2}$ | o                              |                               | Spitze<br>Maximum von r |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                    | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$                     | konvex                        |                         |
| $2\omega_1$  | $\frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{AB}$ | $2Z$         | $\pi$           | $\frac{-B}{A\sqrt{A^2 - B^2}}$ |                               | Minimum von r           |

Die Spitzentangente ist Symmetrieachse der Kurve; diese selbst ist bis auf den Maßstab identisch mit dem Meridianprofil der Rotationsfläche  $\left(\tilde{A} = 1; \tilde{B} = \frac{B}{A}\right)$  vom hyperbolischen Typus (s. [23], S. 50).

Bei allen 5 Formklassen sind die Normalen in den Punkten  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  Symmetrieachsen der über den Elementarbereich hinaus fortgesetzten Kurve.

c) Die in der vorstehenden Übersicht vorkommenden Größen ändern sich mit  $w$  in folgender Weise.

| $w$          | $r(u=0)$                    | $r(u=2\omega_1)$                   | $\rho'(u=0)$                | $\rho'(u=2\omega_1)$                   |
|--------------|-----------------------------|------------------------------------|-----------------------------|----------------------------------------|
| $0$          | $\frac{A+B}{AB}$            | $\frac{A-B}{AB}$                   | $\frac{-1}{A+B}$            | $\frac{-1}{A-B}$                       |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                  | $\downarrow$                       | $\downarrow$                | $\downarrow$                           |
| $w_2$        | $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{AB}$ | $\frac{A^2-B^2}{AB\sqrt{A^2+B^2}}$ | $0$                         | $\frac{-2AB}{(A^2-B^2)\sqrt{A^2+B^2}}$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                  | $\downarrow$                       | $\downarrow$                | $\downarrow$                           |
| $\omega_1$   | $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{AB}$ | $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{AB}$        | $\frac{B}{A\sqrt{A^2-B^2}}$ | $\frac{-B}{A\sqrt{A^2-B^2}}$           |

| $w$          | $u_m$        | $r_m$                                            | $z_m$        | $\rho'_m$                                      |
|--------------|--------------|--------------------------------------------------|--------------|------------------------------------------------|
| $0$          | $w_2$        | $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{AB}$                      | $< 0$        | $\frac{-1}{\sqrt{A^2+B^2}}$                    |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$                                       | $\downarrow$ | $\downarrow$                                   |
| $w_2$        | $u_m(w_2)$   | $\frac{\sqrt{A^4+A^2B^2+B^4}}{AB\sqrt{A^2+B^2}}$ | $< 0$        | $\frac{-AB}{\sqrt{(A^2+B^2)(A^4+A^2B^2+B^4)}}$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$                                       | $\downarrow$ | $\downarrow$                                   |
| $\omega_1$   | $\omega_1$   | $\frac{1}{B}$                                    | $Z > 0$      | $0$                                            |

| $w$          | $u_s$        | $r_s$                       | $z_s$        | $\gamma'_s$     |
|--------------|--------------|-----------------------------|--------------|-----------------|
| $w_2$        | $0$          | $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{AB}$ | $0$          | $0$             |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$                  | $\downarrow$ | $\downarrow$    |
| $\omega_1$   | $\omega_1$   | $\frac{1}{B}$               | $Z$          | $\frac{\pi}{2}$ |

d) Der reelle Elementarbereich  $\mathfrak{E}_0$ .

Dieser ist hier mit  $\mathfrak{E}_w$  identisch, enthält also alle Formen der Kr.-Ln.  $w$ .

Die Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  sind eben und geodätische Linien.

$\varphi$  wächst monoton mit  $v$ .  $\varphi(v=0) = 0$ ;  $\varphi(v=\bar{\omega}_1) = \Phi$ .

Die Kr.-Ln.  $u$  durchsetzen die Symmetrieebene  $\varphi = v = 0$ , indem sie dieselbe jeweils in einer Spitze berühren, welche der Kr.-L.  $v = 0$  auf deren konkaver Seite senkrecht zugewandt ist. Als Ort dieser Spitzen ist die Kr.-L.  $v = 0$  ebene Rückkehrkurve der Fläche und Enveloppe der Asymptotenlinien beider Scharen. Vgl. Satz 5, 4 S. 17.

e) Die ebenen Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$ . Fig. 71.

$$r(0, v) = \frac{(A^2 - B^2) W}{AB (AY_2 - BY_1)}; \quad r(2\omega_1, v) = \frac{(A^2 - B^2) W}{AB (AY_2 + BY_1)}. \quad (8; 2)$$

Daraus folgt:  $r(0, v) \cdot r(2\omega_1, v) = \frac{A^2 - B^2}{A^2 B^2}$ , unabhängig von  $v$ , d. h.

Satz 19: 1. Die Projektionen der Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  auf die Ebene  $z = 0$  sind invers zueinander in bezug auf den Kreis  $r = \frac{\sqrt{A^2 - B^2}}{AB}$ .

2. Andererseits geht auch durch Drehung vom Betrage  $2\Phi$  um den Pol  $r = 0$  die eine dieser Projektionen in die andere über.

Für beide darf man o. B. d. A.  $\rho'' = -r'' = \frac{1}{sh(U+V)}$  setzen. Dann wächst die Bogenlänge mit  $v$  und ergibt sich im  $\mathfrak{E}_0$  folgender Verlauf:

| $u = 0$ : | $v$              | $r$                         | $\varphi$                      | Winkel zwischen<br>Kurve und $r$         | $\rho''$                    | dem Pol $r=0$<br>zugekehrte<br>Seite | Besonderheit              |
|-----------|------------------|-----------------------------|--------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
|           | 0                | $\frac{A+B}{AB}$            | 0                              | $\pi$                                    | 0                           |                                      | Spitze<br>Maximum von $r$ |
|           | $\downarrow$     | $\uparrow$                  | $\downarrow$                   | $\uparrow$                               | $\downarrow$                | konvex                               |                           |
|           | $v_2$            | $\frac{\sqrt{A^2+B^2}}{AB}$ | $\varphi(v_2) < \frac{\pi}{2}$ | $\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ | $+\infty$<br>$-\infty$      |                                      | Wendepunkt                |
|           | $\downarrow$     | $\uparrow$                  | $\downarrow$                   | $\uparrow$                               | $\downarrow$                | konkav                               |                           |
|           | $\bar{\omega}_1$ | $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{AB}$ | $\Phi$                         | $\pi - \arctg \frac{1}{C}$               | $-\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{B}$ |                                      |                           |

$\varphi(v_2) < \frac{\pi}{2}$  ergibt sich folgendermaßen: Nach § 5, d und e 1 ist  $V'' \geq AB$ , solange  $0 \leq v \leq v_2$  („=" nur für  $v = v_2$ ); also:

$$\varphi(v_2) = AB \int_0^{v_2} \frac{dv}{1+V'^2} < \int_0^{v_2} \frac{V'' dv}{1+V'^2} = \int_0^{+\infty} \frac{d|V'|}{1+|V'|^2} < \int_0^{\infty} \frac{d|V'|}{1+|V'|^2} = \frac{\pi}{2}.$$

$u = 2\omega_1$ :

| $v$              | $r$                                | $\varphi$                      | Winkel zwischen<br>Kurve und $r$   | $\rho''$                   | dem Pol $r=0$<br>zugekehrte<br>Seite | Besonderheit              |
|------------------|------------------------------------|--------------------------------|------------------------------------|----------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| 0                | $\frac{A-B}{AB}$                   | 0                              | 0                                  | 0                          |                                      | Spitze<br>Minimum von $r$ |
| $\downarrow$     | $\downarrow$                       | $\downarrow$                   | $\downarrow$                       | $\downarrow$               | konkav                               |                           |
| $v_2$            | $\frac{A^2-B^2}{AB\sqrt{A^2+B^2}}$ | $\varphi(v_2) < \frac{\pi}{2}$ | $\arcsin \frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ | $\frac{A^2-B^2}{2AB}$      |                                      |                           |
| $\downarrow$     | $\downarrow$                       | $\downarrow$                   | $\downarrow$                       | $\downarrow$               | konkav                               |                           |
| $\bar{\omega}_1$ | $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{AB}$        | $\Phi$                         | $\arctg \frac{1}{C}$               | $\frac{\sqrt{A^2-B^2}}{B}$ |                                      |                           |

f) Die räumliche Rückkehrkurve  $u = u_s(v)$  im  $\mathcal{E}_v$ .

Bezüglich des Verlaufes ihrer nach § 5, f hergestellten Abwicklung sind zwei Fälle zu unterscheiden je nach dem Verhalten von  $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}}$  für  $v_2 < v < \bar{\omega}_1$ .

$\alpha$ ) Ist  $A^2 - B^2 \geq 1$ , so ist stets  $\frac{d}{dv} \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \right) > 0$ .

$\beta$ ) Ist dagegen  $A^2 - B^2 < 1$ , so existiert zwischen  $v_2$  und  $\bar{\omega}_1$  ein und nur ein Wert  $v = v'$ , für welchen  $V'^2 = \frac{A^2 + B^2 - 1}{2}$  ist; und es ist  $\frac{d}{dv} \left( \frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \right) \leq 0$ , je nachdem  $v \leq v'$  ist.

Verlauf:

Fig. 64.

| $\alpha$ : | $v$              | $\bar{y}$                 | $\bar{z}$    | $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}}$ | der $\bar{y}$ -Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                    |
|------------|------------------|---------------------------|--------------|-----------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|
|            | $v_2$            | 0                         | 0            | 0                           |                                          | Spitze<br>Minimum von $\bar{y}$ |
|            | $\downarrow$     | $\downarrow$              | $\downarrow$ | $\downarrow$                | konvex                                   |                                 |
|            | $\bar{\omega}_1$ | $\bar{y}(\bar{\omega}_1)$ | $Z$          | $C$                         |                                          | Wendepunkt                      |

Fortsetzung für  $v_2 \leq v \leq 2\bar{\omega}_1 - v_2$ ;  $-\infty < u < +\infty$  ergibt einen Verlauf, der an das Meridianprofil der Rotationsflächen vom elliptischen Typus erinnert (§ 6, I b Form 5 a).



Fig. 65.

$\beta$ :

| $v$              | $\bar{y}$                 | $\bar{z}$     | $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}}$                                | der $\bar{y}$ -Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                    |
|------------------|---------------------------|---------------|------------------------------------------------------------|------------------------------------------|---------------------------------|
| $v_2$            | o                         | o             | o                                                          |                                          | Spitze<br>Minimum von $\bar{y}$ |
| $\downarrow$     | $\downarrow$              | $\downarrow$  | $\downarrow$                                               | konvex                                   |                                 |
| $v'$             | $\bar{y}(v')$             | $\bar{z}(v')$ | $\frac{A^2 + B^2 - 1}{\sqrt{4A^2B^2 - (A^2 + B^2 - 1)^2}}$ |                                          | Wendepunkt                      |
| $\downarrow$     | $\downarrow$              | $\downarrow$  | $\uparrow$                                                 | konkav                                   |                                 |
| $\bar{\omega}_1$ | $\bar{y}(\bar{\omega}_1)$ | $Z$           | $C$                                                        |                                          | Wendepunkt                      |

Bei Fortsetzung über den  $\mathfrak{E}_0$  hinaus hat die Form  $\beta$  zwischen je zwei aufeinanderfolgenden Spitzen drei Wendepunkte, die Form  $\alpha$  nur einen.

Die Projektion der R.-K. des  $\mathfrak{E}_0$  auf die Ebene  $z = 0$  bildet bei  $v = v_2$  mit dem Radiusvektor einen stumpfen Winkel, der mit wachsendem  $\varphi$  monoton bis zu einem rechten bei  $v = \bar{\omega}_1$  abnimmt. Im Falle  $\alpha$  hat sie keinen singulären Punkt und kehrt dem Pol  $r = 0$  die konvexe Seite zu. Im Fall  $\beta$  verhält sie sich für  $v < v'$  ebenso, hat aber dann bei  $v = v'$  einen Wendepunkt und kehrt für  $v > v'$  dem Pol die konkave Seite zu.  $r_s$  nimmt monoton ab, wenn  $\varphi$  wächst.

#### g) Beziehung zwischen den reellen Elementarbereichen

zweier Flächen der Schar  $\frac{A}{B} = \text{const.}$

Nicht nur bei (11) b, sondern auch bei [12] b und (13) sind  $\mathfrak{E}_0$  und  $\mathfrak{E}_w$  identisch. Unter Vorwegnahme dieses Ergebnisses läßt sich also sagen:

**Satz 20:** Die reellen Elementarbereiche aller Flächen (11) b, [12] b und (13) der Schar  $\frac{A}{B} = \text{const.}$  enthalten sämtliche Formklassen von Kr.-Ln. w, sind daher im Sinn des § 3, VI a 1 eineindeutig aufeinander abbildbar.

Vgl. noch § 3, VI a 2, S. 19 und § 5, g, S. 32.

#### h) Die ganze Fläche (11) b.

Von den Symmetrieelementen des § 3, II treten bei (11) b folgende reell auf ( $\pm l, \pm l' = 0, 1, 2 \dots$  unabhängig voneinander) (Fig. 77):

S.-Ebenen senkrecht zur Achse  $u = 2l\omega_1$ ;  
S.-Ebenen durch die Achse  $v = 2l'\bar{\omega}_1$ ;

S.-Achsen: die Lote auf die Achse in den Ebenen  $v = (2l + 1) \bar{\omega}_1$  durch die Punkte  $u = (2l' + 1) \omega_1$ ; <sup>36</sup>

die Lote auf die Achse in den Ebenen  $v = 2l \bar{\omega}_1$  durch die Punkte  $u = 2l' \omega_1$ .

Demnach bleibt die Vorschrift des § 6, h (S. 38) zur Herstellung der ganzen Fläche aus dem  $\mathfrak{E}_3$  auch hier gültig mit Ausnahme der dortigen Ziffer 4. An deren Stelle tritt hier:

4. Man spiegle das Ergebnis von 3 an der Ebene  $u = 0$ .

In Ziffer 3 ist  $\Phi + \frac{\pi}{2}$  durch  $\Phi$  zu ersetzen.

## II. [12] b $A > B = 1$ .<sup>37</sup>

Grenzwerte für  $B \rightarrow 1$  wie bei [12] a, S. 38:

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_3 &= +i\infty; \quad \bar{\omega}_1 = \frac{\pi}{2C}; \quad \bar{\eta}_1 = \frac{C\pi}{6}; \quad v_0 = \frac{i}{C} \ln(A + C); \\ \text{dazu: } v_2 &= \frac{1}{C} \operatorname{arctg} C; \quad w = \int_0^v \frac{C dv}{\sqrt{C^2 + \sin^2 Cv}}; \quad \Phi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{A}{C} - 1 \right). \end{aligned} \quad (8; 3)$$

Koordinaten:  $r(u, w)$  und  $z(u, w)$  wie in I a dieses Paragraphen, S. 42.

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \frac{C \sigma_3 u \sqrt{C^2 + \sin^2 Cv}}{A (A \sigma_2 u - \sigma_1 u \cos Cv)}; \\ z(u, v) &= -\frac{1}{A} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} u + e_3 u \right) - \frac{\sigma}{\sigma_3} u \cdot \frac{A \sigma_2 u \cos Cv - \sigma_1 u}{A \sigma_2 u - \sigma_1 u \cos Cv}; \\ \varphi(v) &= Av - \operatorname{arctg} \left( \frac{A}{C} \operatorname{tg} Cv \right). \end{aligned} \quad (8; 4)$$

Diese Ausdrücke stellen die Komplementärfläche der Rotationsfläche [12] a vom elliptischen Typus mit der nämlichen Konstanten  $A$  dar.

Die analytische Entartung der Funktionen von  $v$  wirkt sich reell geometrisch nicht aus, da die reelle Periode von  $\bar{\varphi}v$  endlich bleibt. Daher gilt I b bis I h dieses Paragraphen (S. 42 ff.) wörtlich auch hier für  $B = 1$ . Siehe aber noch Satz 29 (S. 94).

## III. (13) $A > 1 > B > 0$ .

Alles wörtlich wie bei (11) b in Abschnitt I dieses Paragraphen, S. 42 ff.

<sup>36</sup> Bolkes „Symmetrie durch zweimalige Spiegelung“ ist gleichbedeutend mit Drehung um diese S.-Achse. — Bei Lenz (S. 19) geht nur zufällig infolge spezieller Wahl von  $\Phi$  durch diese S.-Achse auch eine S.-Ebene.

<sup>37</sup> Die Komplementärflächen der Rotationsflächen vom „K- und H-Typus“ erwähnt zuerst Kuen (S. 201) und stellt ihre Koordinaten auf. Anscheinend ohne Kenntnis der Kuenschen Arbeit hat sie später Bolke sehr sorgfältig beschrieben.

IV. [23]  $A = 1 > B > 0$ .<sup>38</sup>

$\bar{\omega}_1$  wird unendlich.

Sonstige Grenzwerte:

$$\bar{\omega}_3 = \frac{i\pi}{2D'}; \quad \bar{\eta}_3 = -\frac{iD'\pi}{6}; \quad v_0 = \frac{i}{D'} \arcsin D'; \quad v_2 = \frac{1}{D'} \ln \frac{1+D'}{B}. \quad (8; 5)$$

Da hier  $\Phi$  unendlich wird, ergeben sich zweierlei Grenzgebilde, je nachdem man beim Grenzübergang von (13) her

- a) den Punkt  $u = 0; v = 0$  oder
- b) den Punkt  $u = 0; v = \bar{\omega}_1$

im Endlichen festhält.

a) Grenzübergang ergibt:

$$w = \int_0^v \frac{D' dv}{\sqrt{D'^2 + s h^2 D' v}}; \quad r(u, w) \text{ und } z(u, w) \text{ wie in Ia dieses Paragraphen, S. 42.}$$

$$r(u, v) = \frac{D' \sigma_3 u \cdot \sqrt{D'^2 + s h^2 D' v}}{B (\sigma_2 u \cosh D' v - B \sigma_1 u)};$$

$$z(u, v) = -\frac{1}{B} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} u + e_3 u \right) - \frac{\sigma}{\sigma_3} u \cdot \frac{\sigma_2 u - B \sigma_1 u \cosh D' v}{\sigma_2 u \cosh D' v - B \sigma_1 u}; \quad (8; 6)$$

$$\varphi(v) = Bv - \operatorname{arctg} \left( \frac{B}{D'} \tanh D' v \right).$$

Dies sind die Koordinaten der Komplementärfläche einer Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus (auch Hyperboloidtypus genannt); sie gehen für  $v \rightarrow \infty$  asymptotisch in die Koordinaten dieser Rotationsfläche selbst über, woraus sich alles weitere erklärt.

Im  $\mathfrak{E}_0$  verhält sich die Fläche für endliche Werte von  $v$  genau wie (13) für  $0 \leq v < \bar{\omega}_1$ ; die Kr.-Ln.  $v$  der Form 5 b aber, die bei (13) für  $\varphi = \Phi$  auftreten, stellen hier die Grenzform für  $\varphi \rightarrow \infty$  vor. Satz 20 (I g dieses Paragraphen, S. 47) gilt nur mehr in asymptotischem Sinne.

Die ebenen Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  nähern sich für  $\varphi \rightarrow \infty$  dem jeweils in ihrer Ebene liegenden Kreis  $r = \frac{D'}{B}$  asymptotisch, erstere mit abnehmendem, letztere mit wachsendem  $r$ . Von Satz 19 (I e dieses Paragraphen, S. 45) bleibt Ziffer 1 wörtlich, Ziffer 2 nur mehr in asymptotischer Deutung gültig. Siehe ferner Satz 29 (S. 94). Fig. 73.

Die räumliche R.-K. des  $\mathfrak{E}_0$  umwindet in schraubenartigen Umläufen, deren Steigung, nach Durchgang durch ein Maximum bei  $v = v' = \frac{1}{D'} \ln \frac{\sqrt{1+D'^2} + D' \sqrt{2}}{B}$ , für  $\varphi \rightarrow \infty$

<sup>38</sup> Siehe Fußnote 37 S. 48.

gegen  $o$  geht, mit wachsendem  $z$  und abnehmendem  $r$  asymptotisch den Kreis  $z = Z$ ;  $r = \frac{1}{B}$ . Ihre Abwicklung hat demnach stets einen Wendepunkt bei  $v = v'$  und hat die Gerade  $\bar{z} = Z$  zur Asymptote; ihre Projektion auf die Ebene  $z = 0$  verhält sich sinngemäß wie bei (11) b im Falle  $\beta$  (I f dieses Paragraphen, S. 47), Fig. 66.

Zwischen zwei Ebenen  $z = (4l + 1) Z$  und  $z = (4l + 3) Z$  ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ ) tritt keine räumliche R.-K. mehr auf.

Die Periodizität ist längs der Achse erhalten geblieben, um die Achse verloren gegangen. Daher existieren nur mehr folgende reellen Symmetrieelemente:

- S.-Ebenen senkrecht zur Achse  $u = 2l\omega_1$  ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ );
- eine S.-Ebene durch die Achse  $v = 0$ ;
- S.-Achsen: die Schnittlinien der Ebene  $v = 0$  mit jeder der anderen S.-Ebenen.

Demgemäß vereinfacht sich die Vorschrift für die Herstellung der ganzen Fläche aus dem  $\mathfrak{E}_6$ :

1. Man spiegle den  $\mathfrak{E}_6$  an der Ebene  $v = 0$ ;
2. man spiegle das Ergebnis von 1 an der Ebene  $u = 0$ ;
3. man nehme zu dem ganzen jetzt vorhandenen Bereich alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Translation ohne Drehung längs der Achse vom Betrage  $4lZ$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) entstehen.

b) Setzt man  $v - \bar{\omega}_1 = v^*$ ,  $w - \omega_1 = w^*$ ,  $\varphi - \Phi = \varphi^*$ , behält  $u, r, z$  bei, führt den Grenzübergang analog wie in § 7 I b durch und läßt dann die Sterne wieder weg, so erhält man:

$$w = 0; \quad r = \frac{D'}{B} \frac{\sigma_3}{\sigma_2} u; \quad z = -\frac{1}{B} \left( \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u + e_3 u \right); \quad \varphi = Bv, \quad (8; 7)$$

also die Koordinaten der Rotationsfläche  $(1, B)$  vom hyperbolischen Typus mit Meridianen  $v$  der Form 5 b und Parallelkreisen  $u$ . Die Rückkehrparallelkreise  $z = (2l + 1) Z$  ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ ) sind Grenzgebilde der einzelnen Zweige der räumlichen R.-K.

Künftig soll die Rotationsfläche mit  $[23]'$ , ihre Komplementärfläche mit  $[23]''$  bezeichnet werden.

$$\text{V. (33)} \quad 1 > A > B > 0.^{39}$$

- |                                                                                                                                                                                               |   |                                     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>a) Koordinaten,</li> <li>b) Gestalt der Kr.-Ln. <math>w</math> des <math>\mathfrak{E}_w</math>,</li> <li>c) Abhängigkeit von <math>w</math></li> </ul> | } | wie bei (11) b (§ 8, I, S. 42 ff.). |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|-------------------------------------|

<sup>39</sup> Diese Flächen sind unter der erweiterten Kuen-Sievertschen Realitätsbedingung begriffen; ihre charakteristischen Abweichungen von den übrigen Flächen b werden jedoch nirgends erwähnt. Das nämliche gilt für {33}.

d) Der reelle Elementarbereich  $\mathfrak{E}_0$ .

Dieser enthält die Form 5 b der Kr.-Ln.  $w$  überhaupt nicht mehr. Je nachdem  $A^2 + B^2 \geq 1$  ist, wird  $w(\bar{\omega}_1) \geq w_2$ , gehört also die Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_1$  zur Formklasse  $\frac{4b}{3b}$ , nähert sich aber für  $A \rightarrow 1$  immer mehr der Form 5 b. Nur die  $w \leq w(\bar{\omega}_1)$  entsprechenden Kr.-Ln.  $w$  gehören dem  $\mathfrak{E}_0$  an.

Im einzelnen ergeben sich für  $v = \bar{\omega}_1$  folgende Werte:

| $u$                               | $r$                               | $z$       | $\gamma'$       | $\rho'$                                                          |
|-----------------------------------|-----------------------------------|-----------|-----------------|------------------------------------------------------------------|
| 0                                 | $\frac{AD' + BC'}{AB}$            | 0         | 0               | $\frac{BD' - AC'}{A^2 - B^2} = \frac{A^2 + B^2 - 1}{AC' + BD'}$  |
| $u_m$                             | $\frac{\sqrt{1 - C'^2 D'^2}}{AB}$ | $z_m < Z$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{-C'D'}{\sqrt{1 - C'^2 D'^2}}$                             |
| $2\omega_1$                       | $\frac{AD' - BC'}{AB}$            | $2Z$      | $\pi$           | $\frac{-BD' - AC'}{A^2 - B^2} = \frac{A^2 + B^2 - 1}{AC' - BD'}$ |
| Dazu nur für $A^2 + B^2 \geq 1$ : |                                   |           |                 |                                                                  |
| $u_s$                             | $\frac{1}{AB}$                    | $z_s < Z$ | spitz           | 0                                                                |

Ein zweiter entscheidender Unterschied gegenüber (11) b liegt darin, daß an Stelle der dortigen Symmetrieachse durch den Punkt  $u = \omega_1, v = \bar{\omega}_1$  hier eine S.-Ebene  $v = \bar{\omega}_1$  tritt. Die Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_1$  ist daher geodätische Linie und wird von den Kr.-Ln.  $u$ , den Kurven  $u = u_m(v)$  und  $u = u_s(v)$  senkrecht geschnitten.

Im übrigen gilt das in I d dieses Paragraphen Gesagte mit Ausnahme des ersten Satzes.

e) Die ebenen Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$ . Fig. 74 und 75.

Ie dieses Paragraphen (S. 45) bleibt gültig mit folgenden Änderungen:

Von Satz 19 gilt nur mehr Ziffer 1, nicht mehr Ziffer 2.

In den Tabellen, welche den Verlauf beschreiben, ist, falls  $A^2 + B^2 > 1$ , die jeweils letzte Zeile zu ersetzen durch folgende:

|                  | $v$              | $r$                    | $\varphi$ | Winkel<br>zwischen<br>Kurve<br>und $r$ | $\rho''$                                                        | Besonderheit    |
|------------------|------------------|------------------------|-----------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------------|-----------------|
| $u = 0$          | $\bar{\omega}_1$ | $\frac{AD' + BC'}{AB}$ | $\Phi$    | $\frac{\pi}{2}$                        | $\frac{A^2 - B^2}{AC' - BD'} = \frac{AC' + BD'}{1 - A^2 - B^2}$ | Minimum von $r$ |
| $u = 2 \omega_1$ | $\bar{\omega}_1$ | $\frac{AD' - BC'}{AB}$ | $\Phi$    | $\frac{\pi}{2}$                        | $\frac{A^2 - B^2}{AC' + BD'} = \frac{AC' - BD'}{1 - A^2 - B^2}$ | Maximum von $r$ |

Ist aber  $A^2 + B^2 \leq 1$ , so ist schon die jeweils auf  $v_2$  bezügliche Zeile durch vorstehende zu ersetzen, alles Nachfolgende wegzulassen. In diesem Fall hat die Kr.-L.  $u = 0$  keinen Wendepunkt mehr; außerdem ist  $\Phi < \frac{\pi}{2}$  (Satz 16, 5, S. 33).

f) Die räumliche R.-K. im  $\mathfrak{E}_0$ . Fig. 67.

Ist  $A^2 + B^2 \leq 1$ , so existiert überhaupt keine räumliche R.-K. mehr.

Ist  $A^2 + B^2 > 1$ , so gilt im  $\mathfrak{E}_0$  für deren Abwicklung und Projektion auf die Ebene  $z = 0$  das in If dieses Paragraphen (S. 47) für den Fall  $\beta$  Angegebene mit Ausnahme der letzten Zeile in der Darstellung des Verlaufs der Abwicklung. An deren Stelle tritt hier folgende:

| $v$              | $\bar{y}$                 | $\bar{z}$                     | $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}}$ | der $\bar{y}$ -Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit          |
|------------------|---------------------------|-------------------------------|-----------------------------|------------------------------------------|-----------------------|
| $\bar{\omega}_1$ | $\bar{y}(\bar{\omega}_1)$ | $\bar{z}(\bar{\omega}_1) < Z$ | 0                           |                                          | Maximum von $\bar{z}$ |

Bei Fortsetzung der Abwicklung über den  $\mathfrak{E}_0$  hinaus für  $-\omega_1 < u < \omega_1$  und  $v_2 \leq v \leq 2\bar{\omega}_1 - v_2$  entsteht eine geschlossene Kurve mit den S.-Achsen  $\bar{z} = 0$  und  $\bar{y} = \bar{y}(\bar{\omega}_1)$ .

g) Beziehung zwischen den reellen Elementarbereichen  $\mathfrak{E}_0$  und  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$  zweier Flächen  $f(A, B)$  und  $\tilde{f}(qA, qB)$  vom Typus (33).

Nimmt man wieder  $q > 1$  an, so ergibt die nämliche Abbildungs- und Schlußweise wie in § 6, I g, S. 37:

Dem Wert  $v = \bar{\omega}_1$  entspricht ein reeller Wert  $\tilde{v}(\bar{\omega}_1) = \tilde{v}(\bar{\omega}_1) < \bar{\omega}_1$ . Demnach entspricht jeder Kr.-L.  $v$  von  $\mathfrak{E}_0$  eine und nur eine solche von  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ , aber nicht umgekehrt. Den Kr.-Ln.  $\tilde{v}$  von  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ , für welche  $\tilde{v}(\bar{\omega}_1) < \tilde{v} \leq \bar{\omega}_1$  ist, entsprechen Kr.-Ln. von  $f$ , die zwar noch dem  $\mathfrak{E}_0$ , aber nicht mehr dem  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$  angehören. Das besagt:

**Satz 21:** Innerhalb der Flächenschar  $\frac{A}{B} = \text{const. vom Typus (33)}$  wird, wenn  $A$  und  $B$  abnehmen, der Formenreichtum der Kr.-Ln.  $v$  des  $\mathfrak{E}_0$  geringer. Der Abbau erfolgt von der Seite  $v = \bar{\omega}_1$  her.

$B \rightarrow 0$  bei endlichem  $\tilde{B} = qB$  ergibt:  $q \rightarrow \infty$ ;  $\tilde{v}(\bar{\omega}_1) \rightarrow 0$ ; das heißt: bei vorgegebenem Wert von  $\frac{A}{B}$  kann man durch hinreichend kleine Wahl von  $A$  und  $B$  erreichen, daß  $f(A, B)$  nur mehr solche Kr.-Ln.  $v$  reell enthält, die sich von der Elastika der Form 1b beliebig wenig unterscheiden. Wegen  $A = B = 0$  vgl. § 11, Schluß (S. 61).

Im Einklang mit Satz 21 gilt:  $\tilde{\Phi}(qA, qB) > \Phi(A, B)$ , wenn  $q > 1$ , trotzdem nach Satz 8 (S. 19) die Ebenen zweier Kr.-Ln.  $v$  aus  $\mathfrak{E}_0$  einen größeren Winkel miteinander einschließen als die Ebenen der entsprechenden Kr.-Ln.  $\tilde{v}$  von  $\tilde{\mathfrak{E}}_0$ .

h) Die ganze Fläche (33).

Von den Symmetrieelementen des § 3, II treten bei (33) folgende reell auf ( $\pm l, \pm l' = 0, 1, 2 \dots$  unabhängig voneinander) (Fig. 78):

S.-Ebenen senkrecht zur Achse:  $u = 2l\omega_1$ ,

S.-Ebenen durch die Achse:  $v = l\bar{\omega}_1$ ,

S.-Achsen: die Lote auf die Achse in den Ebenen  $v = l\bar{\omega}_1$  durch die Punkte  $u = 2l'\omega_1$ .

Demnach läßt sich die ganze Fläche aus dem  $\mathfrak{E}_6$  folgendermaßen herleiten:

1. Man spiegle den  $\mathfrak{E}_6$  an der Ebene  $v = \bar{\omega}_1$ ;
2. man nehme zu dem so entstandenen Bereich alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Drehung um die Achse vom Betrage  $2l\Phi$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) entstehen;
3. man spiegle das Ergebnis von 2 an der Ebene  $u = 0$ ;
4. man nehme zu dem ganzen jetzt vorhandenen Bereich alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Translation ohne Drehung längs der Flächenachse vom Betrage  $4lZ$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) entstehen.

## § 9. DIE FÄLLE $\{11\}b$ , $\{22\}b$ UND $\{33\}$ .

### I. $\{11\}b$ $A = B > 1$ .<sup>40</sup>

Grenzwerte der Konstanten und Einteilung der Grenzgebilde wie bei  $\{11\}a$  (§ 7, I, S. 39).

a) „Hauptfläche“  $\{11\}b$  (Abkürzung:  $H_b$ ).

Grenzübergang ergibt:

$$w(v) = \frac{1}{A} \ln \frac{A s h C v + \sqrt{C^2 + A^2 s h^2 C v}}{C}; \quad \varphi(v) = v - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{C} \tanh C v \right);$$

$$r(u, w) = \frac{2 c h A u c h A w}{A (c h^2 A u + s h^2 A w)}; \quad z(u, w) = u - \frac{s h (2 A u)}{A (c h^2 A u + s h^2 A w)}; \quad (9; 1)$$

$$r(u, v) = \frac{2 C c h A u \sqrt{A^2 c h^2 C v - 1}}{A (C^2 c h^2 A u + A^2 s h^2 C v)}; \quad z(u, v) = u - \frac{C^2 s h (2 A u)}{A (C^2 c h^2 A u + A^2 s h^2 C v)}.$$

I b bis I g von § 8 bleiben sinngemäß gültig, wenn man dort  $\omega_1$ ,  $\bar{\omega}_1$ ,  $Z$  und  $\Phi$  durch  $\infty$  ersetzt und für  $u = \infty$  und jedes  $v$  bzw.  $w$ :  $r = 0$ ;  $\rho' = -\infty$  setzt. Fig. 14-18.

$H_b$  steht zu  $\{11\}b$  in analoger Beziehung wie  $H_a$  zu  $\{11\}a$ .

Für endliches  $u$  und  $v$  verhält sich  $H_b$  im  $\mathfrak{E}_6$  wie  $\{11\}b$  für  $0 \leq u < \omega_1$  und  $0 \leq v < \bar{\omega}_1$ .

$u \rightarrow \infty$  bei endlichem  $v$  führt auf  $r \rightarrow 0$ ;  $z \rightarrow +\infty$ ;  $\gamma' \rightarrow \pi$ ;  $\rho' \rightarrow -\infty$ . Wie bei  $\{11\}a$  ist die Flächenachse Asymptote der Kr.-Ln.  $v$ . Die ebene Kr.-L.  $u = 2\omega_1$  von  $\{11\}b$  ist in den Punkt  $z = +\infty$ ;  $r = 0$  übergegangen.

<sup>40</sup> Siehe Fußnote 34 S. 39.



Für  $v \rightarrow +\infty$  und endliches  $u$  umwindet auch hier die Fläche die Achse asymptotisch; entsprechend verläuft die Kr.-L.  $u = 0$ . Fig. 72.

Desgleichen nimmt die Fläche in der Umgebung der räumlichen R.-K. für  $v \rightarrow +\infty$  immer mehr den Charakter einer M.-D.-Schraubenfläche an.

Die räumliche R.-K. verläuft analog wie bei (11) b für  $A^2 - B^2 < 1$  (§ 8 I f  $\beta$ ). Ihre Abwicklung hat bei  $v = v' = \frac{1}{C} \ln (C\sqrt{2} + \sqrt{2C^2 + 1})$  einen Wendepunkt und weiterhin eine Asymptote, die mit der  $+\bar{x}$ -Achse den Winkel  $\frac{\pi}{2} - \arctg C$  einschließt. Fig. 69. Ihre Projektion auf die Ebene  $z = 0$  nähert sich für  $v \rightarrow +\infty$  dem Kreis  $r = \frac{1}{A}$  von außen asymptotisch.

Symmetrieelemente:

die S.-Ebenen  $u = 0$  und  $v = 0$ ,  
die Schnittlinie dieser beiden Ebenen als S.-Achse.

Herleitung der ganzen Hauptfläche aus dem  $\mathfrak{E}_6$ :

1. Man spiegle den  $\mathfrak{E}_6$  an der Ebene  $v = 0$ ;
2. man spiegle dann an der Ebene  $u = 0$ .

b) Ganz analog wie bei {11} a erhält man hier eine Schraubenfläche, und zwar bei gleichem Wert von  $A$  die nämliche wie dort.

c) Achse als Grenzgebilde wie bei {11} a.

|             |                   |       |                  |                   |
|-------------|-------------------|-------|------------------|-------------------|
| $2\omega_1$ |                   |       |                  | $H_b$             |
| $\omega_1$  | L                 |       | R                |                   |
| 0           |                   | $H_b$ |                  |                   |
| $-\omega_1$ | R                 |       | L                |                   |
| $u$<br>$v$  | $-\bar{\omega}_1$ | 0     | $\bar{\omega}_1$ | $2\bar{\omega}_1$ |

An Stelle der Übersicht am Schluß des § 7, I (S. 41) tritt hier die obenstehende. Ein Analogon zu  $H'_a$  fehlt hier aus Symmetriegründen.

## II. {22} b $A = B = 1$ .<sup>41</sup>

Grenzwerte der Konstanten wie bei {22} a; dazu:  $v_2 = 1$ ;  $v' = \sqrt{2}$ .

Wie bei {11} b sind drei verschiedene Grenzgebilde möglich.

<sup>41</sup> Vgl. Bianchi, Dissertation. Modell von Kuen in der Brillischen Sammlung.

a) An Stelle der „Hauptfläche“ tritt hier die Bianchische Komplementärfläche der Pseudosphäre mit  $w = \ln(v + \sqrt{1+v^2})$  und den Koordinaten:

$$\begin{aligned} r(u, w) &= \frac{2chuc h w}{ch^2u + sh^2w}; \quad z(u, w) = u - \frac{sh2u}{ch^2u + sh^2w}; \\ r(u, v) &= \frac{2chu \sqrt{1+v^2}}{ch^2u + v^2}; \quad z(u, v) = u - \frac{sh2u}{ch^2u + v^2}; \quad \varphi = v - \operatorname{arctg} v. \end{aligned} \quad (9; 2)$$

Sie verhält sich im Endlichen wie  $H_b$ . Aber die Abwicklung der R.-K. hat hier keine Asymptote, sondern stellt sich parabelartig immer mehr senkrecht zur  $\bar{z}$ -Achse (aus  $\bar{y} \rightarrow \infty$ ,  $\bar{z} \rightarrow \infty$  folgt hier  $\frac{d\bar{z}}{d\bar{y}} \rightarrow 0$ ). Fig. 70.

Die Kr.-L.  $u = 0$  läßt sich in diesem speziellen Fall dadurch erzeugen, daß man die Evolvente eines Kreises vom Radius 2 an diesem Kreise spiegelt.<sup>42</sup> Fig. 72.

b) Als Grenzfall einer M.-D.-Schraubenfläche mit der Ganghöhe 0 ergibt sich die Pseudosphäre.

c) Achse wie früher.

Künftig soll stets unter {22} a die Pseudosphäre, unter {22} b ihre Komplementärfläche verstanden werden.

### III. {33} $1 > A = B > 0$ .<sup>43</sup>

$\omega_1, \eta_1, Z, \bar{\omega}_3, \bar{\eta}_3$  werden unendlich.

Weitere Grenzwerte:

$$\begin{aligned} \omega_3 &= \frac{i\pi}{2A}; \quad \eta_3 = -\frac{A\pi i}{6}; \quad \bar{\omega}_1 = \frac{\pi}{2C'}; \quad \bar{\eta}_1 = \frac{C'\pi}{6}; \\ v_0 &= \frac{i}{C'} \ln \frac{1+C'}{A}; \quad w_2 = \frac{1}{A} \ln(1+\sqrt{2}); \quad w(\bar{\omega}_1) = \frac{1}{A} \ln \frac{1+A}{C'}. \end{aligned} \quad (9; 3)$$

Je nachdem  $A \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ , ist  $w_2 \leq w(\bar{\omega}_1)$ .

Das Knickintervall  $[0 \dots \bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_2]$  geht von 0 geradlinig bis  $\bar{\omega}_1$  und von da parallel zur Achse des positiv Imaginären bis  $\infty$ .

$$w = \frac{1}{A} \ln \frac{A \sin C'v + \sqrt{C'^2 + A^2 \sin^2 C'v}}{C'}.$$

Für  $v = \bar{\omega}_1 \dots \bar{\omega}_1 + i\infty$  ist hier  $\sin C'v = ch \frac{v - \bar{\omega}_1}{i}$  zu setzen.

<sup>42</sup> Sie ist also eine „tractrix complicata“ (Loria S. 573). Vgl. aber Satz 30 (S. 94).

<sup>43</sup> Siehe die Fußnoten 34 S. 39 und 39 S. 50.

Da hier  $\Phi = \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{C'} - 1 \right)$  und  $z_s(\bar{\omega}_1)$  — letzteres, soweit reell vorhanden — endlich bleiben, treten keine reellen Schraubenflächen mehr auf und ergeben sich beim Grenzübergang aus dem  $\mathfrak{E}_v$  von (33) her nur zweierlei mögliche Gebilde:

a) Beim Festhalten des Punktes  $u = 0$ ,  $v = 0$  die „Hauptfläche“, für welche künftig die Bezeichnung  $\{33\}$  ausschließlich verwendet werden soll.

b) Beim Festhalten eines Punktes  $u = \omega_1$  oder  $u = 2\omega_1$  bei beliebigem  $v$  die Achse.

Im ersteren Fall ergibt der Grenzübergang:

$r(u, w)$  und  $z(u, w)$  wie bei  $\{11\}$  b (I a dieses Paragraphen, S. 53).

$$r(u, v) = \frac{2C'chAu\sqrt{1-A^2\cos^2C'v}}{A(C'^2ch^2Au + A^2\sin^2C'v)}; \quad z(u, v) = u - \frac{C'^2sh(2Au)}{A(C'^2ch^2Au + A^2\sin^2C'v)};$$

$$\varphi(v) = v - \operatorname{arctg} \left( \frac{1}{C'} \operatorname{tg} C'v \right). \quad (9; 4)$$

Fig. 14–18, 74 und 75, jedoch bei den letzteren nur die jeweils äußere Kurve.

§ 8, V b bis V g bleibt sinngemäß gültig, wenn man dort  $\omega_1$  und  $Z$  durch  $\infty$  ersetzt und für  $u = +\infty$  und jedes  $v$ :  $r = 0$ ;  $\varphi' = -\infty$  setzt. Genau wie bei  $\{11\}$  b erscheint der  $\mathfrak{E}_v$  längs der Achse ins Unendliche gestreckt; aber im Gegensatz zu dort ist die Periodizität um die Achse hier wie bei (33) im Gegensatz zu (11) b erhalten.

Symmetrieelemente ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ ):

S.-Ebene senkrecht zur Achse  $u = 0$ ,

S.-Ebenen durch die Achse  $v = l\bar{\omega}_1$ ,

S.-Achsen: die Lote auf die Achse in den Ebenen  $v = l\bar{\omega}_1$  durch den Punkt  $u = 0$ .

Herstellung der ganzen Fläche  $\{33\}$  aus dem  $\mathfrak{E}_v$  wie bei (33) (§ 8, V h), Ziffer 1 mit 3. Die dortige Ziffer 4 fällt weg.

Hält man ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ ) beim Übergang von (33) her einen Punkt  $u = 4l\omega_1$  mit beliebigem  $v$  fest, so entsteht  $\{33\}$ .

Hält man aber einen Punkt  $u = (4l + 1)\omega_1$  oder  $(4l + 2)\omega_1$  mit beliebigem  $v$  fest, so ergibt sich die Achse.

#### § 10. BEZIEHUNGEN ZWISCHEN DEN FLÄCHEN VOM TYPUS $a$ UND VOM TYPUS $b$ MIT GLEICHEN KONSTANTEN $A$ UND $B$ .

Die Ergebnisse dieses Paragraphen werden nur für die nicht entarteten Flächen (11) a und (11) b ausgesprochen, gelten aber sinngemäß auch für  $H_a$  und  $H_b$ , [12] a und [12] b,  $\{22\}$  a und  $\{22\}$  b.

I. (11) a und (11) b stellen im Sinn des § 4 nur verschiedene reelle Bereiche der nämlichen allgemeinen Fläche dar, welche die Koordinaten hat:

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \frac{(A^2 - B^2) \sigma u \bar{\sigma}(v - v_0)}{AB \bar{\sigma} v_0 (\sigma_2 u \bar{\sigma}_1 v - \sigma_1 u \bar{\sigma}_2 v)} \cdot e^{\frac{1}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}}; \\ z(u, v) &= \frac{1}{AB} \left( -\frac{\sigma'}{\sigma} u - e_3 u + \frac{\sigma_3}{\sigma} u \cdot \frac{\sigma_1 u \bar{\sigma}_1 v - \sigma_2 u \bar{\sigma}_2 v}{\sigma_2 u \bar{\sigma}_1 v - \sigma_1 u \bar{\sigma}_2 v} + c_z \right); \quad (10; 1) \\ \varphi(v) &= i v \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \frac{i}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)} + c_\varphi. \end{aligned}$$

Die spezielleren Ausdrücke, welche hieraus entstehen, wenn man  $c_z$  und  $c_\varphi$  wie bei (11) a oder bei (11) b wählt, sollen mit  $\bar{z}_a, \bar{\varphi}_a$  bzw.  $\bar{z}_b, \bar{\varphi}_b$  bezeichnet werden.

Für  $u$  und  $v$  sind dabei alle komplexen Werte zugelassen, der  $\ln$  ist zunächst auf keinen bestimmten Zweig beschränkt. Durch geeignete Zerschneidung der komplexen  $v$ -Ebene läßt sich aber erreichen, daß derselbe nur solche Werte annimmt, welche mit den Festsetzungen des § 5 in Einklang sind. Man kann z. B. zu diesem Zweck Sperrstrahlen durch die Punkte  $2l\bar{\omega}_3 \pm v_0$  parallel zur Achse des Negativ-Reellen und durch die Punkte  $2l\bar{\omega}_3 + 2\bar{\omega}_1 \pm v_0$  parallel zur Achse des Positiv-Reellen legen ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ ). Dann stellen die Gleichungen:

$$\bar{z}_b = \bar{z}_a - \frac{1}{AB} (\eta_3 + e_3 \omega_3); \quad \bar{\varphi}_b = \bar{\varphi}_a - i \left( \eta_3 v_0 - \bar{\omega}_3 \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 \right) - \frac{\pi}{2}; \quad \bar{r}_b = \bar{r}_a \quad (10; 2)$$

die in § 4 erwähnte Schraubung dar, welchen den reellen Bereich (11) a aus dem reellen Raumgebiet entfernt und dafür (11) b in dieses verlegt.

II. Aber auch im Rahmen des Reellen bestehen bemerkenswerte Beziehungen zwischen den Elementarbereichen beider Flächen. Entsprechende Größen sollen den Index  $a$  oder  $b$  erhalten, je nachdem sie zum  $\mathfrak{E}_a$  bzw.  $\mathfrak{E}_b$  von (11) a oder von (11) b gehören.<sup>44</sup>

a) Ist  $v_a = v_b$ , so folgt zunächst:

$$V'_a V'_b = CD; \quad \frac{(Y_1)_a}{(Y_2)_b} = \frac{iV'_a}{D} = \frac{iC}{V'_b}; \quad \frac{(Y_2)_a}{(Y_1)_b} = \frac{iV'_a}{C} = \frac{iD}{V'_b}, \quad (10; 3)$$

und daraus u. a.

$$\text{Satz 22, 1: Wenn } v_a = v_b, \text{ dann: } \varphi_a - \varphi_b = \arctg \left( \frac{ABV'}{V''} \right)_a = \arctg \left( \frac{ABV'}{-V''} \right)_b.$$

$$\text{Insbesondere: } \varphi_a(\bar{\omega}_1) - \varphi_b(\bar{\omega}_1) = \frac{\pi}{2}.$$

b) Mittels  $u_a = u_b$  und  $w_a = w_b$  werden  $(\mathfrak{E}_w)_a$  und  $(\mathfrak{E}_w)_b$  eineindeutig aufeinander abgebildet. Für diese Abbildung gelten die Beziehungen:

<sup>44</sup> Im Gegensatz zu Abschnitt I bedeuten hier  $z$  und  $\varphi$  wieder die reellen Koordinaten wie in § 6 bzw. § 8.

$$\begin{aligned}
 U'_a U'_b &= AB; \quad \frac{(X_1)_a}{(X_2)_b} = \frac{iU'_a}{B} = \frac{iA}{U'_b}; \quad \frac{(X_2)_a}{(X_1)_b} = \frac{iU'_a}{A} = \frac{iB}{U'_b}; \\
 W_a W_b &= AB; \quad \frac{(Y_1)_a}{(Y_2)_b} = \frac{-iW_a}{B} = \frac{-iA}{W_b}; \quad \frac{(Y_2)_a}{(Y_1)_b} = \frac{-iW_a}{A} = \frac{-iB}{W_b}.
 \end{aligned} \quad (10; 4)$$

Daraus u. a.

Satz 22, 2: Wenn  $u_a = u_b$  und  $w_a = w_b$ , dann:

$$z_a = z_b; \quad \frac{r_a}{r_b} = \left( \frac{W}{U'} \right)_a = \left( \frac{U'}{W} \right)_b; \quad |R''_a R''_b| = \frac{1}{AB}.$$

Ferner:

$$\begin{aligned}
 \frac{ch(U+V)_a}{ch(U+V)_b} &= \frac{(U'W)_a}{AB} = \frac{AB}{(U'W)_b}; \quad sh(U+V)_a = \left( \frac{S}{U'W} \right)_b; \\
 sh(U+V)_b &= \left( \frac{S}{U'W} \right)_a.
 \end{aligned} \quad (10; 5)$$

c) Aus den beiden letzten Gleichungen ersieht man, daß bei dieser Abbildung der Kurve  $U+V=0$  der einen Fläche die Kurve  $S=0$  der anderen entspricht. Daraus schließt man:

Satz 22, 3: Wenn  $w_a = w_b$ , dann:

$$(u_s)_a = (u_m)_b; \quad (u_m)_a = (u_s)_b; \quad (z_s)_a = (z_m)_b; \quad (z_m)_a = (z_s)_b. \quad \text{Fig. 80.}$$

Solche leicht zu vermehrenden Beziehungen gestatten, nach Auswertung der elliptischen Funktionen für die eine Fläche die analogen Werte für die andere durch einfachere Rechnung zu finden.

III. Eine weitere Verminderung des Rechenballastes ermöglicht Satz 6 (S. 18). Die Gleichungen (3; 1) lauten, auf reelle Verhältnisse spezialisiert:

$$\begin{aligned}
 \left[ r(u, w) \pm \frac{1}{W} \sin \gamma' \right]_a &= \pm r_b(u \mp w, 0); \\
 \left[ z(u, w) \pm \frac{1}{W} \cos \gamma' \right]_a &= z_b(u \mp w, 0) \mp \frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} w + e_3 w \right); \\
 \left[ r(u, w) \pm \frac{1}{W} \sin \gamma' \right]_b &= r_b(u \mp w, 0); \\
 \left[ z(u, w) \pm \frac{1}{W} \cos \gamma' \right]_b &= z_b(u \mp w, 0) \mp \frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} w + e_3 w \right).
 \end{aligned} \quad (10; 6)$$

Sie ermöglichen, wenn ein Exemplar **E** der elastischen Kurve  $v=0$  von (11)b gezeichnet vorliegt, nach zulässiger Wahl von  $V'$  die Kr.-L.  $w = w(V')$  von (11)a oder (11)b fast ohne Rechnung mechanisch herzustellen, und zwar folgendermaßen:

Als „Normallage“ einer Kr.-L.  $w$  zu einem kartesischen Rechtssystem  $(z, r)$  möge die Lage bezeichnet werden, in dem sich die betreffende Kr.-L. bei Diskussion der zugehörigen Fläche zu dem  $z, r$ -System ihrer eigenen Ebene befand.

1. Nach Wahl eines solchen  $z, r$ -Systems in der Zeichenebene denkt man sich zu diesem die gesuchte Kr.-L. in die Normallage gebracht. Dann läßt sich durch einfachste Rechnung der Punkt  $P'$  bestimmen, zu dem man gelangt, wenn man vom Punkt  $u = 0$  dieser Kr.-L. aus die Strecke  $\frac{1}{W}$  in der positiven Richtung der zugehörigen Tangente abträgt.

2. Nunmehr bringt man die Kurve  $E$  in die Normallage zu dem nämlichen  $r, z$ -System und verschiebt sie dann parallel zur  $z$ -Achse so weit, daß ein Punkt von  $E$ , für den  $0 \geq u \geq -\omega_1$  ist, auf  $P'$  fällt. Dies ist eindeutig möglich.  $E$  in der neuen Lage heiße  $E'$ .

3. Je nachdem eine Kr.-L. von (11) a oder (11) b herzustellen ist, hat man jetzt die Figur derart zu ergänzen, daß der Punkt  $r = 0, z = 0$  Symmetriezentrum oder die Gerade  $z = 0$  der Zeichenebene Symmetrieachse wird. Dadurch entsteht eine zu  $E'$  in dem einen oder anderen Sinn symmetrisch liegende Kurve  $E''$ , auf welcher der zu  $P'$  symmetrische Punkt  $P''$  liegt.

4. Bewegt man nun die Strecke  $P'P''$  derart, daß  $P'$  die Kurve  $E'$  und  $P''$  die Kurve  $E''$  durchläuft, so beschreibt ihr Mittelpunkt die Kr.-L.  $w = w(V')$ .<sup>45</sup> Fig. 82.

Umgekehrt läßt sich, wenn irgendeine Kr.-L.  $w = w(V')$  von (11) a oder (11) b gezeichnet vorliegt, die Kurve  $E'$  als deren „Äquitangentialkurve“ mechanisch herstellen. Besonders geeignet erscheinen hierfür die Formen 5a oder 5b. Man erhält in diesem Falle  $E'$  um  $Z$  gegen die Normallage von  $E$  verschoben.

Sinngemäßes gilt für die Kr.-Ln. von {11} a und {11} b. Zur Herstellung der Traktrix ist als Kurve  $E'$  die Kr.-L.  $v = 0$  von {11} b in der Normallage verwendbar. An Stelle von  $E''$  tritt dann die  $z$ -Achse.

## § 11. DIE FÄLLE [14], {24} UND [34].

[14]  $A > 1$ ; {24}  $A = 1$ ; [34]  $1 > A > 0$ ; dazu  $B = 0$ .

{24} werde zunächst ausgeschlossen. Dann entarten nur die Funktionen von  $u$ . Für  $B \rightarrow 0$  gehen  $r$  und  $\omega_3$  gegen  $\infty$ ,  $Z$ ,  $\varphi$  und  $\Phi$  gegen 0. Sonstige Grenzwerte:

$$\omega_1 = w_2 = \frac{\pi}{2A}; \quad \eta_1 = \frac{A\pi}{6}; \quad v_0 = \bar{\omega}_3; \quad rB = 1; \quad \frac{\varphi}{B} = -\frac{1}{A} \left( \frac{\bar{\sigma}_3'}{\sigma_3} v + \bar{\varepsilon}_3 v \right). \quad (11; 1)$$

Wegen  $r \rightarrow \infty$  machen wir vor dem Grenzübergang von (13) bzw. (33) her das Krümmungszentrum der Kr.-L.  $v = 0$  im Punkte  $u = 0$  zum Ursprung eines neuen, aus dem bisherigen durch Translation hervorgehenden Koordinatensystems  $x^*, y^*, z^*$ , haben also im Grenzfall zu setzen:

$$x^* = \lim_{B \rightarrow 0} [x - r(0, 0) - \rho'(0, 0)]; \quad y^* = \lim_{B \rightarrow 0} y; \quad z^* = \lim_{B \rightarrow 0} z.$$

<sup>45</sup> Weitere Hilfen gibt der Satz bei Loria S. 567. Aus ihm folgt, wenn man die gesuchte Kr.-L. ad hoc mit  $\Gamma$  bezeichnet, u. a.: Eine Wendetangente von  $\Gamma$  berührt  $E'$  und  $E''$ ; eine Spitzentangente von  $\Gamma$  steht auf  $E'$  und  $E''$  senkrecht.

Läßt man nach dem Grenzübergang die Sterne wieder weg, so erhält man:

$$x = \frac{1}{A} \frac{\bar{\sigma}_\mu}{\sigma_3} v \cdot \cos A u; \quad z = -\frac{1}{A} \frac{\bar{\sigma}_\mu}{\sigma_3} v \cdot \sin A u; \quad y = -\frac{1}{A} \left( \frac{\bar{\sigma}_3'}{\sigma_3} v + \bar{\varepsilon}_3 v \right). \quad (11; 2)$$

Dabei ist zu setzen:  $\mu = 1$ , wenn  $A > 1$ ;

$\mu = 2$ , wenn  $A < 1$ .

Ersetzt man in (11; 2)  $v$  durch  $v - \bar{\omega}_1$  und schreibt dann

$$\begin{aligned} &\text{anstatt } x, y, z, \sqrt{x^2 + y^2}, u, v, A u, \\ &\text{bezüglich } x, z, -y, r, v, u, \varphi, \end{aligned}$$

ferner, wenn  $A < 1$  ist,  $B$  statt  $A$ , so werden die Gleichungen (11; 2) mit den unter [12] a bzw. [23]' für die Rotationsflächen gefundenen identisch.

Im Grenzfall {24} ergibt sich endlich  $\bar{\omega}_1 \rightarrow \infty$ ;  $\bar{\omega}_3 \rightarrow \frac{i\pi}{2}$ , also beim Grenzübergang von [23]' her die  $y$ -Achse, dagegen beim Übergang von [23]'' her in sinngemäßer Übereinstimmung mit {22} a:

$$x = \frac{\cos u}{c h v}; \quad z = -\frac{\sin u}{c h v}; \quad y = v - \tanh v. \quad (11; 3)$$

Es stellt also dar (Fig. 1-3):

[14] die Rotationsflächen vom elliptischen Typus,

{24} die Pseudosphäre,

[34] die Rotationsflächen vom hyperbolischen Typus,

aber so, daß die nämlichen Grenzgebilde aus ganz anderen Ausgangsgebilden der nicht-entarteten Fläche hervorgegangen sind als früher, wie folgende Übersicht zeigt:

| Grenzgebilde<br>der Rotationsfläche | Ausgangsgebilde |                 |
|-------------------------------------|-----------------|-----------------|
|                                     | früher          | jetzt           |
| Meridian                            | Kr.-L. $v$      | Kr.-L. $u$      |
| Parallelkreis                       | Kr.-L. $u$      | Kr.-L. $v$      |
| Rückkehrparallelkreis               | räumliche R.-K. | ebene R.-K.     |
| konischer Punkt                     | konischer Punkt | räumliche R.-K. |

Sinngemäß gültig bleiben die Sätze 6 (S. 18) und 7 (S. 19), ebenso 20 (S. 47) für  $A > 1$  und 21 (S. 52) für  $A < 1$ . An Stelle des Satzes 8 (S. 19) tritt folgender:

**Satz 23, 1:** Ist  $q > 1$ , so haben die Ebenen zweier Parallelkreise von  $\mathfrak{f}(A, 0)$  einen größeren Abstand voneinander als die Ebenen der ihnen im Sinn des Satzes 7 entsprechenden Parallelkreise von  $\mathfrak{f}(qA, 0)$ .



An Stelle der Sätze 16 über  $\Phi$  tritt hier

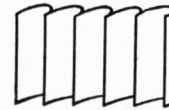
**Satz 23, 2:** Wenn  $A$  wächst, so nimmt  $y(\bar{\omega}_1)$  für  $A > 1$  ab und für  $A < 1$  zu.

Aus dem Verhalten der Kr.-Ln.  $w$  mit Schleife beim Grenzübergang zu  $B = 0$  schließt man, daß sich auch für  $B > 0$  bei hinreichend großem Wert von  $\frac{A}{B}$  die Schleifen dieser Kr.-Ln. gegenseitig schneiden müssen, wie dies ja für den Spezialfall der elastischen Kurven bekannt ist.

Läßt man endlich unter der Annahme  $B = 0$  auch  $A$  gegen 0 gehen, so findet man:

$$r^* \equiv \sqrt{x^2 + z^2} \rightarrow \infty; y(\bar{\omega}_1) \rightarrow 0; r^*(v=0) - r^*(v=\bar{\omega}_1) \rightarrow 0.$$

Man erhält also nahezu eine Ebene mit infinitesimaler, paralleler geradliniger „Rillung“ (angedeutet durch nebenstehende Figur).



## § 12. $A$ UND $B$ KONJUGIERT KOMPLEX.

### a) Einführung reeller Parameter und Konstanten.

Nach § 4 haben wir zu setzen:

$$\lambda = \bar{\lambda} = 2; \mu = \bar{\mu} = 1; v = \bar{v} = 3; u = u - \omega'_2; v = v; w = w \text{ (u, v, w reell)}.$$

$$\omega_2 = \omega_3 + \omega_1 \text{ und } \bar{\omega}_2 = \bar{\omega}_3 + \bar{\omega}_1 \text{ positiv reell,}$$

$$\omega'_2 = \omega_3 - \omega_1 \text{ und } \bar{\omega}'_2 = \bar{\omega}_3 - \bar{\omega}_1 \text{ positiv imaginär.}$$

$$A = \mathfrak{A} + i\mathfrak{B}; B = \mathfrak{A} - i\mathfrak{B}; C = \mathfrak{C} + i\mathfrak{D}; D = \mathfrak{C} - i\mathfrak{D} \text{ (}\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{D} \text{ positiv reell)}, \text{ also:}$$

$$\mathfrak{C}\mathfrak{D} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}; \mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 + 1 = \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2. \quad (12; 1)$$

$$A^2 + B^2 = 2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2); A^2 - B^2 = 4i\mathfrak{A}\mathfrak{B}; AB = \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2;$$

$$e_1 = \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{3} + 2i\mathfrak{A}\mathfrak{B}; e_3 = \frac{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}{3} - 2i\mathfrak{A}\mathfrak{B}; e_2 = \frac{2}{3}(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2); \quad (12; 2)$$

$$\sqrt{e_2 - e_3} = \mathfrak{B} + i\mathfrak{A}; \sqrt{e_2 - e_1} = \mathfrak{B} - i\mathfrak{A}; \sqrt{e_1 - e_3} = (1 + i) \sqrt{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}.$$

Dazu die Gleichungen, die aus (12; 2) entstehen, wenn man

|           |     |     |                |                |             |             |             |
|-----------|-----|-----|----------------|----------------|-------------|-------------|-------------|
| anstatt   | $A$ | $B$ | $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{B}$ | $e_1$       | $e_2$       | $e_3$       |
| schreibt: | $C$ | $D$ | $\mathfrak{C}$ | $\mathfrak{D}$ | $\bar{e}_1$ | $\bar{e}_2$ | $\bar{e}_3$ |

### b) Beseitigung von Mehrdeutigkeiten.

$$1. \text{ Wir setzen } v_0 = \varepsilon \bar{\omega}'_2 \text{ (} 0 < \varepsilon < 1 \text{)}. \quad (12; 3)$$

2. Über  $\ln \frac{\bar{\sigma}(v + v_0)}{\bar{\sigma}(v - v_0)}$ ,  $c_\varphi$  und  $c_z$  verfügen wir wieder so, daß  $\varphi(v=0)$  und  $z(u=0)$  verschwinden, also:

$$\ln \frac{\bar{\sigma}(v+v_0)}{\bar{\sigma}(v-v_0)} = i\pi + \ln \frac{\bar{\sigma}(v_0+v)}{\bar{\sigma}(v_0-v)} \text{ mit dem Hauptwert des letzten } \ln; \quad (12; 4)$$

$$c_\varphi = -\frac{\pi}{2}; \quad c_z = -(\eta'_2 + e_2 \omega'_2); \quad (\eta'_2 = \eta_3 - \eta_1).$$

Dadurch wird auch  $W$  eindeutig, und zwar für  $0 < v < 2\bar{\omega}_2$  positiv.

### c) Beschränkung des Untersuchungsbereiches.

Infolge der Symmetrieeigenschaften der Fläche (§ 3, II) genügt es, den „reellen Elementarbereich“  $\mathfrak{E}_v$  zu diskutieren, den man erhält für  $0 \leq u \leq \omega_2$ ;  $0 \leq v \leq \bar{\omega}_2$ .

Daneben ist aber aus den nämlichen Gründen wie in § 5 wieder ein „erweiterter Elementarbereich“  $\mathfrak{E}_w$  einzuführen durch Hinzunahme der Werte

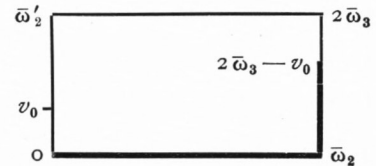
$$v = \bar{\omega}_2 + iv^* \quad (0 < v^* \leq |\bar{\omega}'_2 - v_0|).$$

Wir definieren verschärft:  $w = w = \int_0^v \frac{V' dv}{W} \quad (W \geq 0).$

Integrationsweg: das Knickintervall:

$$[0 \dots \bar{\omega}_2 \dots 2\bar{\omega}_3 - v_0].$$

Durchläuft die obere Integrationsgrenze das Knickintervall, so geht  $w$  von 0 bis  $\omega_2$ .  $\mathfrak{E}_w$  ist nun zu definieren durch den Wertvorrat:  $0 \leq u \leq \omega_2$ ;  $0 \leq w \leq \omega_2$ .



Satz 15 (S. 27) bleibt in Kraft, wenn man dort  $\mathfrak{A}$  statt  $A$ ,  $\mathfrak{B}$  statt  $B$  liest.

### d) Wertvorrat der wichtigsten Größen für den $\mathfrak{E}_w$ .

$$\text{Setzt man} \quad e^U = \frac{X_1 + X_2}{2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}; \quad e^V = \frac{Y_1 + Y_2}{2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}}, \quad (12; 5)$$

so läßt sich schreiben:

$$\begin{aligned} U' &= \sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}sh2U}; & V' &= \sqrt{\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2 + 2\mathfrak{C}\mathfrak{D}sh2V}; \\ W &= \sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 + 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}sh2V}; & U'' &= 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}ch2U; \\ V'' &= 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}ch2V; & S &= (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)sh(U+V) - 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}ch(U-V). \end{aligned} \quad (12; 6)$$

Ist  $\mathfrak{A} < \mathfrak{B}$ , so sind  $U$  und  $V$  stets positiv.

Ist dagegen  $\mathfrak{A} \geq \mathfrak{B}$ , so existiert ein und nur ein Wert  $u = u_3$ , für den  $U(u) = 0$  wird; desgleichen ein und nur ein Wert  $w = w_3$ , für den  $V(w) = 0$  wird. Ist  $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ , so wird  $u_3 = 0$  und  $w_3 = \omega_2$ . Es gilt demnach folgende Übersicht:

1. für  $\mathfrak{A} \leq \mathfrak{B}$ :

| $u$          | $e^U$                                      | $U'$         | $U''$                             |
|--------------|--------------------------------------------|--------------|-----------------------------------|
| $o$          | $\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}$ | $o$          | $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                               | $\downarrow$ | $\downarrow$                      |
| $\omega_2$   | $+\infty$                                  | $+\infty$    | $+\infty$                         |

| $v$                     | $w$                 | $e^V$                                      | $V'$         | $W$        | $V''$                             |
|-------------------------|---------------------|--------------------------------------------|--------------|------------|-----------------------------------|
| $o$                     | $o$                 | $+\infty$                                  | $-\infty$    | $+\infty$  | $+\infty$                         |
| $\downarrow$            | $\downarrow$        | $\uparrow$                                 | $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$                        |
| $\bar{\omega}_2$        | $w(\bar{\omega}_2)$ | $\sqrt{\frac{\mathfrak{D}}{\mathfrak{C}}}$ | $o$          | $1$        | $\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2$ |
|                         | $\downarrow$        | $\uparrow$                                 |              | $\uparrow$ | $\uparrow$                        |
| $2\bar{\omega}_3 - v_0$ | $\omega_2$          | $\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}$ | $i$          | $o$        | $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$ |

2. für  $\mathfrak{A} > \mathfrak{B}$ :

| $u$          | $e^U$                                      | $U'$                                     | $U''$                             |
|--------------|--------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------|
| $o$          | $\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}$ | $o$                                      | $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                               | $\downarrow$                             | $\uparrow$                        |
| $u_3$        | $1$                                        | $\sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}$ | $2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$       |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                               | $\downarrow$                             | $\downarrow$                      |
| $\omega_2$   | $+\infty$                                  | $+\infty$                                | $+\infty$                         |

| $v$                     | $w$          | $e^V$                                      | $V'$                                     | $W$                                      | $V''$                             |
|-------------------------|--------------|--------------------------------------------|------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------|
| $o$                     | $o$          | $+\infty$                                  | $-\infty$                                | $+\infty$                                | $+\infty$                         |
|                         | $\downarrow$ | $\uparrow$                                 |                                          | $\uparrow$                               | $\uparrow$                        |
| $v_3$                   | $w_3$        | $1$                                        | $\sqrt{\mathfrak{C}^2 - \mathfrak{D}^2}$ | $\sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}$ | $2\mathfrak{A}\mathfrak{B}$       |
|                         | $\downarrow$ | $\uparrow$                                 |                                          | $\uparrow$                               | $\downarrow$                      |
| $2\bar{\omega}_3 - v_0$ | $\omega_2$   | $\sqrt{\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}}$ | $i$                                      | $o$                                      | $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$ |

Werte für  $v = \bar{\omega}_2$  wie unter 1.  $w(\bar{\omega}_2) \leq w_3$ , je nachdem  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq 1$ .

Für  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 < 1$  wird  $V'(w_3)$  positiv imaginär.

#### e) Ausgezeichnete Punkte der Kr.-Ln. $w$ .

Zugrunde liegt  $\mathfrak{E}_w$ .

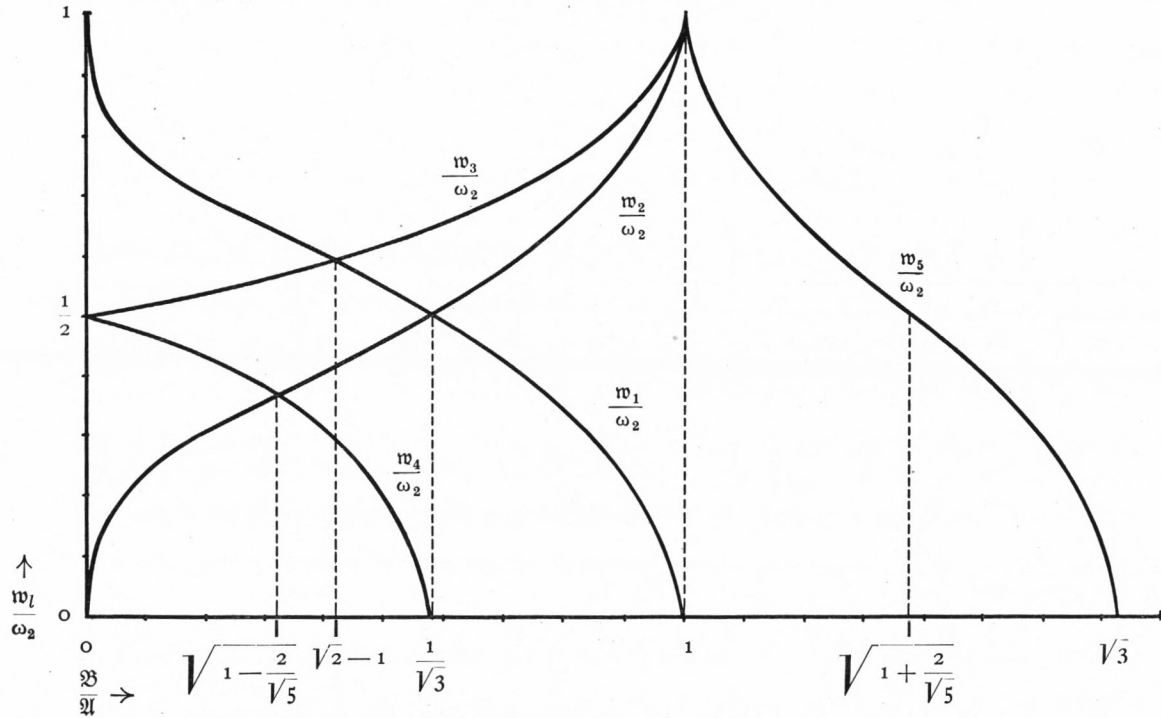
1. Wir definieren fünf Spezialwerte von  $w$  folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_2}{\sigma} w_1 &= \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\sqrt{2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} w_2 = \sqrt{2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)} \text{ oder } w_2 = \omega_2 - w_1; \\ \frac{\sigma_2}{\sigma} w_3 &= \sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} w_4 = \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 - 3\mathfrak{B}^2}}; \\ \frac{\sigma_2}{\sigma} w_5 &= (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \sqrt{\frac{2(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2)}{(3\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2)(3\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}. \end{aligned} \quad (12; 7)$$

Damit diese  $w$ -Werte dem  $\mathfrak{C}_w$  angehören, müssen noch folgende Bedingungen erfüllt sein:

$$\text{für } w_1, w_2 \text{ und } w_3: \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \geq 1; \quad \text{für } w_4: \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \geq \sqrt{3}; \quad \text{für } w_5: \frac{1}{\sqrt{3}} \leq \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leq 1.$$

Die Verhältnisse  $\frac{w_l}{\omega_2}$  ( $l = 1, 2, 3, 4, 5$ ) haben für alle Flächen der Schar  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \text{const.}$  den nämlichen Wert, der als Funktion von  $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$  in nachstehender Figur dargestellt ist. Nach dieser ändern sich offensichtlich alle  $\frac{w_l}{\omega_2}$  monoton mit  $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}}$ , ohne daß jedoch der Beweis hierfür dem Verfasser in allen Fällen gelungen wäre. Für  $\frac{w_2}{\omega_2}$  läßt er sich folgendermaßen führen:



Aus  $w_2 = \int_0^\infty \frac{dW}{V''}$  und  $\omega_2 = \int_0^\infty \frac{dW}{V''}$  ergibt sich mittels der Substitutionen  $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{A}} = \lambda$  und

$$\frac{W}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}} = \eta \text{ nach leichter Umformung:}$$

$$\frac{\omega_2}{w_2} - 1 = \left\{ \int_0^{\sqrt{2}} \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2 (2 - \eta^2) \left( \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2}} \right\} : \left\{ \int_{\sqrt{2}}^{\infty} \frac{d\eta}{\sqrt{1 + \eta^2 (\eta^2 - 2) \left( \frac{1 - \lambda^2}{1 + \lambda^2} \right)^2}} \right\}, \quad (12; 8)$$

woraus man abliest, daß  $\frac{w_2}{\omega_2}$  mit  $\lambda$  monoton wächst.

Als Nachtrag zu d dieses Paragraphen ergibt sich:

| $w$   | $e^V$                                                                                                                                                        | $W$                                                                                                                                                            | $V''$                                                                                                                 |
|-------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $w_1$ | $\sqrt{\frac{2 \mathfrak{A} \mathfrak{B}}{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}}$                                                                                 | $\frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\sqrt{2 (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}$                                                                           | $\frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^2}{2 (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}$                                     |
| $w_2$ | $\sqrt{\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}}$                                                                                                                   | $\sqrt{2 (\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}$                                                                                                                   | $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$                                                                                     |
| $w_3$ | 1                                                                                                                                                            | $\sqrt{\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2}$                                                                                                                       | $2 \mathfrak{A} \mathfrak{B}$                                                                                         |
| $w_4$ | $\sqrt{\frac{\mathfrak{B} (3 \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2) + (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^{3/2}}{\mathfrak{A} (\mathfrak{A}^2 - 3 \mathfrak{B}^2)}}$ | $\frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\sqrt{\mathfrak{A}^2 - 3 \mathfrak{B}^2}}$                                                                             | $\frac{2 \mathfrak{B} (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^{3/2}}{\mathfrak{A}^2 - 3 \mathfrak{B}^2}$                    |
| $w_5$ | $\sqrt{\frac{\mathfrak{A} (3 \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2)}{\mathfrak{B} (3 \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}$                                           | $(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \sqrt{\frac{2 (\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2)}{(3 \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2) (3 \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}$ | $\frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^3}{(3 \mathfrak{B}^2 - \mathfrak{A}^2) (3 \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}$ |

2.  $u_m(w)$  und  $u_s(w)$  sollen ebenso definiert werden<sup>46</sup> wie in § 5, e 2 (S. 30). Ist  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \geq \sqrt{3}$ , so gibt es Werte von  $w$ , für welche  $u_m(w)$  und  $u_s(w)$  gleichzeitig existieren. Dann ist stets  $u_s(w) < u_m(w)$ .

3.  $u_m(w)$  existiert nur für  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \geq 1$  und  $0 \leq w \leq w_1$ .  $s(w = \text{const.})$  hat bei  $u = u_m(w)$  im allgemeinen ein Minimum. Ausnahmsweise tritt an dessen Stelle für  $w = w_1$ ;  $u = \omega_2$  ein Wendepunkt.

4.  $u_s(w)$  existiert nur für  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \geq 1$  und  $w_2 \leq w \leq \omega_2$ . Die betreffende Kr.-L.  $w$  hat bei  $u = u_s(w)$  im allgemeinen eine Spitze. Ausnahmsweise hat die Kr.-L.  $w = w_2$  bei  $u = 0$  die normale Form.

5. Ist  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > 1$  und  $w_2 \leq w \leq \omega_2$ , so wird  $\frac{d\gamma'_s}{dw} = \frac{4\mathfrak{A}\mathfrak{B}s h 2V}{U'_s(w)} \geq 0$ , je nachdem  $w \leq w_3$  ist.  $\gamma'_s(w)$  hat also bei  $w = w_3$  ein Maximum.

<sup>46</sup> Für  $w = w_1$  und  $w = 0$  ist  $S = 0$  zu ersetzen durch:  $\lim_{u \rightarrow \omega_2} S(u, w_1) = 0$  bzw.  $\lim_{w \rightarrow 0} S(u = w_1, w) = 0$ .

6. Ist  $1 < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leq \sqrt{3}$  und  $0 \leq w \leq w_1$ , so nimmt  $\rho'_m(w)$  monoton ab, wenn  $w$  wächst. Ist dagegen  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \sqrt{3}$  und  $0 < w \leq w_1$ , so wird  $\frac{d\rho'_m(w)}{dw} = \frac{(W^4 - V''^2)^2 - W^4(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^2}{W^2(W^4 - V''^2)^{3/2}}$   $\leq 0$ , je nachdem  $w \leq w_4$  ist;  $\rho'_m(w) < 0$  hat also hier bei  $w = w_4$  ein Maximum ( $|\rho'_m|$  ein Minimum).

7. Wächst  $w$ , so nimmt  $\rho'(u=0, w)$  monoton ab, wenn  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$ , dagegen monoton zu, wenn  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \geq 1$  ist. Ist aber  $\frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} < 1$  und  $w > 0$ , so wird

$$\frac{d\rho'(0, w)}{dw} = \frac{1}{2W^2\sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}} [\mathfrak{A}(\mathfrak{A}^2 - 3\mathfrak{B}^2)e^{-V} + \mathfrak{B}(3\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)e^V] \geq 0,$$

je nachdem  $w \leq w_5$  ist.  $\rho'(0, w) < 0$  hat also in diesem Falle bei  $w = w_5$  ein Maximum ( $|\rho'|$  ein Minimum).

#### f) Die räumliche R.-K.

§ 5, f, S. 30 bleibt wörtlich gültig.

#### g) $Z$ und $\Phi$ .

Wir setzen

$$-\frac{\eta_2 + e_2\omega_2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} = Z; \quad i\left(\bar{\omega}_2 \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \bar{\eta}_2 v_0\right) - \frac{\pi}{2} = \Phi \quad (12; 9)$$

und verifizieren:

$$z(u = \omega_2) = Z, \text{ unabhängig von } w; \quad (12; 10)$$

$$\varphi(v = \bar{\omega}_2) = \frac{1}{2i} \int_0^{\bar{\omega}_2} \frac{\bar{\sigma}' v_0 dv}{\bar{\sigma} v - \bar{\sigma} v_0} = \Phi. \quad (12; 11)$$

Die additive Konstante  $-\frac{\pi}{2}$  ergibt sich, indem man  $v_0$  ad hoc als variablen Parameter betrachtet und auf direktem Wege in  $\bar{\omega}_3$  überführt.

Um die Abhängigkeit von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  zu untersuchen, stellen wir wieder  $Z$  und  $\Phi$  als Integrale dar. Für  $v = 0$  wird  $\frac{\partial Z}{\partial u} = \frac{U'^2 - U''}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$ , also  $Z = \int_0^{\omega_2} \frac{U'^2 - U''}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} du$ , andererseits

$\Phi = (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \int_0^{\omega_2} \frac{d\psi}{W^2}$ . Führt man hierin  $\zeta = \frac{U'}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$  bzw.  $\eta = \frac{1}{W}$  als Integrationsvariable ein, so erhält man mittels d dieses Paragraphen (S. 63):

$$Z = \int_0^\infty d\zeta \left( \frac{\zeta^2}{\sqrt{1 - 2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)\zeta^2 + \zeta^4}} - 1 \right); \quad \Phi = \int_0^1 \frac{\eta^2 d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2} \cdot \sqrt{1 - 2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)\eta^2 + \eta^4}}. \quad (12; 12)$$

Beide Integrale enthalten, abgesehen von der Bezeichnung der Integrationsvariablen, im Nenner die nämliche Wurzel. Bezeichnet man deren Radikanden ad hoc mit  $\psi(\eta)$  bzw.  $\psi(\zeta)$  und betrachtet  $\psi$  als Funktion von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$ , so ergibt sich:

$$d\psi(\eta) = \frac{2}{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2)^3} \left\{ [(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)\eta^2 - 1] d(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) - 2\eta^2 \mathfrak{B}^4 d\left(\frac{\mathfrak{A}^2}{\mathfrak{B}^2}\right) \right\}. \quad (12; 13)$$

Daraus liest man unmittelbar ab:

Satz 24, 1:  $\left. \begin{array}{l} \text{Solange } \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leq 1 \text{ ist, nimmt } Z \text{ zu,} \\ \text{Solange } \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq 1 \text{ ist, nimmt } \Phi \text{ zu,} \end{array} \right\} \text{ wenn von den beiden Größen}$   
 $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$  und  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  keine abnimmt und wenigstens eine zunimmt.

Aus Satz 7 folgt:  $Z(q\mathfrak{A}, q\mathfrak{B}) = \frac{Z(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})}{q}$ .

Leider war ein entsprechender Satz über das Verhalten von  $\Phi$  bei konstantem Verhältnis  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  für  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 > 1$  mit diesem primitiven Verfahren nicht zu gewinnen.<sup>47</sup> Für alle positiven Werte von  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  läßt sich aber wenigstens folgendes aussagen:

Satz 24, 2:  $Z$  und  $\Phi$  nehmen zu, wenn  $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$  konstant bleibt und  $\mathfrak{A}$  zunimmt (also  $\mathfrak{B}$  abnimmt).

Bezüglich  $Z$  läßt sich diese Aussage noch folgendermaßen verschärfen:

Satz 24, 3: Wenn  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > 1$  ist, wenn ferner  $\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$  konstant bleibt und  $\mathfrak{A}$  zunimmt, so nimmt sowohl  $z_m(w=0) < 0$  als auch  $Z - z_m(w=0) > 0$  zu.

<sup>47</sup> Wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  bei konstantem Verhältnis  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  von hinreichend kleinen Werten aus zunehmen, so scheint  $\Phi$  zunächst bis zu einem Maximum zu wachsen und dann wieder für  $\mathfrak{A} \rightarrow \infty$  gegen  $\frac{\pi}{2}$  abzunehmen.



$$\text{Beweis: } -z_m (w=0) = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}} d\zeta \left( 1 - \frac{\zeta^2}{\sqrt{1 - 2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)\zeta^2 + \zeta^4}} \right);$$

der Integrand ist im ganzen Integrationsintervall positiv mit Ausnahme der oberen Grenze, für die er verschwindet. Das Weitere liest man ab. Analog für  $Z - z_m$ .

Aus Satz 24, 2 und Satz 7 (S. 19) folgt, daß es höchstens einen Wert von  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  geben kann, für den  $Z = 0$  ist. Genauer lehrt hierüber die Theorie der elastischen Kurven:

Satz 24, 4:  $Z \leq 0$ , je nachdem  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leq 2,17966 \dots = \operatorname{tg} 65^\circ 21' 18''$ .<sup>48</sup>

$\mathfrak{B} \rightarrow 0$  führt auf  $Z \rightarrow \infty$ .

Gehen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  so gegen  $\infty$ , daß  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  konstant bleibt, so ergibt sich  $Z \rightarrow 0$ .

Über  $\Phi$  ist noch zu sagen:

Satz 24, 5:  $\Phi$  ist stets positiv. Solange  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{2}$  ist, bleibt  $\Phi < \frac{\pi}{2}$ .

Beweis der letzten Aussage: Wenn  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{2}$ , so ist in (12; 12)  $\psi(\eta) \geq \eta^2$  („=“

nur für  $\eta = 1$ ), also  $\Phi < \int_0^1 \frac{d\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}} = \frac{\pi}{2}$ .

$\Phi(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  hat bei konstantem  $\mathfrak{A}$  für  $\mathfrak{B} \rightarrow 0$  einen endlichen oder unendlichen Grenzwert, je nachdem  $\mathfrak{A} < 1$  oder  $\mathfrak{A} \geq 1$  ist.

Gehen  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  so gegen  $\infty$ , daß  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  konstant bleibt, so ergibt sich:  $\Phi \rightarrow \frac{\pi}{2}$ .<sup>49</sup>

## h) Einteilung der Flächen.

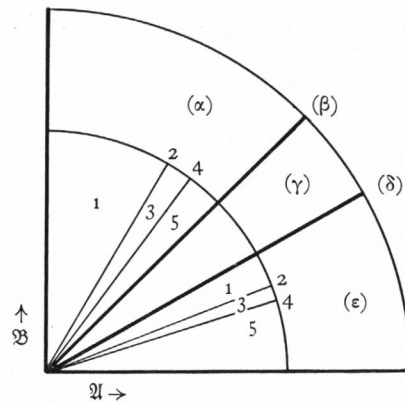
Nach dem Vorhergehenden erscheint es zweckmäßig, als Einteilungsmerkmal den Wert von  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  zugrunde zu legen und daher folgende Fälle zu unterscheiden:

<sup>48</sup> Der doppelte Winkel ist  $130^\circ 42' 36''$ . Vgl. Lehr S. 43 und Fußnote S. 42.

<sup>49</sup> Der nur von  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$  abhängige Ausdruck  $\frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{2\mathfrak{A}} Z$  stellt das Verhältnis  $\frac{Z}{r_{\max}}$  für die Elastika  $w = 0$  dar; er wächst mit  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ .

| Fall            | Unterfall                | $\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{D}}$ | $\arctg \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{D}}$ | Anordnung der Spezialwerte von $\mathfrak{w}$                                                           |
|-----------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                 | unerreichbarer Grenzfall | 0                                   | 0                                          |                                                                                                         |
| $(\alpha)$      | 1                        | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               |                                                                                                         |
|                 | 2                        | $\frac{1}{\sqrt{3}}$                | $\frac{\pi}{6}$                            | $0 = \mathfrak{w}_5$                                                                                    |
|                 | 3                        | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               | $0 < \mathfrak{w}_5 < \frac{\omega_2}{2}$                                                               |
|                 | 4                        | $\sqrt{5-2\sqrt{5}}$                | $\frac{\pi}{5}$                            | $0 < \mathfrak{w}_5 = \frac{\omega_2}{2}$                                                               |
|                 | 5                        | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               | $\frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_5 < \omega_2$                                                        |
| $(\beta)$       |                          | 1                                   | $\frac{\pi}{4}$                            | $0 = \mathfrak{w}_1 < \mathfrak{w}_2 = \mathfrak{w}_3 = \mathfrak{w}_5 = \omega_2$                      |
| $(\gamma)$      |                          | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               | $0 < \mathfrak{w}_1 < \frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_2 < \mathfrak{w}_3 < \omega_2$                  |
| $(\delta)$      |                          | $\sqrt{3}$                          | $\frac{\pi}{3}$                            | $0 = \mathfrak{w}_4 < \mathfrak{w}_1 = \frac{\omega_2}{2} = \mathfrak{w}_2 < \mathfrak{w}_3 < \omega_2$ |
| $(\varepsilon)$ | 1                        | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               | $0 < \mathfrak{w}_4 < \mathfrak{w}_2 < \frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_1 < \mathfrak{w}_3 < \omega_2$ |
|                 | 2                        | $1 + \sqrt{2}$                      | $\frac{3\pi}{8}$                           | $0 < \mathfrak{w}_4 < \mathfrak{w}_2 < \frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_1 = \mathfrak{w}_3 < \omega_2$ |
|                 | 3                        | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               | $0 < \mathfrak{w}_4 < \mathfrak{w}_2 < \frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_3 < \mathfrak{w}_1 < \omega_2$ |
|                 | 4                        | $\sqrt{5+2\sqrt{5}}$                | $\frac{2\pi}{5}$                           | $0 < \mathfrak{w}_4 = \mathfrak{w}_2 < \frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_3 < \mathfrak{w}_1 < \omega_2$ |
|                 | 5                        | $\downarrow$                        | $\downarrow$                               | $0 < \mathfrak{w}_2 < \mathfrak{w}_4 < \frac{\omega_2}{2} < \mathfrak{w}_3 < \mathfrak{w}_1 < \omega_2$ |
|                 | Grenzfall                | $\infty$                            | $\frac{\pi}{2}$                            |                                                                                                         |

Graphisch:



Auf die Unterfälle soll künftig nicht weiter eingegangen werden; es genüge der Hinweis auf e 5, 6, 7 dieses Paragraphen (S. 65 und 66).

### § 13. DISKUSSION DER EINZELNEN FÄLLE.

#### a) Koordinaten.

$$\begin{aligned}
 r(u, w) &= \frac{4\Re\Im\sigma_2 u \sigma_3 w}{(\Re^2 + \Im^2) [\Im(\sigma_1 u \sigma_1 w + \sigma_3 u \sigma_3 w) + i\Re(\sigma_1 u \sigma_1 w - \sigma_3 u \sigma_3 w)]}; \\
 z(u, w) &= -\frac{1}{\Re^2 + \Im^2} \left( \frac{\sigma_2'}{\sigma_2} u + e_2 u \right) \\
 &\quad - \frac{\sigma}{\sigma_2} u \cdot \frac{\Im(\sigma_1 u \sigma_3 w + \sigma_3 u \sigma_1 w) + i\Re(\sigma_1 u \sigma_3 w - \sigma_3 u \sigma_1 w)}{\Im(\sigma_1 u \sigma_1 w + \sigma_3 u \sigma_3 w) + i\Re(\sigma_1 u \sigma_1 w - \sigma_3 u \sigma_3 w)}; \\
 \varphi(v) &= i v \frac{\bar{\sigma}'}{\sigma} v_0 - \frac{i}{2} \ln \frac{\bar{\sigma}(v_0 + v)}{\bar{\sigma}(v_0 - v)}.
 \end{aligned} \tag{13; 1}$$

#### b) Gestalt der Kr.-Ln. w des $\mathfrak{E}_w$ .

I. Fall ( $\alpha$ )  $0 < \frac{\Re}{\Im} < 1$ .

Wir unterscheiden drei Formklassen:

| Wert von $w$ | 0          | $\longrightarrow$ | $\omega_2$ |
|--------------|------------|-------------------|------------|
| Formklasse   | 1 $\alpha$ | 2 $\alpha$        | 3 $\alpha$ |

Fig. 59

1  $\alpha$ :

| $u$          | $r$        | $z$        | $\gamma'$    | $\rho'$    | der Achse zugekehrte Seite | Besonderheit    |
|--------------|------------|------------|--------------|------------|----------------------------|-----------------|
| 0            | $> 0$      | 0          | 0            | $< 0$      |                            | Maximum von $r$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$ | konkav                     |                 |
| $\omega_2$   | 0          | $Z < 0$    | spitz        | $-\infty$  |                            | Wendepunkt      |

1  $\alpha$  ist elastische Linie.

2 $\alpha$ : Verläuft qualitativ wie 1 $\alpha$ , ist aber keine Elastika. Fig. 60.

3 $\alpha$ :  $r = 0$ ;  $\gamma' = 0$  für jedes  $u$ . Die Achse wird von  $z = 0$  bis  $z = Z < 0$  durchlaufen. Fig. 61.

## II. Fall ( $\beta$ ) $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = 1$ .

Drei Formklassen:

|              |           |                   |            |
|--------------|-----------|-------------------|------------|
| Wert von $w$ | 0         | $\longrightarrow$ | $\omega_2$ |
| Formklasse   | 1 $\beta$ | 2 $\beta$         | 3 $\beta$  |

1 $\beta$ : Wie 1 $\alpha$ , nur ist hier  $\gamma'(\omega_2, 0) = \frac{\pi}{2}$ . Fig. 56.

2 $\beta$ : Wie 2 $\alpha$ . Fig. 57.

3 $\beta$ : Wie 3 $\alpha$ , jedoch  $\lim_{w \rightarrow \omega_2} \rho'(0, w) = 0$ ;  $\lim_{w \rightarrow \omega_2} \frac{d}{dw} \rho'(0, w) = \frac{1}{2}$ . Fig. 58.

## III. Fall ( $\gamma$ ) $1 < \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} < \sqrt{3}$ .

Sieben Formklassen:

|              |            |                   |            |                   |            |                   |            |
|--------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|-------------------|------------|
| Wert von $w$ | 0          | $\longrightarrow$ | $w_1$      | $\longrightarrow$ | $w_2$      | $\longrightarrow$ | $\omega_2$ |
| Formklasse   | 1 $\gamma$ | 2 $\gamma$        | 3 $\gamma$ | 4 $\gamma$        | 5 $\gamma$ | 6 $\gamma$        | 7 $\gamma$ |

Fig. 49

|              |              |            |              |                 |            |                               |                 |
|--------------|--------------|------------|--------------|-----------------|------------|-------------------------------|-----------------|
| 1 $\gamma$ : | $u$          | $r$        | $z$          | $\gamma'$       | $\rho'$    | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit    |
|              | 0            | $> 0$      | 0            | 0               | $< 0$      |                               | Maximum von $r$ |
|              | $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\uparrow$   | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konkav                        |                 |
|              | $u_m$        | $r_m$      | $z_m$        | $\frac{\pi}{2}$ | $\rho'_m$  |                               | Minimum von $z$ |
|              | $\downarrow$ | $\uparrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$    | $\uparrow$ | konvex                        |                 |
|              | $\omega_2$   | 0          | $Z < 0$      | stumpf          | $-\infty$  |                               | Wendepunkt      |

Elastika!

2 $\gamma$ : Verläuft qualitativ wie 1 $\gamma$ , ist aber keine Elastika. Fig. 50.

3 $\gamma$ : Wie 1 $\beta$ , jedoch keine Elastika. Fig. 51.

4 $\gamma$ : Wie 2 $\alpha$ . Fig. 52.

5 $\gamma$ : Ebenso, jedoch  $\rho'(0, w_2) = 0$ . Fig. 53.

Fig. 54

6 $\gamma$ :

| u            | r            | z            | $\gamma'$         | $\rho'$    | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                  |
|--------------|--------------|--------------|-------------------|------------|-------------------------------|-------------------------------|
| 0            | $> 0$        | 0            | 0                 | $> 0$      |                               | Minimum von r                 |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$      | $\uparrow$ | konvex                        |                               |
| $u_s$        | $r_s$        | $z_s$        | $\gamma'_s$ spitz | 0          |                               | Spitze<br>Maximum von r und z |
| $\downarrow$ | $\uparrow$   | $\uparrow$   | $\downarrow$      | $\uparrow$ | konkav                        |                               |
| $\omega_2$   | 0            | $Z < 0$      | spitz             | $-\infty$  |                               | Wendepunkt                    |

Bei Fortsetzung über den  $\mathfrak{E}_w$  hinaus für  $u < 0$  entsteht in der Ebene  $z = 0$  ein Doppelpunkt, da zwischen  $z_s > 0$  und  $Z < 0$  einmal und nur einmal  $z = 0$  werden muß.

7 $\gamma$ :  $r = 0$ ;  $\gamma' = 0$  für jedes u. Die Achse wird von  $z = 0$  bis  $z = z_s > 0$ , dann von da bis  $z = Z < 0$  durchlaufen. Fig. 55.

#### IV. Fall ( $\delta$ ) $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \sqrt{3}$ .

Fünf Formklassen:

|            |            |                   |                                  |                   |            |
|------------|------------|-------------------|----------------------------------|-------------------|------------|
| Wert von w | 0          | $\longrightarrow$ | $w_1 = w_2 = \frac{\omega_2}{2}$ | $\longrightarrow$ | $\omega_2$ |
| Formklasse | 1 $\delta$ | 2 $\delta$        | 3 $\delta$                       | 4 $\delta$        | 5 $\delta$ |

1  $\delta$ : Wie 1  $\gamma$ . Fig. 44.

2  $\delta$ : Wie 2  $\gamma$ . Fig. 45.

3  $\delta$ : Entsteht sozusagen dadurch, daß 3  $\gamma$  und 5  $\gamma$  unter Ausfall von 4  $\gamma$  zusammenrücken. Gestalt wie 3  $\gamma$ , aber dazu noch  $\rho' \left( 0, \frac{\omega_2}{2} \right) = 0$ . Fig. 46.

4  $\delta$ : Wie 6  $\gamma$ . Fig. 47.

5  $\delta$ : Wie 7  $\gamma$ . Fig. 48.

#### V. Fall ( $\varepsilon$ ) $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} > \sqrt{3}$ .

Sieben Formklassen:

|            |                 |                   |                 |                   |                 |                   |                 |
|------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|-------------------|-----------------|
| Wert von w | 0               | $\longrightarrow$ | $w_2$           | $\longrightarrow$ | $w_1$           | $\longrightarrow$ | $\omega_2$      |
| Formklasse | 1 $\varepsilon$ | 2 $\varepsilon$   | 3 $\varepsilon$ | 4 $\varepsilon$   | 5 $\varepsilon$ | 6 $\varepsilon$   | 7 $\varepsilon$ |

Wo hier auf frühere Formen verwiesen wird, ist die dortige Aussage  $Z < 0$  zu ersetzen durch:  $Z \leq 0$ , je nachdem  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} \leq 2,17966 \dots$

1ε: Wie 1γ. Fig. 23, 30, 37.

2ε: Wie 2γ. Fig. 24, 31, 38.

3ε: Wie 2γ, jedoch  $\rho'(0, w_2) = 0$ . Fig. 25, 32, 39.

Fig. 26, 33, 40

| 4ε: | u          | r     | z     | $\gamma'$         | $\rho'$   | der Achse<br>zugekehrte Seite | Besonderheit                  |
|-----|------------|-------|-------|-------------------|-----------|-------------------------------|-------------------------------|
|     | 0          | $> 0$ | 0     | 0                 | $> 0$     |                               | Minimum von r                 |
|     | ↓          | ↓     | ↓     | ↓                 | ↑         | konvex                        |                               |
|     | $u_s$      | $r_s$ | $z_s$ | $\gamma'_s$ spitz | 0         |                               | Spitze<br>Maximum von r und z |
|     | ↓          | ↑     | ↑     | ↓                 | ↑         | konkav                        |                               |
|     | $u_m$      | $r_m$ | $z_m$ | $\frac{\pi}{2}$   | $\rho'_m$ |                               | Minimum von z                 |
|     | ↓          | ↑     | ↓     | ↓                 | ↑         | konvex                        |                               |
|     | $\omega_2$ | 0     | Z     | stumpf            | $-\infty$ |                               | Wendepunkt                    |

5ε: Wie 6γ, jedoch  $\gamma'(\omega_2, w_1) = \frac{\pi}{2}$ . Fig. 27, 34, 41.

6ε: Wie 6γ. Fig. 28, 35, 42.

7ε: Wie 7γ. Fig. 29, 36, 43.

Wegen der drei Möglichkeiten  $Z \gtrless 0$  sind hier bei Fortsetzung der Kr.-Ln. über den  $\mathcal{E}_w$  hinaus für  $u < 0$ , besonders für kleine Werte von  $|Z|$  verschiedene zeichnerisch leicht feststellbare Überschneidungen und Berührungen möglich, deren schwerfällige Diskussion hier billigerweise unterbleiben muß.<sup>50</sup>

Bei allen Formklassen ist die Normale im Punkt  $u = 0$  Symmetrieachse, der Punkt  $u = \omega_2$  S.-Zentrum der über den Elementarbereich hinaus fortgesetzten Kurve.

#### c) Abhängigkeit der vorkommenden Größen von w.

Für alle Fälle gilt:

| w          | $r(0, w)$                                               | $\gamma'(\omega_2, w)$                                     |
|------------|---------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------|
| 0          | $\frac{2\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$ | $2 \operatorname{arctg} \frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}}$ |
| ↓          | ↑                                                       | ↑                                                          |
| $\omega_2$ | 0                                                       | 0                                                          |

<sup>50</sup> Nach Lehr S. 42 tritt zum ersten Male Selbstberührung der Elastika ein, wenn  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \operatorname{tg} 58^\circ 50' = 1,6534 < \sqrt{3}$ , also schon im Falle γ; demnach kommen im Falle δ, und im Falle ε, wenn  $Z < 0$  ist, für hinreichend kleine Werte von w stets Überschneidungen vor.

Nur für  $(\gamma)$ ,  $(\delta)$ ,  $(\varepsilon)$  gilt:

| $w$          | $u_m$        | $r_m$                                           | $z_m$                                                                      |
|--------------|--------------|-------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| $o$          | $w_2$        | $\frac{\sqrt{2}(\Re^2 - \Im^2)}{\Re^2 + \Im^2}$ | $-\frac{\left(\frac{\sigma'}{\sigma} w_2 + e_2 w_2\right)}{\Re^2 + \Im^2}$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$                                      | $\downarrow$                                                               |
| $w_1$        | $\omega_2$   | $o$                                             | $Z$                                                                        |

| $w$          | $u_s$        | $r_s$                                           | $z_s$                                                                          |
|--------------|--------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------|
| $w_2$        | $o$          | $\frac{\sqrt{2}(\Re^2 - \Im^2)}{\Re^2 + \Im^2}$ | $o$                                                                            |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\uparrow$                                      | $\downarrow$                                                                   |
| $\omega_2$   | $w_1$        | $\bullet$                                       | $-\frac{\left(\frac{\sigma'_2}{\sigma_2} w_1 + e_2 w_1\right)}{\Re^2 + \Im^2}$ |

| $w$          | $\gamma'_s$                            |
|--------------|----------------------------------------|
| $w_2$        | $o$                                    |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                           |
| $w_3$        | $2 \arctg \frac{\Re - \Im}{\Re + \Im}$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                             |
| $\omega_2$   | $o$                                    |

Endlich gilt für

$(\alpha 1)$  u.  $(\alpha 2)$

$(\alpha 3), (\alpha 4), (\alpha 5)$

$(\beta)$

$(\gamma), (\delta), (\varepsilon)$

$(\gamma)$  und  $(\delta)$

$(\varepsilon)$

| $w$          | $\rho'(o, w)$     |
|--------------|-------------------|
| $o$          | $\frac{-1}{2\Re}$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$        |
| $\omega_2$   | $-\infty$         |

| $w$          | $\rho'(o, w)$                                    |
|--------------|--------------------------------------------------|
| $o$          | $\frac{-1}{2\Re}$                                |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                                     |
| $w_5$        | $-\frac{\sqrt{2}(\Im^2 - \Re^2)}{\Re^2 + \Im^2}$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                                       |
| $\omega_2$   | $-\infty$                                        |

| $w$          | $\rho'(o, w)$                |
|--------------|------------------------------|
| $o$          | $\frac{-1}{2\Re}$            |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                 |
| $\omega_2$   | $o$<br>als<br>Grenz-<br>wert |

| $w$          | $\rho'(o, w)$     |
|--------------|-------------------|
| $o$          | $\frac{-1}{2\Re}$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$      |
| $w_2$        | $o$               |
| $\downarrow$ | $\downarrow$      |
| $\omega_2$   | $+\infty$         |

| $w$          | $\rho'_m(w)$                         |
|--------------|--------------------------------------|
| $o$          | $\frac{-1}{\sqrt{2}(\Re^2 - \Im^2)}$ |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                           |
| $w_1$        | $-\infty$                            |

| $w$          | $\rho'_m(w)$                         |
|--------------|--------------------------------------|
| $o$          | $\frac{-1}{\sqrt{2}(\Re^2 - \Im^2)}$ |
| $\downarrow$ | $\downarrow$                         |
| $w_4$        | $-\frac{2\Im}{\Re^2 + \Im^2}$        |
| $\downarrow$ | $\uparrow$                           |
| $w_1$        | $-\infty$                            |

Spezialwerte für ausgezeichnete  $w$ :

| $w$           | $r(o, w)$                                                                | $\gamma'(\omega_2, w)$                                   | $\rho'(o, w)$                                                                                                   |
|---------------|--------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $o$           | $\frac{2\Re}{\Re^2 + \Im^2}$                                             | $2 \arctg \frac{\Re}{\Im}$                               | $\frac{-1}{2\Re}$                                                                                               |
| $w_1$         | $\frac{2\Im}{\Re^2 + \Im^2}$                                             | $\frac{\pi}{2}$                                          | $\frac{\Re^2 - 3\Im^2}{2\Im(\Re^2 + \Im^2)}$                                                                    |
| $w_2$         | $\frac{\sqrt{2}(\Re^2 - \Im^2)}{\Re^2 + \Im^2}$                          | $2 \arctg \frac{\sqrt{2}(\Re^2 - \Im^2)}{2\Im}$          | $o$                                                                                                             |
| $w_3$         | $\frac{2}{\Re^2 + \Im^2} \sqrt{\frac{\Re\Im(\Re - \Im)}{\Re + \Im}}$     | $2 \arctg \sqrt{\frac{\Re(\Re - \Im)}{\Im(\Re + \Im)}}$  | $\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\Re - \Im}{\Re\Im(\Re + \Im)}}$                                                        |
| $w_4$         | $\frac{2\Im}{\Re^2 + \Im^2} \sqrt{1 + \frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2}}{\Im}}$ | $2 \arctg \sqrt{1 + \frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2}}{\Im}}$   | $\frac{1}{2\Re} \sqrt{\frac{\sqrt{\Re^2 + \Im^2}}{\Im} - 1 - \frac{4\Re^2(\Re^2 - 3\Im^2)}{(\Re^2 + \Im^2)^2}}$ |
| $w_5$         | $\frac{\sqrt{2}(\Im^2 - \Re^2)}{\Re^2 + \Im^2}$                          | $2 \arctg \frac{\sqrt{2}(\Im^2 - \Re^2)}{2\Im}$          | $-\frac{\sqrt{2}(\Im^2 - \Re^2)}{\Re^2 + \Im^2}$                                                                |
| $w(\omega_2)$ | $\frac{2(\Re\mathfrak{D} - \Im\mathfrak{E})}{\Re^2 + \Im^2}$             | $2 \arctg \frac{\Re\mathfrak{D} - \Im\mathfrak{E}}{\Im}$ | $\frac{\Re\mathfrak{E} - \Im\mathfrak{D}}{2\Re\Im}$                                                             |



| $w$                 | $r_m(w)$                                                                                                                                                         | $\rho'_m(w)$                                                                                                                                               | $r_s(w)$                                                                            | $\gamma'_s(w)$                                                                                         |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $o$                 | $\frac{\sqrt{2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$                                                                              | $\frac{-1}{\sqrt{2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}$                                                                                                     | tritt niemals reell auf                                                             |                                                                                                        |
| $w_1$               | $o$                                                                                                                                                              | $-\infty$                                                                                                                                                  | $\frac{1}{\sqrt{2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}$                               | $\arccos \frac{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}{2(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}$                   |
| $w_2$               | $\frac{\sqrt{(3\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)(\mathfrak{U}^2 - 3\mathfrak{B}^2)}}{(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2)\sqrt{2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}$ | $\frac{-(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2)}{\sqrt{2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)(3\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)(\mathfrak{U}^2 - 3\mathfrak{B}^2)}$ | $\frac{\sqrt{2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$ | $o$                                                                                                    |
| $w_3$               | $\frac{\sqrt{(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 - 4\mathfrak{U}^2\mathfrak{B}^2}}{(\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2)\sqrt{\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2}}$     | $\frac{-2\mathfrak{U}\mathfrak{B}}{\sqrt{(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)^2 - 4\mathfrak{U}^2\mathfrak{B}^2}(\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2)}$           | $\frac{\sqrt{\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2}}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$    | $\arccos \frac{2\mathfrak{U}\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$                            |
| $w_4$               | $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}}$                                                                                                               | $\frac{-2\mathfrak{B}}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$                                                                                                   | $\frac{1}{\sqrt{\mathfrak{U}^2 - 3\mathfrak{B}^2}}$                                 | $\arccos \frac{2\mathfrak{B}\sqrt{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}}{\mathfrak{U}^2 - 3\mathfrak{B}^2}$ |
| $w(\bar{\omega}_2)$ | $\frac{\sqrt{1 - (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2)^2}}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$                                                                         | $\frac{-(\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2)}{\sqrt{1 - (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2)^2}}$                                                                | $\frac{1}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$                                         | $\arccos \frac{\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2}{\mathfrak{U}^2 + \mathfrak{B}^2}$                      |

Die Tabelle der Spezialwerte ist so zu verstehen, daß die betreffenden Größen auf den Flächen, auf denen sie überhaupt reell auftreten, die angegebenen Werte annehmen.

#### d) Der reelle Elementarbereich $\mathfrak{E}_0$ .

Die Kr.-L.  $u = o$  ist eben und geodätische Linie.

$u = \omega_2$  ist konischer Punkt.

$\varphi$  wächst monoton mit  $v$ .  $\varphi(v = o) = o$ ;  $\varphi(v = \bar{\omega}_2) = \Phi$ .

Über die Kr.-L.  $v = o$  gilt das in § 8, I d (S. 45) Gesagte.

Die Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_2$  ist geodätische Linie.

Nur die Kr.-Ln.  $w$ , für welche  $o \leq w \leq w(\bar{\omega}_2)$  ist, gehören dem  $\mathfrak{E}_0$  an. Die Werte der Koordinaten usw. für  $v = \bar{\omega}_2$  sind aus c dieses Paragraphen zu ersehen.

Bei konstantem  $\frac{\mathfrak{U}}{\mathfrak{B}}$  nähert sich die Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_2$  für  $\mathfrak{U} \rightarrow o$ ,  $\mathfrak{B} \rightarrow o$  immer mehr der Form  $w = o$ , für  $\mathfrak{U} \rightarrow \infty$ ,  $\mathfrak{B} \rightarrow \infty$  der Form  $w = \omega_2$ . Letztere tritt also bei endlichem  $\mathfrak{U}$  und  $\mathfrak{B}$  auf keiner reellen Fläche wirklich auf, sondern ist nur Grenzform in dem angegebenen Sinn.

In den Fällen ( $\alpha$ ) und ( $\beta$ ) hat die Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_2$  stets die Form  $2\alpha$  bzw.  $2\beta$ . Für die übrigen Fälle ist nachstehend angegeben, welche Form die Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_2$  jeweils hat.

Dabei ist ad hoc  $\frac{\mathfrak{U}^2}{\mathfrak{B}^2} = \mathfrak{K}$  gesetzt und die einzelne Fläche der Schar  $\mathfrak{K} = \text{const.}$  durch

Angabe des jeweiligen Wertes von  $\mathfrak{B}^2$  gekennzeichnet (erste Reihe). Die zweite Reihe gibt den zugehörigen Wert von  $w(\bar{\omega}_2)$  bzw. das Intervall, dem dieser angehört, die dritte Reihe die Form der Kr.-L.  $v = \bar{\omega}_2$ . Die erste und letzte Spalte ( $\mathfrak{B} \rightarrow o$ ,  $\mathfrak{B} \rightarrow +\infty$ ) sind wieder als Grenzfälle zu betrachten, die bei reellen Flächen nie wirklich erreicht werden.

Fall ( $\gamma$ ):<sup>51</sup>

|                     |            |               |                                                |               |                               |               |            |
|---------------------|------------|---------------|------------------------------------------------|---------------|-------------------------------|---------------|------------|
| $\mathfrak{B}^2$    | o          | $\rightarrow$ | $\frac{2(\mathfrak{K}-1)}{(\mathfrak{K}+1)^2}$ | $\rightarrow$ | $\frac{1}{2(\mathfrak{K}-1)}$ | $\rightarrow$ | $+\infty$  |
| $w(\bar{\omega}_2)$ | o          | $\rightarrow$ | $w_1$                                          | $\rightarrow$ | $w_2$                         | $\rightarrow$ | $\omega_2$ |
| Form                | 1 $\gamma$ | 2 $\gamma$    | 3 $\gamma$                                     | 4 $\gamma$    | 5 $\gamma$                    | 6 $\gamma$    | 7 $\gamma$ |

Fall ( $\delta$ ):

|                     |            |               |                                  |               |            |
|---------------------|------------|---------------|----------------------------------|---------------|------------|
| $\mathfrak{B}^2$    | o          | $\rightarrow$ | $\frac{1}{4}$                    | $\rightarrow$ | $+\infty$  |
| $w(\bar{\omega}_2)$ | o          | $\rightarrow$ | $w_1 = w_2 = \frac{\omega_2}{2}$ | $\rightarrow$ | $\omega_2$ |
| Form                | 1 $\delta$ | 2 $\delta$    | 3 $\delta$                       | 4 $\delta$    | 5 $\delta$ |

Fall ( $\varepsilon$ ):<sup>51</sup>

|                     |                 |                 |                               |                 |                                                |                 |                 |
|---------------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|-----------------|------------------------------------------------|-----------------|-----------------|
| $\mathfrak{B}^2$    | o               | $\rightarrow$   | $\frac{1}{2(\mathfrak{K}-1)}$ | $\rightarrow$   | $\frac{2(\mathfrak{K}-1)}{(\mathfrak{K}+1)^2}$ | $\rightarrow$   | $+\infty$       |
| $w(\bar{\omega}_2)$ | o               | $\rightarrow$   | $w_2$                         | $\rightarrow$   | $w_1$                                          | $\rightarrow$   | $\omega_2$      |
| Form                | 1 $\varepsilon$ | 2 $\varepsilon$ | 3 $\varepsilon$               | 4 $\varepsilon$ | 5 $\varepsilon$                                | 6 $\varepsilon$ | 7 $\varepsilon$ |

Ferner:

in den Fällen ( $\alpha_3$ ), ( $\alpha_4$ ), ( $\alpha_5$ ):  $w(\bar{\omega}_2) \leq w_5$ , je nachdem  $\mathfrak{B}^2 \leq \frac{(3-\mathfrak{K})(3\mathfrak{K}-1)}{2(1-\mathfrak{K})(\mathfrak{K}+1)^2}$ ;

in den Fällen ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ), ( $\varepsilon$ ):  $w(\bar{\omega}_2) \leq w_3$ , je nachdem  $\mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{\mathfrak{K}-1}$ ;

im Falle ( $\varepsilon$ ):  $w(\bar{\omega}_2) \leq w_4$ , je nachdem  $\mathfrak{B}^2 \leq \frac{\mathfrak{K}-3}{(\mathfrak{K}+1)^2}$ ;

in allen Fällen:  $w(\bar{\omega}_2) \leq \frac{\omega_2}{2}$ , je nachdem  $\mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{\mathfrak{K}+1}$ .

e) Die ebene Kr.-L.  $u = 0$ .

Man darf wieder setzen  $\rho'' = \frac{1}{sh(U+V)}$ .

Bezüglich des Verlaufes sind zwei Möglichkeiten zu unterscheiden:

1.  $\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{2}$ , d. h. die Fälle ( $\alpha$ ), ( $\beta$ ) und diejenigen Fälle ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ), ( $\varepsilon$ ), in denen  $w(\bar{\omega}_2) \leq w_2$  ist. Fig. 75, äußere Kurve.

2.  $\mathfrak{U}^2 - \mathfrak{B}^2 > \frac{1}{2}$ , d. h. die übrigen Fälle ( $\gamma$ ), ( $\delta$ ), ( $\varepsilon$ ). Fig. 74, äußere Kurve.

---

<sup>51</sup>  $\mathfrak{B}^2 = \frac{2(\mathfrak{K}-1)}{(\mathfrak{K}+1)^2}$  ist gleichbedeutend mit  $\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2 = 1$ .

Im letzteren Falle gilt folgendes:

| $v$              | $r$                                                                                              | $\varphi$                      | Winkel zwischen<br>Kurve und $r$                                    | $\rho''$                                                                                | dem Pol $r=0$<br>zugekehrte<br>Seite | Besonderheit              |
|------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|---------------------------|
| 0                | $\frac{2\mathfrak{A}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$                                          | 0                              | $\pi$                                                               | 0                                                                                       |                                      | Spitze<br>Maximum von $r$ |
| $\downarrow$     | $\uparrow$                                                                                       | $\downarrow$                   | $\uparrow$                                                          | $\downarrow$                                                                            | konvex                               |                           |
| $v_2$            | $\frac{\sqrt{2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$              | $\varphi(v_2) < \frac{\pi}{2}$ | $\pi - \arcsin \frac{1}{\sqrt{2(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2)}}$ | $+\infty$<br>$-\infty$                                                                  |                                      | Wendepunkt                |
| $\downarrow$     | $\uparrow$                                                                                       | $\downarrow$                   | $\uparrow$                                                          | $\downarrow$                                                                            | konkav                               |                           |
| $\bar{\omega}_2$ | $\frac{2(\mathfrak{A}\mathfrak{D} - \mathfrak{B}\mathfrak{E})}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}$ | $\Phi$                         | $\frac{\pi}{2}$                                                     | $\frac{2\mathfrak{A}\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{E}}$ |                                      | Minimum von $r$           |

$\varphi(v_2) < \frac{\pi}{2}$  ergibt sich folgendermaßen: Für  $v \leq v_2$  ist  $V'' = 2\mathfrak{A}\mathfrak{B}ch2V \geq \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2$  („=“ nur für  $v = v_2$ ), also

$$\varphi(v_2) = \int_0^{v_2} \frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) dv}{1 + V'^2} < \int_0^{+\infty} \frac{d|V'|}{1 + |V'|^2} < \int_0^{\infty} \frac{d|V'|}{1 + |V'|^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Der Verlauf der Kr.-L.  $u = 0$  im 1. Falle  $\left(\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{2}\right)$  ergibt sich, indem man einfach aus vorstehender Tabelle die auf  $v_2$  bezügliche Reihe wegläßt.

$$\mathfrak{B}\mathfrak{D} - \mathfrak{A}\mathfrak{E} \leq 0, \text{ je nachdem } \mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 \leq \frac{1}{2}.$$

#### f) Die räumliche R.-K. im $\mathfrak{E}_3$ .

Eine solche tritt nur auf, soweit  $w(\bar{\omega}_2) > w_2$ , also  $\mathfrak{A}^2 - \mathfrak{B}^2 > \frac{1}{2}$  ist. In diesem Falle gilt für ihre Abwicklung wörtlich das für den Fall (33) in § 8, V f (S. 52) Gesagte. Nur ist dort  $\bar{\omega}_1$  durch  $\bar{\omega}_2$  zu ersetzen und dann bei  $\bar{z}(\bar{\omega}_2)$  der dortige Zusatz „< Z“ wegzulassen. Fig. 67.

Die Projektion der R.-K. auf die Ebene  $z = 0$  bildet mit dem Radiusvektor bei  $v = v_2$  einen stumpfen, bei  $v = \bar{\omega}_2$  einen rechten Winkel. Wenn  $\varphi$  wächst, nimmt dieser Winkel zwischen den genannten Grenzen monoton ab, solange  $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} \leq 2 + \sqrt{3}$  ist. Ist aber  $\frac{\mathfrak{E}}{\mathfrak{D}} > 2 + \sqrt{3}$ , so nimmt er zuerst ab bis zu einem Minimum  $> \frac{\pi}{2}$ , wächst hierauf bis

zu einem Maximum  $< \pi$  und nimmt dann erst wieder gegen  $\frac{\pi}{2}$  ab. Die Projektion hat bei  $\vartheta = \vartheta'$  einen Wendepunkt und kehrt dem Pol  $r = 0$  für  $\vartheta < \vartheta'$  die konvexe, für  $\vartheta > \vartheta'$  die konkave Seite zu.  $r_s$  nimmt monoton ab, wenn  $\varphi$  wächst.

g) Beziehung zwischen den reellen Elementarbereichen  $\mathfrak{E}_\vartheta$  und  $\tilde{\mathfrak{E}}_\vartheta$  zweier Flächen  $\mathfrak{f}(\mathfrak{A}, \mathfrak{B})$  und  $\tilde{\mathfrak{f}}(q\mathfrak{A}, q\mathfrak{B})$ .

Ersetzt man in § 8, V g (S. 52)  $\bar{\omega}_1$  und  $\tilde{\bar{\omega}}_1$  durch  $\bar{\omega}_2$  bzw.  $\tilde{\bar{\omega}}_2$ , so läßt sich der dortige Beweis wörtlich übertragen und führt zu dem

**Satz 25:** Innerhalb der Flächenschar  $\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \text{const.}$  wird, wenn  $\mathfrak{A}$  und  $\mathfrak{B}$  abnehmen, der Formenreichtum der Kr.-Ln.  $\vartheta$  des  $\mathfrak{E}_\vartheta$  geringer. Der Abbau erfolgt von der Seite  $\vartheta = \bar{\omega}_2$  her.

h) Beziehungen zwischen den Kr.-Ln. der nämlichen Fläche.  
(Vgl. § 10, II, S. 57.)

1. Sind  $\vartheta_a$  und  $\vartheta_b$  zwei im übrigen beliebige Werte von  $\vartheta$ , welche der Bedingung genügen:  $\vartheta_a + \vartheta_b = \bar{\omega}_2$ , so bestehen zwischen den Funktionen von  $\vartheta_a$  und  $\vartheta_b$  folgende Beziehungen:

$$V'_a V'_b = \mathfrak{E}^2 + \mathfrak{D}^2; \quad -\frac{(Y_1)_a}{(Y_2)_b} = \frac{V'_a}{\mathfrak{D} + i\mathfrak{E}} = \frac{\mathfrak{D} - i\mathfrak{E}}{V'_b}. \quad (13; 2)$$

Daraus folgt u. a.

**Satz 26, 1:** Wenn  $\vartheta_a + \vartheta_b = \bar{\omega}_2$ , dann:  $\Phi - \varphi_a - \varphi_b = \arctg \left[ \frac{(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) V'}{-V''} \right]_{a \text{ oder } b}$ .

2. Analog ergibt sich, falls  $u_a + u_b = \omega_2$  und  $w_a + w_b = \omega_2$  ist:

$$\begin{aligned} U'_a U'_b &= \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2; \quad \frac{(X_1)_a}{(X_2)_b} = \frac{U'_a}{\mathfrak{B} + i\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{B} - i\mathfrak{A}}{U'_b}; \\ W_a W_b &= \mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2; \quad \frac{(Y_1)_a}{(Y_2)_b} = \frac{W_a}{\mathfrak{B} + i\mathfrak{A}} = \frac{\mathfrak{B} - i\mathfrak{A}}{W_b}. \end{aligned} \quad (13; 3)$$

Daraus u. a.

**Satz 26, 2:** Wenn  $u_a + u_b = \omega_2$  und  $w_a + w_b = \omega_2$ , dann:

$$z_a + z_b = Z; \quad \frac{r_a}{r_b} = \left( \frac{W}{U'} \right)_a = \left( \frac{U'}{W} \right)_b; \quad |R''_a R''_b| = \frac{1}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2};$$

ferner:

$$\frac{ch(U+V)_a}{ch(U+V)_b} = \frac{(U'W)_a}{(U'W)_b} = \frac{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2}; \quad sh(U+V)_a = \left( \frac{-S}{U'W} \right)_b. \quad (13; 4)$$

3. Aus der dadurch zwischen den Kurven  $S = 0$  und  $U + V = 0$  hergestellten Beziehung schließt man wie früher:

Satz 26, 3: Wenn  $w_a + w_b = \omega_2$ , dann:

$$(u_m)_a + (u_s)_b = \omega_2; (z_m)_a + (z_s)_b = Z; \text{ speziell } z_m \left( \frac{\omega_2}{2} \right) + z_s \left( \frac{\omega_2}{2} \right) = Z. \quad \text{Fig. 81.}$$

4. Mit Hilfe der Kr.-L.  $w = 0$  lassen sich die übrigen Kr.-Ln.  $w$  genau so herstellen, wie dies in § 10, III (S. 59) für (11) b angegeben wurde. Wo dort  $\omega_1$ , muß hier  $\omega_2$  stehen.

### i) Die ganze Fläche.

Folgende Symmetrieelemente treten reell auf ( $\pm l, \pm l' = 0, 1, 2 \dots$  unabhängig voneinander) (Fig. 79):

S.-Zentren  $u = (2l + 1) \omega_2$ ;

S.-Ebenen senkrecht zur Achse  $u = 2l \omega_2$ ;

S.-Ebenen durch die Achse  $v = l \bar{\omega}_2$ ;

S.-Achsen: die Lote auf die Achse in den Ebenen  $v = l \bar{\omega}_2$  durch die Punkte  $u = 2l' \omega_2$ ;

die Lote auf die Achse senkrecht zu den Ebenen  $v = l \bar{\omega}_2$  durch die Punkte  $u = (2l' + 1) \omega_2$ .

Demnach läßt sich die ganze Fläche aus dem  $\mathfrak{E}_0$  folgendermaßen herstellen:

1. Man spiegle den  $\mathfrak{E}_0$  an der Ebene  $v = \bar{\omega}_2$ ;
2. man nehme zu dem so entstandenen Bereich alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Drehung um die Achse vom Betrage  $2l\Phi$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) hervorgehen;
3. man spiegle an der Ebene  $u = 0$ ;
4. man lasse das Ergebnis von 3 eine Drehung vom Betrage  $\pi$  um das auf der Ebene  $v = 0$  im Punkte  $u = \omega_2$  errichtete Lot ausführen;
5. man nehme zu dem ganzen jetzt vorhandenen Gebilde alle diejenigen hinzu, die aus ihm durch Translation ohne Drehung längs der Flächenachse vom Betrage  $4lZ$  ( $\pm l = 1, 2, 3 \dots$ ) entstehen.

### k) Grenzübergang zu $\mathfrak{B} = 0$ .

$\mathfrak{B} \rightarrow 0$  bei konstantem  $\mathfrak{A}$  führt auf  $\mathfrak{C} \rightarrow 0, \mathfrak{D} > 0$ , oder auf  $\mathfrak{D} \rightarrow 0, \mathfrak{C} > 0$ , je nachdem  $\mathfrak{A} < 1$  oder  $\mathfrak{A} > 1$  ist; für  $\mathfrak{A} = 1$  aber auf  $\mathfrak{C} = \mathfrak{D} = 0$ .

Falls  $\mathfrak{A} < 1$  ist, erhält man ( $\pm l, \pm l' = 0, 1, 2 \dots$  unabhängig voneinander):

beim Festhalten des Punktes

als Grenzgebilde

$u = (2l + 1) \omega_2, v$  beliebig

die Achse;

$u = 4l \omega_2, v = 2l' \bar{\omega}_2$

die Hauptfläche {33} in der Lage des § 9, III;

$u = (4l + 2) \omega_2, v = 2l \bar{\omega}_2$

die nämliche Fläche, jedoch gegen früher an der Ebene  $x = 0$  gespiegelt.

Für  $\mathfrak{A} > 1$  gilt nebenstehende Übersicht. Sie ist ebenso zu deuten und analog für weitere Wertpaare  $u, v$  fortzusetzen wie die entsprechenden Übersichten in § 7 und § 9.  $H_a, H'_a, H_b, R, L$  bedeuten das nämliche wie dort.  $H'_b$  bedeutet die aus  $H_b$  durch Spiegelung an der Ebene  $x = 0$  hervorgehende, gestaltlich mit  $H_b$  identische Fläche.

Für  $\mathfrak{A} = 1$  tritt an Stelle von  $H_a$  und  $H'_a$  die Achse, an Stelle von  $R$  und  $L$  die Pseudosphäre, an Stelle von  $H_b$  und  $H'_b$  die Komplementärfläche  $\{22\}$  b der Pseudosphäre.

|                       |                             |        |                            |                  |
|-----------------------|-----------------------------|--------|----------------------------|------------------|
| $3\omega_2$           |                             |        |                            | $H_a$            |
| $\frac{5\omega_2}{2}$ | L                           |        | R                          |                  |
| $2\omega_2$           |                             | $H'_b$ |                            |                  |
| $\frac{3\omega_2}{2}$ | R                           |        | L                          |                  |
| $\omega_2$            |                             |        |                            | $H'_a$           |
| $\frac{\omega_2}{2}$  | L                           |        | R                          |                  |
| 0                     |                             | $H_b$  |                            |                  |
| $-\frac{\omega_2}{2}$ | R                           |        | L                          |                  |
| $u \backslash v$      | $-\frac{\bar{\omega}_2}{2}$ | 0      | $\frac{\bar{\omega}_2}{2}$ | $\bar{\omega}_2$ |

### DRITTER TEIL.

## BÄCKLUNDSCHES TRANSFORMATION DER E-FLÄCHEN.<sup>52</sup>

### § 14. DIE E-FLÄCHEN ALS IHRE EIGENEN TRANSFORMIERTEN.

Den Untersuchungen dieses Paragraphen soll wieder der Flächenbegriff in der Allgemeinheit des I. Teiles zugrunde gelegt werden.

Im II. Teil fiel auf, daß die Komplementärflächen der Rotationsflächen mit diesen entweder nur analytisch oder sogar reell-asymptotisch zu einer einzigen Fläche vereinigt sind. Dies ist nur ein Sonderfall des folgenden nunmehr zu beweisenden Satzes:<sup>53</sup>

*Satz 27: Unter den Flächen, welche aus einer gegebenen nicht entarteten E-Fl.  $F$  durch eine gegebene Bäcklundsche Transformation  $B_\tau$  hervorgehen,<sup>54</sup> befinden sich genau zwei, nur für eine isolierte Menge von  $\tau$ -Werten zusammenfallende E-Fln., deren ebene Kr.-Ln. den ebenen Kr.-Ln. von  $F$  entsprechen. Diese Flächen sind gestaltlich mit  $F$  identisch und gehen der Lage nach aus  $F$  durch eine Schraubung um die Achse hervor.*

Der Satz bleibt auch für alle Entartungsfälle gültig, wenn man zur Überführung eines Grenzgebildes in ein anderes unendliche Schraubungen zuläßt und anstatt „genau zwei“ liest „mindestens zwei“. Hier kann nämlich auch der Fall eintreten, daß alle Transformierten von dieser speziellen Art sind.

Beim Beweis des Satzes setzen wir wieder zur Vermeidung von Weiterungen voraus, daß  $F$  eine nicht entartete Fläche und außerdem  $B_\tau$  nicht die Identität ( $\cos \tau = 0$ ) sei. Auch hier bleiben aber die Ergebnisse für die Entartungsfälle gültig, soweit sie dort überhaupt noch sinnvoll sind.

Wir beweisen den Satz in vier Schritten.

a) *Es gibt zwei eventuell zusammenfallende E-Fln., welche aus  $F$  mittels  $B_\tau$  hervorgehen, und deren ebene Kr.-Ln. den ebenen Kr.-Ln. von  $F$  entsprechen.*

Sei  $F_\tau$  eine solche spezielle Transformierte (falls es überhaupt eine solche gibt). Alle auf  $F_\tau$  bezüglichen Größen sollen ebenso bezeichnet werden, wie die entsprechenden bei  $F$ , aber den Index  $\tau$  erhalten.

$F$  und  $F_\tau$  sollen E-Fln. mit ebenen Kr.-Ln.  $v$  sein; also:

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = e^{U+V}; \quad \operatorname{tg} \frac{\vartheta_\tau}{2} = e^{U_\tau+V_\tau}; \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial U_\tau}{\partial v} = \frac{\partial V_\tau}{\partial u} = 0. \quad (14; 1)$$

<sup>52</sup> Bianchi, Lezioni S. 715 ff.; Darboux, III. Teil, S. 433 ff.; Enzyklopädie III 3, S. 341 ff. u. 416 ff.

<sup>53</sup> Vgl. die Sätze bei Bianchi, Lezioni S. 709—714.

<sup>54</sup> Statt der üblichen Bezeichnung  $B_\sigma$  hier  $B_\tau$  zum Unterschied von den so häufig vorkommenden  $\sigma$ -Funktionen.



$F_\tau$  soll aus  $F$  mittels  $B_\tau$  hervorgehen; d. h.

$$\begin{aligned} \cos \tau \left( \frac{\partial \vartheta_\tau}{\partial u} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} \right) &= \cos \vartheta \sin \vartheta_\tau + \sin \tau \sin \vartheta \cos \vartheta_\tau; \\ - \cos \tau \left( \frac{\partial \vartheta_\tau}{\partial v} + \frac{\partial \vartheta}{\partial u} \right) &= \sin \vartheta \cos \vartheta_\tau + \sin \tau \cos \vartheta \sin \vartheta_\tau. \end{aligned} \quad (14; 2)$$

Mittels (14; 1) geht (14; 2) über in

$$\begin{aligned} U'_\tau \cos \tau \operatorname{ch}(U + V) + V' \cos \tau \operatorname{ch}(U_\tau + V_\tau) + s h(U + V) + \sin \tau s h(U_\tau + V_\tau) &= 0; \\ U' \cos \tau \operatorname{ch}(U_\tau + V_\tau) + V'_\tau \cos \tau \operatorname{ch}(U + V) - s h(U_\tau + V_\tau) - \sin \tau s h(U + V) &= 0. \end{aligned} \quad (14; 3)$$

Zufolge (14; 3) würde  $U'_\tau \equiv 0$  auf  $U' \equiv 0$  und  $V'_\tau \equiv 0$  auf  $V' \equiv 0$  führen, und damit zu einem Widerspruch gegen unsere Voraussetzung, daß  $F$  nicht entartet sei. Demnach kann weder  $U'_\tau$  noch  $V'_\tau$  identisch verschwinden. Dann ergibt sich, wenn man die erste Gleichung (14; 3) nach  $v$  differenziert und dann  $U'_\tau$  und  $V'_\tau$  aus der neuen Gleichung und den beiden Gleichungen (14; 3) eliminiert:

$$\begin{aligned} e^{U_\tau + V_\tau} (U' \cos \tau - 1) (V' \cos \tau + \sin \tau) - e^{-(U_\tau + V_\tau)} (U' \cos \tau + 1) (V' \cos \tau - \sin \tau) \\ + 2 [S \cos^2 \tau - s h(U + V)] = 0. \end{aligned} \quad (14; 4)$$

Daraus durch Auflösung nach einigen Umformungen:

$$\begin{aligned} e^{U_\tau + V_\tau} &= \frac{i(bX_1 + aX_2)(V' \cos \tau - \sin \tau)}{(bY_1 - aY_2)(U' \cos \tau - 1)} = \frac{i(bY_1 + aY_2)(U' \cos \tau + 1)}{(bX_1 - aX_2)(V' \cos \tau + \sin \tau)} \\ &= \frac{-i(aX_2 + bX_1)(aY_2 + bY_1)}{(A^2 - B^2)(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} = \frac{(A^2 - B^2)(U' \cos \tau + 1)(V' \cos \tau - \sin \tau)}{i(aX_2 - bX_1)(aY_2 - bY_1)}. \end{aligned} \quad (14; 5)$$

Hierbei sind als fernerhin ständig zu gebrauchende Abkürzungen eingeführt:

$$a = \sqrt{A^2 \cos^2 \tau - 1} = \sqrt{C^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \tau}; \quad b = \sqrt{B^2 \cos^2 \tau - 1} = \sqrt{D^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \tau}. \quad (14; 6)$$

Beide Wurzeln sollen zunächst zweideutig bleiben. Da in  $e^{U_\tau + V_\tau}$  nur ihr Verhältnis oder ihr Produkt eingeht, ist auch dieser Ausdruck nur zweideutig und darf man daher  $a$  oder  $b$  beliebig eindeutig wählen.

Eine Unterscheidung der beiden Fälle ist vorerst noch nicht nötig. Teil b und c des Beweises bleiben richtig, wenn man nach beliebiger, aber fester Wahl eines Wertpaares  $a, b$  dieses konsequent festhält, also unter  $F_\tau$  eine beliebige der beiden Transformaten, aber überall die nämliche versteht.

Aus (14; 5) liest man ab, daß tatsächlich  $e^{U_\tau + V_\tau}$  das Produkt einer Funktion von  $u$  allein und einer Funktion von  $v$  allein ist, wie es (14; 1) verlangt, und daß die beiden Werte von  $e^{U_\tau + V_\tau}$  nur dann zusammenfallen, wenn wenigstens eine der Größen  $a$  und  $b$  verschwindet.

Aus (14; 5) erhält man durch Differenzieren:

$$U'_\tau = \frac{-X_1 X_2 \cos \tau + ab U'}{U'^2 \cos^2 \tau - 1}; \quad V'_\tau = \frac{Y_1 Y_2 \cos \tau \sin \tau + ab V'}{V'^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \tau}. \quad (14; 7)$$

Mittels (14; 5), (14; 7) und der für  $\mathbf{F}$  geltenden Beziehungen werden die Gleichungen (14; 3) nunmehr identisch befriedigt.

b) Jede der beiden Flächen  $\mathbf{F}_\tau$  ist mit  $\mathbf{F}$  gestaltlich identisch.

Wir definieren:

$$\begin{aligned} (X_1)_\tau &\equiv \frac{i(aU'X_2 \cos \tau + bX_1)}{U'^2 \cos^2 \tau - 1}; & (X_2)_\tau &\equiv \frac{i(bU'X_1 \cos \tau + aX_2)}{U'^2 \cos^2 \tau - 1} \\ (Y_1)_\tau &\equiv \frac{i(aV'Y_2 \cos \tau - bY_1 \sin \tau)}{V'^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \tau}; & (Y_2)_\tau &\equiv \frac{i(bV'Y_1 \cos \tau - aY_2 \sin \tau)}{V'^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \tau}. \end{aligned} \quad (14; 8)$$

Wir definieren ferner zwei Größen  $c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$  durch die verträglichen Gleichungen:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} c_\tau &= \frac{1}{\cos \tau}; & \frac{\sigma_\mu}{\sigma} c_\tau &= \frac{-ia}{\cos \tau}; & \frac{\sigma_\nu}{\sigma} c_\tau &= \frac{-ib}{\cos \tau}; \\ \frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} \bar{c}_\tau &= -\operatorname{tg} \tau; & \frac{\bar{\sigma}_\mu}{\sigma} \bar{c}_\tau &= \frac{-ia}{\cos \tau}; & \frac{\bar{\sigma}_\nu}{\sigma} \bar{c}_\tau &= \frac{-ib}{\cos \tau}. \end{aligned} \quad (14; 9)$$

Die Funktionszeichen sollen das nämliche bedeuten wie bei  $\mathbf{F}$  für das Argument  $u$  bzw.  $v$ .

$c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$  hängen nur von  $A, B$  und  $\tau$  ab und sind nach eindeutiger Wahl von  $a$  und  $b$  endlich und eindeutig bis auf geeignete additive Vielfache ganzer Perioden, die vorläufig unbestimmt bleiben mögen, aber im Bedarfsfall beliebig eindeutig gewählt werden dürfen.

Mittels (14; 7), (14; 8), (14; 9) und der  $\sigma$ -Additionstheoreme verifiziert man nun:

$$\begin{aligned} U'_\tau &= \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} (u + c_\tau); & (X_1)_\tau &= -\frac{\sigma_\mu}{\sigma} (u + c_\tau); & (X_2)_\tau &= \frac{\sigma_\nu}{\sigma} (u + c_\tau); \\ V'_\tau &= -\frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} (v + \bar{c}_\tau); & (Y_1)_\tau &= \frac{\bar{\sigma}_\mu}{\sigma} (v + \bar{c}_\tau); & (Y_2)_\tau &= \frac{\bar{\sigma}_\nu}{\sigma} (v + \bar{c}_\tau). \end{aligned} \quad (14; 10)$$

Diese Gleichungen gehen aber aus (1; 15) (S. 10) dadurch hervor, daß man, wo nötig, den Index  $\tau$  anhängt und  $u, v$  durch  $u + c_\tau, v + \bar{c}_\tau$  ersetzt. Man weist nun leicht nach, daß Analoges auch für die übrigen Gleichungen des § 1 gilt [insbesondere für (1; 13)]; diese bestimmen aber, wie aus § 2 erhellt, die Gestalt der Fläche eindeutig.

c) Jede der beiden Flächen  $\mathbf{F}_\tau$  geht der Lage nach durch eine Schraubung aus  $\mathbf{F}$  hervor.

Die Koordinaten des dem Punkt  $x, y, z$  von  $\mathbf{F}$  entsprechenden Punktes von  $\mathbf{F}_\tau$  lauten:<sup>55</sup>

$$\begin{aligned} x_\tau &= x + R \cos \tau (\cos \vartheta_\tau \cos \alpha' + \sin \vartheta_\tau \cos \alpha''); \\ y_\tau &= y + R \cos \tau (\cos \vartheta_\tau \cos \beta' + \sin \vartheta_\tau \cos \beta''); \\ z_\tau &= z + R \cos \tau (\cos \vartheta_\tau \cos \gamma' + \sin \vartheta_\tau \cos \gamma''). \end{aligned} \quad (14; 11)$$

Daraus erhält man unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse nach etwas umständlicher Umformung:

<sup>55</sup> Bianchi, Lezioni S. 716.

$$\begin{aligned} x_\tau(u, v) &= r_\tau(u, v) \cos \varphi_\tau(v); & y_\tau(u, v) &= r_\tau(u, v) \sin \varphi_\tau(v); \\ z_\tau(u, v) &= \frac{R}{AB} \left[ \int U'^2 du - U'_\tau \tanh(U_\tau + V_\tau) + U' U'_\tau \cos \tau \right]. \end{aligned} \quad (14; 12)$$

Dabei ist:

$$\begin{aligned} r_\tau(u, v) &= \sqrt{x_\tau^2 + y_\tau^2} = \frac{RW_\tau}{ABch(U_\tau + V_\tau)}; & \varphi_\tau(v) &= \varphi(v) + \psi_\tau(v); \\ \cos \psi_\tau(v) &= \frac{-abW^2 \sin \tau - V'V'' \cos \tau}{WW_\tau(V'^2 \cos^2 \tau - \sin^2 \tau)};^{56} & \sin \psi_\tau(v) &= \frac{AB \cos \tau}{WW_\tau}. \end{aligned} \quad (14; 13)$$

$\int U'^2 du$  bedeutet das nämliche wie in  $z(u, v)$ .

Die kartesischen Koordinaten  $x_\tau, y_\tau, z_\tau$  sind nach (14; 11) eindeutig,  $r_\tau$  und  $\varphi_\tau$  aber zunächst nicht, und zwar wegen der Zweideutigkeit von  $W_\tau = \sqrt{1 + V_\tau'^2}$ . Nun dürfen wir wenigstens, vorbehaltlich späterer Verschärfung, o. B. d. A. über  $W_\tau$  analog verfügen wie in § 2 über  $W$ , indem wir ein für allemal verlangen:

Zwischen  $W_\tau$  und  $v + \bar{c}_\tau$  soll die nämliche durch (2; 13) und (2; 14) (S. 14) dargestellte Beziehung bestehen wie zwischen  $W$  und  $v$ . Dadurch wird

$$r_\tau(u, v) = r(u + c_\tau, v + \bar{c}_\tau). \quad (14; 14)$$

$\psi_\tau(v)$  ist der Winkel, den eine Kr.-L.  $v$  von  $\mathbf{F}$  mit der entsprechenden Kr.-L. von  $\mathbf{F}_\tau$  bildet. Für  $v + \bar{c}_\tau = 0$  wird nun  $\sin \psi_\tau = 0$ , liegen also beide Kr.-Ln. in einer Ebene. Nach den Eigenschaften der Bäcklundschen Transformation muß aber die Verbindungslinie entsprechender Punkte beide Flächen berühren und die Länge  $R \cos \tau = \pm \frac{R}{W(v = -\bar{c}_\tau)}$  haben. Damit ist Satz 6 (S. 18) wiedergewonnen und gleichzeitig einsichtiger geworden.

Aus (14; 12), (14; 13) und (14; 14) liest man ab, daß beide Flächen die nämliche Achse haben, also  $\mathbf{F}_\tau$  aus  $\mathbf{F}$  durch eine Schraubung hervorgeht; letztere wird explizit dargestellt durch die Gleichungen:

$$\begin{aligned} \Delta_\tau(z) &\equiv z_\tau(u, v) - z(u + c_\tau, v + \bar{c}_\tau) = \frac{R}{AB} \left( \frac{\sigma'_\lambda}{\sigma_\lambda} c_\tau + e_\lambda c_\tau \right); \\ \Delta_\tau(\varphi) &\equiv \varphi_\tau(v) - \varphi(v + \bar{c}_\tau) = \varphi(-\bar{c}_\tau) - c_\varphi \pm \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (14; 15)$$

wobei das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem  $W(v = -\bar{c}_\tau)$  gleich  $+\frac{1}{\cos \tau}$  oder gleich  $-\frac{1}{\cos \tau}$  ist.  $\Delta_\tau(\varphi)$  ist nur bis auf additive Vielfache von  $2\pi$  bestimmt.

Abgesehen davon sind  $\Delta_\tau(z)$  und  $\Delta_\tau(\varphi)$  noch ebenso vieldeutig wie  $c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$ . Dies bedeutet, daß die Deckung von  $\mathbf{F}_\tau$  und  $\mathbf{F}$  infolge der Periodizitäts- und Symmetrieeigen-

<sup>56</sup> Für  $\tau \neq 0$  einfacher:  $\cos \psi_\tau(v) = \frac{ab - V'V'_\tau}{WW_\tau \sin \tau}$ .

schatten beider Flächen noch auf unendlich viele Arten möglich ist, unter denen eine beliebig ausgewählt werden darf.

d) Die beiden speziellen Transformaten fallen nur für eine isolierte Menge von  $\tau$ -Werten zusammen.

Sind nämlich  $c'_\tau$  und  $c''_\tau$  die zu entgegengesetzten Werten von  $ab$  gehörigen Werte von  $c_\tau$ , so darf man nach (14; 9) o. B. d. A. setzen:  $c'_\tau + c''_\tau = 2\omega_\mu$ , also

$$\Delta'_\tau(z) + \Delta''_\tau(z) = \frac{2R}{AB} (\eta_\mu + e_\lambda \omega_\mu) \equiv \Delta_\mu. \quad (14; 16)$$

Sollen nun die beiden Transformaten  $F'_\tau$  und  $F''_\tau$  zusammenfallen, so muß die weitere Gleichung bestehen:

$$\Delta'_\tau(z) - \Delta''_\tau(z) = \Delta_{id}. \quad (14; 17)$$

$\Delta_{id}$  bedeutet eine Verschiebung, welche, in Verbindung mit einer geeigneten Drehung, instande ist,  $F$  in sich selbst überzuführen, kann also nur isolierte Werte annehmen.

Aus (14; 16) und (14; 17) folgt:

$$2\Delta'_\tau(z) = \Delta_\mu + \Delta_{id}. \quad (14; 18)$$

Diese Gleichung besteht sicher nicht identisch, sondern nach Abwerfung aller für  $c_\tau$  belanglosen Vielfachen von  $4\omega_l$  und  $4\eta_l$  ( $l = 1, 2, 3$ ) ergibt sich nur noch eine endliche Anzahl von  $c_\tau$ -Werten, welche (14; 18) erfüllen. Ihnen entspricht zufolge  $\frac{\sigma_\lambda}{\sigma} c_\tau = \frac{1}{\cos \tau}$  eine isolierte Menge von  $\tau$ -Werten, darunter jedenfalls die Lösungen der Gleichungen:

$$a = 0; \quad b = 0; \quad \cos \tau = 0.$$

Für  $\cos \tau = 0$  fällt überdies noch  $F$  mit  $F'_\tau$  und  $F''_\tau$  zusammen.

Die analoge Untersuchung für  $\bar{c}_\tau$  führt zu dem nämlichen Ergebnis.

Der Bianchische „Vertauschbarkeitssatz“ ist für unsere speziellen, durch Schraubungen dargestellten Transformationen trivial.

## § 15. ANWENDUNG AUF DIE REELLEN FLÄCHEN.

a) Unter Zugrundelegung der Definitionen und Vereinbarungen des § 4 soll hier ohne Durchführung der einfachen Rechnungen, Grenzübergänge und Beweise nur ein knapper Überblick über die Fälle gegeben werden, in denen im Sinn des § 14 einer reellen Ausgangsfläche  $f$  eine reelle Transformierte  $f_\tau$  entspricht.

Dazu ist notwendig und hinreichend, daß  $R$ ,  $\tau$  und  $ab$  reell sind. Es handelt sich also um die im II. Teil untersuchten Flächen. Wir dürfen o. B. d. A. wie dort  $R = 1$  wählen

und wollen außerdem die Ausgangsfläche  $f$  stets in der „Normallage“ zum Koordinatensystem voraussetzen, in der sie dort beschrieben wurde.

Um die Fläche  $f_\tau$  aus der Normallage, welche ihr in dem Koordinatensystem, auf welches  $f$  bezogen ist, zukäme, in die richtige Lage gegenüber  $f$  zu bringen, muß man ihr eine bestimmte Verschiebung  $\Delta_\tau z$  längs der Achse und eine bestimmte Drehung  $\Delta_\tau \varphi$  um die Achse erteilen. Diese ohne Klammern geschriebenen Größen unterscheiden sich von den mit Klammern geschriebenen in (14; 15) im allgemeinen um additive imaginäre Konstante. Ist  $f_\tau$  eine Rotations- oder Schraubenfläche, so darf man o. B. d. A.  $\Delta_\tau \varphi = 0$  setzen.

Wo die Abhängigkeit vom Vorzeichen der Größe  $ab$  betont werden soll, wird genauer geschrieben  $B_\tau(ab)$ ,  $f_\tau(ab)$  usw.

b) Es genügt, die Untersuchung für die Werte  $0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$  und einen der beiden möglichen Werte von  $ab$  durchzuführen. Die übrigen Transformaten der nämlichen Ausgangsfläche sind dann durch die nachfolgenden Sätze 28 bestimmt. Diese gelten in der angegebenen Form für den Fall, daß zu einem Wert von  $\tau$  genau zwei (eventuell zusammenfallende) Flächen  $f_\tau(ab)$  und  $f_\tau(-ab)$  gehören. Für die Fälle, in welchen  $\infty^1$  Flächen  $f_\tau$  zu einem Wert von  $\tau$  gehören, sind sie dahin zu deuten, daß jeder der  $\infty^1$  Flächen  $f_\tau(ab)$  eineindeutig eine der  $\infty^1$  Flächen  $f_{\tau*}(a*b*)$  bzw.  $f_{-\tau}(ab)$  oder  $f_\tau(-ab)$  im Sinne des jeweiligen Satzes entspricht.

#### Satz 28:

1.  $f_\tau(ab)$  ist identisch mit  $f_{\tau*}(a*b*)$ , wenn  $\tau* = l\pi + (-1)^l \tau$  und  $a*b* = (-1)^l ab$  ( $\pm l = 0, 1, 2 \dots$ ) ist.
2. Entsteht  $f'$  aus  $f$  und  $f'_\tau$  aus  $f_\tau$  durch Spiegelung an der Ebene  $y = 0$ , und wird  $f$  durch  $B_\tau(ab)$  in  $f_\tau$  transformiert, so wird  $f'$  durch  $B_{-\tau}(ab)$  in  $f'_\tau$  transformiert.
3.  $f_\tau(-ab)$  geht aus  $f_\tau(ab)$  hervor durch Umwendung um die in der Ebene  $z = 0$  liegende Symmetrieachse der Kr.-L.  $\varphi = 0$  von  $f$ . Diese S.-Achse ist, wenn  $f$  vom Typus  $a$  ist,<sup>57</sup> die  $y$ -Achse, in allen übrigen Fällen, einschließlich der Schraubenflächen, die  $x$ -Achse.

Satz 28, 2 läßt sich aufspalten in die beiden einfacheren:

- 2a) Ist  $f$  keine Schraubenfläche, so geht  $f_\tau(ab)$  durch Spiegelung an der Ebene  $y = 0$  in  $f_{-\tau}(ab)$  über.
- 2b) Spiegelt man die Fläche, in welche  $R$  durch  $B_\tau(ab)$  übergeht, an der Ebene  $y = 0$ , so erhält man die Fläche, in welche  $L$  durch  $B_{-\tau}(ab)$  übergeht.

Für  $\tau = 0$  fällt selbstverständlich  $f_{-\tau}(ab)$  mit  $f_\tau(ab)$  zusammen; für  $\tau = \frac{\pi}{2}$  werden  $f_\tau(\pm ab)$ ,  $f_{-\tau}(\pm ab)$  und  $f$  identisch.

<sup>57</sup> D. h. (11)a, [12]a und  $H_a$ ; dagegen ist es konsequenter, {22}a, wo der Unterschied belanglos wird, zu den Schraubenflächen zu rechnen.

Ist  $ab = 0$ , so fällt  $f_\tau(ab)$  mit  $f_\tau(-ab)$  zusammen mit Ausnahme des einzigen Falles, in dem  $f$  und  $f_\tau$  gleichgewundene, und zwar für  $0 < \tau = \arctg C < \frac{\pi}{2}$  linksgewundene Schraubenflächen sind. Dieses abweichende Verhalten erklärt sich daraus, daß für  $U' = A$ ,  $V' = C$ ,  $\tau = \arctg C$  Gleichung (14; 4) identisch befriedigt wird, also auf die beiden Gleichungen (14; 3) zurückgegriffen werden muß.

Aus der gestaltlichen Identität von  $F$  und  $F_\tau$  folgt nicht notwendig die gestaltliche Identität von  $f$  und  $f_\tau$ ; es kann vielmehr sehr wohl ein reeller Bereich von  $F$  in einen anderen transformiert werden, z. B. (11)a in (11)b.

Der Ausnahmefall, daß  $\infty^1$  Flächen  $f_\tau$  existieren, welche dann alle überhaupt möglichen Bäcklund'schen Transformierten von  $f$  darstellen, kann nur eintreten, wenn  $f$  eine Rotationsfläche (einschließlich der Achse) oder Schraubenfläche ist. In diesem Fall erhält man alle Flächen  $f_\tau$ , wenn man sich eine derselben in der richtigen Lage fest mit  $f$  verbunden denkt und dann  $f$  in sich bewegt. In den späteren Übersichten sind diese Ausnahmefälle durch einen Stern (\*) bezeichnet.

c) Im einzelnen ergibt sich folgendes:

#### I. A und B reell.

( $A \geq B \geq 0$ , aber nicht  $A = B = 0$ ); vgl. § 5 bis 11.

Damit bei reellem  $\tau$  auch  $ab$  reell wird, muß entweder

1.  $a^2 \geq b^2 \geq 0$  oder
2.  $b^2 \leq a^2 \leq 0$  sein.

Wir behandeln die beiden Möglichkeiten getrennt.  $a^2 = b^2 = 0$  werde dabei zu 1. gerechnet.

$$1. a^2 \geq b^2 \geq 0 \text{ einschließlich } a^2 = b^2 = 0.$$

Dafür ist notwendig und hinreichend:

$$A \geq B \geq 1 \text{ und } 0 \leq \tau \leq \arctg D.$$

Wir setzen zunächst Nichtentartung voraus und definieren zwei reelle Größen  $c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$  durch die Beziehungen:

$$0 < c_\tau \leq \omega_1; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma} c_\tau = AB \cos \tau; \quad 0 \leq \bar{c}_\tau \leq \bar{\omega}_1; \quad \frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} \bar{c}_\tau = CD \cot \tau. \quad (15; 1)$$

Dann darf man o. B. d. A. setzen,

$$\begin{aligned} \text{wenn } ab \geq 0, \quad c_\tau &= c_\tau + \omega_3; & \bar{c}_\tau &= -\bar{c}_\tau + \bar{\omega}_3; \\ \text{wenn } ab < 0, \quad c_\tau &= -c_\tau + \omega_3 + 2\omega_1; & \bar{c}_\tau &= \bar{c}_\tau + \bar{\omega}_3 - 2\bar{\omega}_1. \end{aligned} \quad (15; 2)$$

Im folgenden bedeutet ferner  $\varphi_a(\bar{c}_\tau)$  den Winkel, der im Sinne des § 6 bei der Fläche (11)a mit den nämlichen Konstanten  $A, B$  wie  $f$  zum Wert  $v = \bar{c}_\tau$  ( $v = \bar{c}_\tau + \bar{\omega}_3$ ) gehört.

$$\Phi + \frac{\pi}{2} = \varphi_a(\bar{\omega}_1).$$

$c_r$ ,  $\bar{c}_r$ ,  $\varphi_a(c_r)$  und der außerdem noch benötigte Ausdruck  $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_r + e_3 c_r \right)$  ändern sich mit  $\tau$  folgendermaßen:

| $\tau$       | $c_r$        | $\bar{c}_r$      | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_r + e_3 c_r \right)$ | $\varphi_a(\bar{c}_r)$ |
|--------------|--------------|------------------|--------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 0            | $c_0 > 0$    | 0                | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_0 + e_3 c_0 \right)$ | 0                      |
| $\downarrow$ | $\downarrow$ | $\downarrow$     | $\uparrow$                                                         | $\downarrow$           |
| $\arctg D$   | $\omega_1$   | $\bar{\omega}_1$ | $-Z$                                                               | $\Phi + \frac{\pi}{2}$ |

$\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_0 + e_3 c_0 \right)$  kann für hinreichend kleine Werte von  $B$  negativ werden, wie der Grenzübergang  $B \rightarrow 1$  zeigt, ist aber sicher positiv, wenn  $c_0 \leq w_1$  (§ 5, e), d. h.  $CD \geq 1$  ist. Denn in diesem Falle gilt für  $0 < u < \omega_1$ :  $\frac{\partial}{\partial u} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} u + e_3 u \right) = -\varphi u + e_3 < 0$ , also

$$\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_0 + e_3 c_0 \right) \geq \frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} w_1 + e_3 w_1 \right) = -z_s (w = 0) > 0,$$

wobei sich  $z_s (w = 0)$  auf die Fläche (11)a bezieht (§ 6, I c).

Grenzwerte bei Entartung:

| Entartungsfall                     | Grenzwerte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [12] $A > B = 1$ , also $\tau = 0$ | $c_r = c_0 = \omega_1$ ; $\bar{c}_r$ unbestimmt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| {11} $A = B > 1$                   | $c_r = \frac{1}{A} \ln \sqrt{\frac{A \cos \tau + 1}{A \cos \tau - 1}}; \quad \bar{c}_r = \frac{1}{C} \ln \sqrt{\frac{C \cos \tau + \sin \tau}{C \cos \tau - \sin \tau}}$ $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_r + e_3 c_r \right) = \cos \tau - c_r; \quad \varphi_a(\bar{c}_r) = \bar{c}_r + \tau$ <p>Für <math>\tau = \arctg C</math> werden <math>c_r</math> und <math>\bar{c}_r</math> unendlich, aber</p> $\lim (A c_r - C \bar{c}_r) = \lim \ln \frac{A \cos \tau + 1}{C \cos \tau + \sin \tau} = \ln \frac{A}{C}$ |
| {22} $A = B = 1$ , also $\tau = 0$ | $c_r$ unendlich; $\bar{c}_r$ unbestimmt                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |

Nachstehende Übersicht 1 gilt für  $ab \geq 0$ .

Mit Ausnahme der Fälle, in denen Schraubenflächen beteiligt sind, liest man aus ihr folgende Gesetzmäßigkeit ab:

*Ist  $f$  vom Typus  $a$ , so ist  $f_r$  vom Typus  $b$  und umgekehrt.*



Übersicht 1.  $a^2 \geq b^2 \geq 0$ .

| f       | $f_\tau(+ ab )$ | $\Delta_\tau z$                                                                                                                 | $\Delta_\tau \varphi$                        | Wertbereich<br>von $A, B$ und $\tau$       |
|---------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------|--------------------------------------------|
| (11) a  | (11) b          | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \epsilon_\tau + e_3 \epsilon_\tau \right)$                                          | $\pi + \varphi_a(\bar{\epsilon}_\tau)$       | $A > B > 1$<br>$0 \leq \tau \leq \arctg D$ |
| (11) b  | (11) a          | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} \epsilon_\tau + e_3 \epsilon_\tau \right)$                                          | $\varphi_a(\bar{\epsilon}_\tau)$             |                                            |
| [12] a* | [12] b          | $-Z$                                                                                                                            | beliebig                                     | $A > B = 1$<br>$0 = \tau = \arctg D$       |
| [12] b  | [12] a          | $-Z$                                                                                                                            | o                                            |                                            |
| $H_a$   | $H_b$           | $\cos \tau - \epsilon_\tau$                                                                                                     | $\pi + \bar{\epsilon}_\tau + \tau$           | $A = B > 1$<br>$0 \leq \tau < \arctg C$    |
| $H_b$   | $H_a$           | $\cos \tau - \epsilon_\tau$                                                                                                     | $\bar{\epsilon}_\tau + \tau$                 |                                            |
| R       | R               | $\cos \tau - \frac{C}{A} \left( \frac{\pi}{2} + \tau \right) - \frac{1}{A} \ln \frac{A \cos \tau + 1}{C \cos \tau - \sin \tau}$ | o                                            |                                            |
| L       | L               | $\cos \tau - \frac{C}{A} \left( \frac{\pi}{2} - \tau \right) - \frac{1}{A} \ln \frac{A \cos \tau + 1}{C \cos \tau + \sin \tau}$ | o                                            |                                            |
| $H_a$   | L <sup>58</sup> | $-\frac{C\pi}{A^2}$                                                                                                             | o                                            |                                            |
| $H_b$   | L               | o                                                                                                                               | o                                            |                                            |
| R       | Achse           | o                                                                                                                               | o                                            | $A = B > 1$<br>$0 < \tau = \arctg C$       |
| Achse*  | R               | beliebig                                                                                                                        | o                                            |                                            |
| L*      | L               | $\frac{1}{A} - \frac{C}{A} \left( \frac{\pi}{2} - \arctg C \right) - \frac{1}{A} \ln \frac{A}{C}$                               | o                                            |                                            |
|         | $H_a$           | beliebig                                                                                                                        | $-\frac{A}{C} \Delta_\tau z + \frac{\pi}{2}$ |                                            |
|         | $H_b$           | beliebig                                                                                                                        | $-\frac{A}{C} \Delta_\tau z$                 |                                            |
| {22} a* | Achse           | o                                                                                                                               | o                                            | $A = B = 1$<br>$0 = \tau = \arctg C$       |
|         | {22} b          | o                                                                                                                               | beliebig                                     |                                            |
| {22} b  | {22} a          | o                                                                                                                               | o                                            |                                            |

<sup>58</sup> Hier wäre anschaulicher die Schreibweise:  $\Delta_\tau z = 0$ ;  $\Delta_\tau \varphi = -\frac{\pi}{2}$ .

$$2. b^2 \leq a^2 \leq 0, \text{ aber nicht } a^2 = b^2 = 0.$$

Dafür ist notwendig und hinreichend:

$$\text{entweder } A > 1 \text{ und } \operatorname{arctg} C \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \text{ (aber nicht } A = B > 1 \text{ und } \tau = \operatorname{arctg} C)$$

$$\text{oder } A \leq 1 \text{ und } 0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2} \text{ (aber nicht } A = B = 1 \text{ und } \tau = 0).$$

Wir definieren wieder zwei reelle Größen  $c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$ , zunächst für den Fall der Nicht-entartung:

$$0 \leq c_\tau \leq \omega_1; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma} c_\tau = \frac{1}{\cos \tau}; \quad 0 \leq \bar{c}_\tau \leq \bar{\omega}_1; \quad \frac{\bar{\sigma}_3}{\bar{\sigma}} \bar{c}_\tau = \operatorname{tg} \tau. \quad (15; 3)$$

$\bar{\lambda}, \bar{\mu}, \bar{\nu}$  haben die nämliche Bedeutung wie bei **f** (s. § 4 b, S. 23). Nunmehr darf man o. B. d. A. setzen,

$$\begin{aligned} \text{wenn } ab \leq 0, \quad c_\tau &= c_i + 2\omega_3; & \bar{c}_\tau &= -\bar{c}_i; \\ \text{wenn } ab > 0, \quad c_\tau &= 2\omega_2 - c_i; & \bar{c}_\tau &= \bar{c}_i - 2\bar{\omega}_\mu. \end{aligned} \quad (15; 4)$$

Im folgenden bedeutet ferner, wenn  $B \geq 1$  ist,  $\varphi_b(\bar{c}_\tau)$  den Winkel, der im Sinn des § 8 bei der Fläche (11) b mit den nämlichen Konstanten  $A, B$  wie **f** zum Wert  $v = \bar{v} = \bar{c}_\tau$  gehört.  $\Phi = \varphi_b(\bar{\omega}_1)$ .

Analog bedeutet, wenn  $0 < B < 1$  ist,  $\varphi(\bar{c}_\tau)$  ohne Index den Winkel, der bei **f** in der Normallage zum Wert  $v = \bar{v} = \bar{c}_\tau$  gehört.  $\Phi = \varphi(\bar{\omega}_1)$ .

Die erwähnten Größen und der außerdem noch benötigte Ausdruck  $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right)$  ändern sich mit  $\tau$ , wie folgt:

Wenn  $A > 1$ :

| $\tau$                   | $c_\tau$   | $\bar{c}_\tau$   | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right)$ | $\varphi_b(\bar{c}_\tau)$ | $\varphi(\bar{c}_\tau)$ |
|--------------------------|------------|------------------|------------------------------------------------------------------------------|---------------------------|-------------------------|
| $\operatorname{arctg} C$ | $\omega_1$ | $\bar{\omega}_1$ | $-Z$                                                                         | $\Phi$                    | $\Phi$                  |
| $\downarrow$             | $\uparrow$ | $\uparrow$       | $\downarrow$                                                                 | $\uparrow$                | $\uparrow$              |
| $\frac{\pi}{2}$          | 0          | 0                | 0                                                                            | 0                         | 0                       |

Wenn  $A < 1$ :

| $\tau$          | $c_\tau$         | $\bar{c}_\tau$   | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right)$ | $\varphi(\bar{c}_\tau)$ |
|-----------------|------------------|------------------|------------------------------------------------------------------------------|-------------------------|
| 0               | $c_0 < \omega_1$ | $\bar{\omega}_1$ | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_0 + e_3 c_0 \right) < 0$   | $\Phi$                  |
| $\downarrow$    | $\uparrow$       | $\uparrow$       | $\downarrow$                                                                 | $\uparrow$              |
| $\frac{\pi}{2}$ | 0                | 0                | 0                                                                            | 0                       |

Grenzwerte bei Entartung:

| Entartungsfall                                      | Grenzwerte                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| [12] $A > B = 1$                                    | $\bar{c}_\tau = \frac{1}{C} \arcsin (C \cot \tau)$ ; $\varphi_b(\bar{c}_\tau) = A \bar{c}_\tau - \arcsin (A \cos \tau)$                                                                                                                                                                                                                        |
| {11} $A = B > 1$                                    | $c_\tau = \frac{1}{A} \ln \sqrt{\frac{1+A \cos \tau}{1-A \cos \tau}}$ ; $\bar{c}_\tau = \frac{1}{C} \ln \sqrt{\frac{\sin \tau + C \cos \tau}{\sin \tau - C \cos \tau}}$<br>$\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right) = \cos \tau - c_\tau$ ; $\varphi_b(\bar{c}_\tau) = \bar{c}_\tau + \tau - \frac{\pi}{2}$ |
| {22} $A = B = 1$                                    | $c_\tau = \ln \cot \frac{\tau}{2}$ ; $\bar{c}_\tau = \cot \tau$<br>$\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right) = \cos \tau - \ln \cot \frac{\tau}{2}$ ; $\varphi_b(\bar{c}_\tau) = \cot \tau + \tau - \frac{\pi}{2}$                                                                                           |
| [23] $1 = A > B > 0$                                | $\bar{c}_\tau = \frac{1}{D'} \ln \frac{D' \cos \tau +  b }{\sin \tau}$ , unendlich für $\tau = 0$<br>$\varphi(\bar{c}_\tau) = B \bar{c}_\tau - \arcsin (B \cos \tau)$                                                                                                                                                                          |
| {33} $1 > A = B > 0$                                | $c_\tau = \frac{1}{A} \ln \sqrt{\frac{1+A \cos \tau}{1-A \cos \tau}}$ ; $\bar{c}_\tau = \frac{1}{C'} \operatorname{arctg} (C' \cot \tau)$<br>$\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right) = \cos \tau - c_\tau$ ; $\varphi(\bar{c}_\tau) = \bar{c}_\tau + \tau - \frac{\pi}{2}$                                 |
| [14] $A > 1 > B = 0$<br>und<br>[34] $1 > A > B = 0$ | $c_\tau = \frac{1}{A} \arcsin (A \cos \tau)$                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
| {24} $1 = A > B = 0$                                | $c_\tau = \frac{\pi}{2} - \tau$ ; $\bar{c}_\tau = \ln \cot \frac{\tau}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                                     |

Die Fälle  $B = 0$  erfordern Sonderbehandlung, da die Koordinatenausdrücke 1 der Tabelle I hier versagen. Es ergeben sich die Rotationsflächen als ihre eigenen Transformierten in der nämlichen Lage zur Ausgangsfläche, wie wenn man bei gleichem  $\tau$  von [12] a, {22} a und [23]' ausgeht. Aber die bei letzterer Betrachtungsweise für  $\tau = 0$  noch hinzukommenden Komplementärflächen [12] b, {22} b und [23]'' werden hier durch die Forderung ausgeschlossen, daß die ebenen Kr.-Ln.  $\mathfrak{v}$  von  $\mathfrak{f}_\tau$  den ebenen Kr.-Ln.  $\mathfrak{v}$  von  $\mathfrak{f}$  (also für  $B = 0$  den Parallelkreisen!) entsprechen sollen. Da die Ebenen des Büschels  $\mathfrak{v} = \text{const.}$  hier parallel werden, tritt an Stelle der Drehung um die Flächenachse eine Translation  $\Delta_\tau y$  längs der  $y$ -Achse, wenn man  $\mathfrak{f}$  in der durch (11; 2) und (11; 3) definierten Lage voraussetzt.

Nachstehende Übersicht gilt für  $ab \leq 0$ .

Im allgemeinen ist hier  $\mathfrak{f}_\tau$  mit  $\mathfrak{f}$  gestaltlich identisch.

Die einzige Ausnahme bildet die Möglichkeit,  $[23]'$  mittels  $B_0$  in  $[23]''$  zu transformieren und umgekehrt.

Es scheint aber erwähnenswert, daß die Rotationsfläche vom hyperbolischen Typus  $[23]'$  auch als ihre eigene Komplementärfläche ( $\tau = 0$ ) auftreten kann. Dann wird von den abbildenden Strahlen auf  $f$  und  $f_\tau$  die spezielle Schar paralleler geodätischer Linien umhüllt, welcher der kleinste Parallelkreis angehört.

Übersicht 2.  $b^2 \leq a^2 \leq 0$ , aber nicht  $a^2 = b^2 = 0$ .

$\alpha$ ) Für  $B > 0$ :

| $f$       | $f_\tau(- ab )$ | $\Delta_\tau z$                                                                                                                 | $\Delta_\tau \varphi$                  | Wertbereich<br>von $A, B$ und $\tau$                      |
|-----------|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------|-----------------------------------------------------------|
| (11)a     | (11)a           | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right)$                                                    | $\varphi_b(\bar{c}_\tau)$              | $A > B; A > 1$<br>$\arctg C \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$ |
| (11)b     | (11)b           | ebenso                                                                                                                          | $\varphi_b(\bar{c}_\tau)$              |                                                           |
| [12]a     | [12]a           | ebenso                                                                                                                          | 0                                      |                                                           |
| [12]b     | [12]b           | ebenso                                                                                                                          | $A\bar{c}_\tau - \arcsin(A \cos \tau)$ |                                                           |
| (13)      | (13)            | ebenso                                                                                                                          | $\varphi(\bar{c}_\tau)$                |                                                           |
| $H_a$     | $H_a$           | $\cos \tau - c_\tau$                                                                                                            | $\bar{c}_\tau + \tau - \frac{\pi}{2}$  | $A = B \geq 1$<br>$\arctg C < \tau \leq \frac{\pi}{2}$    |
| $H_b$     | $H_b$           | $\cos \tau - c_\tau$                                                                                                            | $\bar{c}_\tau + \tau - \frac{\pi}{2}$  |                                                           |
| R         | R               | $\cos \tau + \frac{C}{A} \left( \frac{\pi}{2} - \tau \right) - \frac{1}{A} \ln \frac{1 + A \cos \tau}{\sin \tau - C \cos \tau}$ | 0                                      |                                                           |
| L         | L               | $\cos \tau - \frac{C}{A} \left( \frac{\pi}{2} - \tau \right) - \frac{1}{A} \ln \frac{1 + A \cos \tau}{\sin \tau + C \cos \tau}$ | 0                                      |                                                           |
| {22}a     | {22}a           | $\cos \tau - \ln \cot \frac{\tau}{2}$                                                                                           | 0                                      |                                                           |
| {22}b     | {22}b           | $\cos \tau - \ln \cot \frac{\tau}{2}$                                                                                           | $\cot \tau + \tau - \frac{\pi}{2}$     | $A = 1 > B$<br>$0 < \tau \leq \frac{\pi}{2}$              |
| $[23]'$   | $[23]'$         | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right)$                                                    | 0                                      |                                                           |
| $[23]''$  | $[23]''$        | ebenso                                                                                                                          | $B\bar{c}_\tau - \arcsin(B \cos \tau)$ | $A = 1 > B$<br>$\tau = 0$                                 |
| $[23]'^*$ | $[23]'$         | -Z                                                                                                                              | 0                                      |                                                           |
|           | $[23]''$        | -Z                                                                                                                              | beliebig                               |                                                           |
| $[23]''$  | $[23]'$         | -Z                                                                                                                              | 0                                      | $1 > A > B$<br>$0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$           |
| (33)      | (33)            | $\frac{1}{AB} \left( \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} c_\tau + e_3 c_\tau \right)$                                                    | $\varphi(\bar{c}_\tau)$                |                                                           |
| {33}      | {33}            | $\cos \tau - c_\tau$                                                                                                            | $\bar{c}_\tau + \tau - \frac{\pi}{2}$  |                                                           |

β) Für  $B = 0$ :

| $f$  | $f_\tau(- ab )$ | $\Delta_\tau y$                                                                                      | Wertbereich<br>von $A$ und $\tau$                  |
|------|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------|
| [14] | [14]            | $-\frac{1}{A} \left( \frac{\bar{\sigma}_3'}{\sigma_3} \bar{c}_\tau + \bar{e}_3 \bar{c}_\tau \right)$ | $A > 1$<br>$\arctg C \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$ |
| {24} | {24}            | $\ln \cot \frac{\tau}{2} - \cos \tau$                                                                | $A = 1$<br>$0 < \tau \leq \frac{\pi}{2}$           |
| {24} | Achse           | 0                                                                                                    | $A = 1$<br>$\tau = 0$                              |
| [34] | [34]            | $-\frac{1}{A} \left( \frac{\bar{\sigma}_3'}{\sigma_3} \bar{c}_\tau + \bar{e}_3 \bar{c}_\tau \right)$ | $1 > A > 0$<br>$0 \leq \tau \leq \frac{\pi}{2}$    |

## II. $A$ und $B$ konjugiert komplex.

$$A = \mathfrak{A} + i\mathfrak{B}; \quad B = \mathfrak{A} - i\mathfrak{B}; \quad \mathfrak{A} \neq 0, \quad \mathfrak{B} \neq 0.$$

Für reelles  $\tau$  wird  $ab$  stets reell.

Wir definieren wieder zwei reelle Größen  $c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$ :

$$0 < c_\tau \leq \omega_2; \quad \frac{\sigma_2}{\sigma} c_\tau = (\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \cos \tau; \quad 0 \leq \bar{c}_\tau \leq \bar{\omega}_2; \quad \frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} \bar{c}_\tau = (\mathfrak{C}^2 + \mathfrak{D}^2) \cot \tau. \quad (15; 5)$$

Dann darf man o. B. d. A. setzen:

$$\begin{aligned} \text{wenn } ab < 0, \quad c_\tau &= \omega_2 - c_\tau; & \bar{c}_\tau &= \bar{\omega}_2 + \bar{c}_\tau; \\ \text{wenn } ab > 0, \quad c_\tau &= c_\tau - \omega_2'; & \bar{c}_\tau &= -\bar{c}_\tau - \bar{\omega}_2'. \end{aligned} \quad (15; 6)$$

Für  $ab < 0$  folgt daraus:

$$\Delta_\tau z = -Z - \frac{1}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_\tau + e_2 c_\tau \right); \quad \Delta_\tau \varphi = \varphi (\bar{\omega}_2 - \bar{c}_\tau) \quad (15; 7)$$

nebst folgender Übersicht:

| $\tau$          | $c_\tau$     | $\bar{c}_\tau$   | $\Delta_\tau z$                                                                                          | $\Delta_\tau \varphi$ |
|-----------------|--------------|------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|
| 0               | $c_0 > 0$    | 0                | $-Z - \frac{1}{\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2} \left( \frac{\sigma'}{\sigma} c_0 + e_2 c_0 \right) < 0$ | $\Phi$                |
| $\downarrow$    | $\downarrow$ | $\downarrow$     | $\downarrow$                                                                                             | $\uparrow$            |
| $\frac{\pi}{2}$ | $\omega_2$   | $\bar{\omega}_2$ | 0                                                                                                        | 0                     |

$f$  und  $f_\tau$  sind gestaltlich identisch.

d) Aus den Übersichten 1 (S. 89) und 2 (S. 92) entnimmt man: Bei der Komplementärtransformation der Rotationsflächen liegen deren Rückkehrparallelkreise mit den ihnen entsprechenden ebenen Kr.-Ln. der Transformaten in der nämlichen Ebene, schneiden also auf allen Tangenten dieser Kr.-Ln. vom jeweiligen Berührungspunkt aus die Strecke 1 ab, d. h.

**Satz 29:** Bei den Komplementärflächen der Rotationsflächen sind die ebenen Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$  Traktrizen<sup>59</sup> mit dem Kreis  $r = r_0 \equiv \frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 - 1}}$  als Basis und dem konstanten Tangentenabschnitt  $l_0 \equiv 1$ .

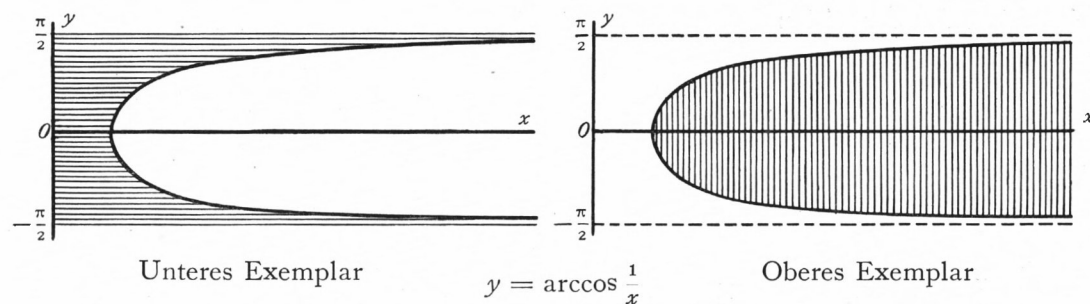
Als solche sind sie leicht näherungsweise mechanisch herstellbar. Sie sind sogar, abgesehen vom Maßstab, die allgemeinsten Kurven dieser Art. Nennt man eine solche Kurve kurz „Kreistraktrix  $(r_0, l_0)$ “, so folgt aus Fußnote 42, S. 55 und Satz 19, S. 45 nebenher der

**Satz 30:** 1. Die tractrix complicata ist identisch mit der Kreistraktrix  $(r_0, r_0)$ .

2. Jede Kreistraktrix  $(r_0, l_0)$  geht durch Inversion an dem zum Basiskreis konzentrischen Kreis mit dem Radius  $\sqrt{|r_0^2 - l_0^2|}$  wieder in eine Kreistraktrix  $(r_0, l_0)$  über.

e) Im Falle I ( $A$  und  $B$  reell) läßt sich folgendermaßen veranschaulichen, für welche Werte von  $\tau$   $f(A, B)$  und  $f_\tau(A, B)$  gleichzeitig reell sein können.

Man lege zwei Exemplare der in kartesischen Koordinaten gezeichneten Kurve  $y = \arccos \frac{1}{x}$  (in der Figur ist nur der Zweig  $-\frac{\pi}{2} < y \leq \frac{\pi}{2}$  gezeichnet) aufeinander und verschiebe dann das obere parallel zur  $x$ -Achse, bis die Gerade  $x = B$  seiner Ebene auf die Gerade  $x = A$  der unteren Ebene fällt. Dann werden die gesuchten Werte von  $\tau$  dargestellt durch die Ordinaten der Punkte dieser Geraden, die in schraffierten Bereichen (einschließlich Rand) liegen. Für die Werte des parallel zur  $x$ -Achse schraffierten Bereiches (Unterfall 2) sind  $f$  und  $f_\tau$  gestaltlich identisch; nur für  $A = 1$ ,  $\tau = 0$  geht [23]' in [23]'' über und umgekehrt. Für die Werte des parallel zur  $y$ -Achse schraffierten Bereiches (Unterfall 1) ist die eine Fläche vom Typus  $a$ , die andere vom Typus  $b$ . Diese Regeln versagen, wo Schraubenflächen beteiligt sind. Wie man sie für diesen Fall zu ergänzen hat, ist aus dem Vorhergehenden hinreichend ersichtlich.



<sup>59</sup> Vgl. Loria, S. 567 ff. Für  $A = 1$ ;  $B = 0$  geht die Kreistraktrix in die gewöhnliche Traktrix mit geradliniger Basis über.

# § 16. DIE ALLGEMEINSTEN BÄCKLUNDSCHEN TRANSFORMIERTEN DER E-FLÄCHEN.

Zugrunde liegt der Flächenbegriff in der nämlichen Allgemeinheit wie im I. Teil.

Die Substitutionen  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2} = e^{U+V}$ ;  $\operatorname{tg} \frac{\vartheta_r}{2} = t$  führen die Gleichungen (14; 2) über in <sup>60</sup>

$$\frac{\partial t}{\partial u} = \frac{-t^2 (V' \cos \tau + \sin \tau) - 2 t s h (U + V) - (V' \cos \tau - \sin \tau)}{2 \cos \tau c h (U + V)}; \quad (16; 1)'$$

$$\frac{\partial t}{\partial v} = \frac{-t^2 (U' \cos \tau - 1) + 2 t \sin \tau s h (U + V) - (U' \cos \tau + 1)}{2 \cos \tau c h (U + V)}. \quad (16; 1)''$$

Diese sind vom Riccatischen Typus, <sup>61</sup> und nach § 14 ist mindestens eine Partikulärlösung bekannt. Für eine Gleichung  $\frac{dy}{dx} = \Lambda_0(x) + y \Lambda_1(x) + y^2 \Lambda_2(x)$  mit der Partikulärlösung  $y_0$  ist aber bekanntlich  $\frac{1}{(y - y_0)^2} e^{\int (\Lambda_1 + 2 \Lambda_2 y_0) dx}$  ein Multiplikator.

Wir setzen Nichtentartung voraus, wählen bei vorgegebenem  $R, A, B, \tau$  unter den zulässigen Wertpaaren  $a, b$  ein bestimmtes aus, bezeichnen die für dieses Wertpaar durch (14; 5) definierte Partikulärlösung  $e^{U_\tau + V_\tau}$  mit  $t_0$  und verstehen künftig stets unter  $c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$  die für das nämliche Wertpaar aus (14; 9) sich ergebenden Größen. Dann liefert das angegebene Verfahren folgende Multiplikatoren für die Gleichungen (16; 1)' bzw. (16; 1)''.

$$\begin{aligned} M' &= \frac{1}{(t - t_0)^2} e^{\int \left[ U' \tanh (U + V) + \frac{a b}{\cos \tau (U' \cos \tau - 1)} - \frac{U'' \cos \tau}{U' \cos \tau - 1} \right] du} \\ &= \frac{\Phi(u) c h (U + V)}{(t - t_0)^2 (U' \cos \tau - 1)}. \end{aligned} \quad (16; 2)'$$

$$\begin{aligned} M'' &= \frac{1}{(t - t_0)^2} e^{\int \left[ V' \tanh (U + V) + \frac{a b}{\cos \tau (V' \cos \tau + \sin \tau)} - \frac{V'' \cos \tau}{V' \cos \tau + \sin \tau} \right] dv} \\ &= \frac{\Psi(v) c h (U + V)}{(t - t_0)^2 (V' \cos \tau + \sin \tau)}. \end{aligned} \quad (16; 2)''$$

Dabei haben  $\Phi(u)$  und  $\Psi(v)$  folgende Bedeutung:

1. Wenn  $ab \neq 0$ :

$$\Phi(u) = e^{u \frac{a'}{\sigma} c_\tau} \sqrt{\frac{\sigma_\mu(u - \bar{c}_\tau) - \sigma_\nu(u - \bar{c}_\tau)}{\sigma_\mu(u + \bar{c}_\tau) + \sigma_\nu(u + \bar{c}_\tau)}}; \quad (16; 3)'$$

$$\Psi(v) = e^{v \frac{\bar{a}'}{\sigma} \bar{c}_\tau} \sqrt{\frac{\bar{\sigma}_\mu(v - \bar{c}_\tau) + \bar{\sigma}_\nu(v - \bar{c}_\tau)}{\bar{\sigma}_\mu(v + \bar{c}_\tau) - \bar{\sigma}_\nu(v + \bar{c}_\tau)}}. \quad (16; 3)''$$

2. Wenn  $ab = 0$ :  $\Phi(u) = \Psi(v) = 1$ . (16; 3)'''

<sup>60</sup> Die identische Transformation  $\cos \tau = 0$  sei ausgeschlossen.

<sup>61</sup> Bianchi, Lezioni S. 718.



In jedem Falle folgt dann aus (16; 1)' und (16; 1)'' durch Quadraturen:

$$\begin{aligned} \frac{-2 \cos \tau \Phi(u) ch(U+V)}{(t-t_0)(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} + \int \frac{\Phi(u) du}{U' \cos \tau - 1} &= \text{Funktion von } v; \\ \frac{-2 \cos \tau \Psi(v) ch(U+V)}{(t-t_0)(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} + \int \frac{\Psi(v) dv}{V' \cos \tau + \sin \tau} &= \text{Funktion von } u. \end{aligned} \quad (16; 4)$$

Von jetzt ab müssen die Fälle  $ab \neq 0$  und  $ab = 0$  getrennt werden.

1.  $ab \neq 0$ .

Aus (16; 2)' bzw. (16; 2)'' folgt durch logarithmische Differentiation nach  $u$  bzw.  $v$ :

$$\frac{\Phi'(u)}{\Phi(u)} = \frac{ab}{\cos \tau (U' \cos \tau - 1)}; \quad \frac{\Psi'(v)}{\Psi(v)} = \frac{ab}{\cos \tau (V' \cos \tau + \sin \tau)}. \quad (16; 5)$$

Demnach haben die Integrale in (16; 4) die Werte:  $\frac{\Phi(u) \cos \tau}{ab}$  bzw.  $\frac{\Psi(v) \cos \tau}{ab}$ . Bezeichnen also  $\varphi(u)$  und  $\psi(v)$  noch zu bestimmende Funktionen von  $u$  bzw.  $v$ , so kann man statt (16; 4) schreiben:

$$\frac{-2 ab ch(U+V)}{(t-t_0)(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} + 1 = \frac{\psi(v)}{\Phi(u)} = \frac{\varphi(u)}{\Psi(v)}; \quad (16; 6)$$

$$\text{somit: } \Phi(u) \varphi(u) = \Psi(v) \psi(v) = \text{const.} = c; \quad (16; 7)$$

also:

$$\begin{aligned} t &= t_0 + \frac{2 ab ch(U+V)}{(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} \cdot \frac{\Phi(u) \Psi(v)}{\Phi(u) \Psi(v) - c}; \\ &= t_0^* + \frac{2 ab ch(U+V)}{(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} \cdot \frac{c}{\Phi(u) \Psi(v) - c}. \end{aligned} \quad (16; 8)$$

Hier bedeutet  $t_0^*$  die zweite Lösung der quadratischen Gleichung (14; 4), die aus  $t_0$  bei Ersatz von  $ab$  durch  $-ab$  hervorgeht.

$$\text{Aus (16; 8) folgt: } \frac{t-t_0}{t-t_0^*} = \frac{\Phi(u) \Psi(v)}{c}. \quad (16; 9)$$

Diese Gleichung ergibt sich direkt, wenn man von  $t_0^*$  ausgehend die Multiplikatoren

$$M'^* = \frac{ch(U+V)}{\Phi(u)(t-t_0^*)^2(U' \cos \tau - 1)} \quad \text{und} \quad M''^* = \frac{ch(U+V)}{\Psi(v)(t-t_0^*)^2(V' \cos \tau + \sin \tau)}$$

bildet und dann beachtet, daß  $\frac{M'}{M'^*} = \text{Funktion von } v$ , und  $\frac{M''}{M''^*} = \text{Funktion von } u$ ,

Integrale von (16; 1)' bzw. (16; 1)'' sind.

Als Funktion von  $u$  und  $v$  allein erhält man:

$$it = \frac{c_1 e^s \sqrt{P_1} + c_2 e^{-s} \sqrt{P_2}}{c_1 e^s \sqrt{P_3} + c_2 e^{-s} \sqrt{P_4}}. \quad (16; 10)$$

Dabei ist um der Symmetrie willen  $c = -\frac{c_2}{c_1}$  gesetzt. Die übrigen Abkürzungen bedeuten folgendes:

$$\begin{aligned} s &= \frac{1}{2} \left( u \frac{\sigma'}{\sigma} c_r + v \frac{\bar{\sigma}'}{\bar{\sigma}} \bar{c}_r \right), \\ P_1 &= [\sigma_\mu (u - c_r) + \sigma_\nu (u + c_r)] [\bar{\sigma}_\mu (v - \bar{c}_r) - \bar{\sigma}_\nu (v + \bar{c}_r)], \\ P_2 &= [\sigma_\mu (u + c_r) - \sigma_\nu (u - c_r)] [\bar{\sigma}_\mu (v + \bar{c}_r) + \bar{\sigma}_\nu (v - \bar{c}_r)], \\ P_3 &= [\sigma_\mu (u - c_r) - \sigma_\nu (u + c_r)] [\bar{\sigma}_\mu (v - \bar{c}_r) + \bar{\sigma}_\nu (v + \bar{c}_r)], \\ P_4 &= [\sigma_\mu (u + c_r) + \sigma_\nu (u - c_r)] [\bar{\sigma}_\mu (v + \bar{c}_r) - \bar{\sigma}_\nu (v - \bar{c}_r)]. \end{aligned} \quad (16; 11)$$

Man darf in (16; 10)  $c_1$  oder  $c_2$  beliebig  $\neq 0$  wählen und über die Wurzeln beliebig verfügen mit der Einschränkung, daß

$$\begin{aligned} \text{für } c_1 \rightarrow 0: \quad i t &= \sqrt{\frac{P_2}{P_4}} = i t_0 \text{ und} \\ \text{für } c_2 \rightarrow 0: \quad i t &= \sqrt{\frac{P_1}{P_3}} = i t_0^* \text{ werden muß.} \end{aligned}$$

In (16; 8) ist dann  $\Phi(u) \Psi(v) = e^{2s} \sqrt{\frac{P_3}{P_4}}$  zu setzen.

2.  $ab = 0$ .

Indem wir in (16; 12) unter  $\Phi(u)$  und  $\Psi(v)$  das nämliche verstehen wie bisher im Falle 1 [ $ab \neq 0$ ; vgl. (16; 3)' und (16; 3)''], setzen wir:

$$\begin{aligned} \Phi_0(u) &= \int \frac{du}{U' \cos \tau - 1} = \lim_{ab \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \tau}{ab} \ln \Phi(u) \right) = \frac{1}{e_l - e_m} \left( U'_r - \frac{\sigma'_l}{\sigma_l} u - e_l u \right); \\ \Psi_0(v) &= \int \frac{dv}{V' \cos \tau + \sin \tau} = \lim_{ab \rightarrow 0} \left( \frac{\cos \tau}{ab} \ln \Psi(v) \right) = \frac{-1}{(\bar{e}_l - \bar{e}_m) \sin \tau} \left( V'_r - \frac{\bar{\sigma}'_l}{\bar{\sigma}_l} v - \bar{e}_l v \right).^{62} \end{aligned} \quad (16; 12)$$

Dabei ist zu setzen,

$$\begin{aligned} \text{wenn } a = 0: \quad l &= \mu; \quad m = \nu; \quad \bar{l} = \bar{\mu}; \quad \bar{m} = \bar{\nu}; \\ \text{wenn } b = 0: \quad l &= \nu; \quad m = \mu; \quad \bar{l} = \bar{\nu}; \quad \bar{m} = \bar{\mu}. \end{aligned}$$

Mittels (16; 12) und (16; 3)''' geht (16; 4) über in

$$\frac{-2 \cos \tau \, ch(U + V)}{(t - t_0)(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} = \psi_0(v) - \Phi_0(u) = \varphi_0(u) - \Psi_0(v), \quad (16; 13)$$

wobei wieder  $\varphi_0(u)$  und  $\psi_0(v)$  noch zu bestimmende Funktionen von  $u$  bzw.  $v$  bedeuten; für sie folgt aus (16; 13):

<sup>62</sup> Ohne Entartung kann nicht gleichzeitig  $ab = 0$  und  $\tau = 0$  sein.

$$\varphi_0(u) + \Phi_0(u) = \psi_0(v) + \Psi_0(v) = \text{const.} = c^{(0)}, \quad (16; 14)$$

$$\text{also: } t = t_0 + \frac{2 \cos \tau c h (U + V)}{(U' \cos \tau - 1)(V' \cos \tau + \sin \tau)} \cdot \frac{1}{\Phi_0(u) + \Psi_0(v) - c^{(0)}} \quad (16; 15)$$

oder als Funktion von  $u$  und  $v$  allein:

$$it = \frac{\sqrt{Q_1}(Q_3 + Q_4 + c^*)}{\sqrt{Q_2}(Q_3 - Q_4 + c^*)}. \quad (16; 16)$$

Dabei ist  $c^{(0)}(e_l - e_m) \cos \tau = c^*$  gesetzt. Die übrigen Abkürzungen bedeuten folgendes:

$$\begin{aligned} Q_1 &= \left( \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} u + \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} c_\tau \right) \left( \frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} v - \frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} \bar{c}_\tau \right); \\ Q_2 &= \left( \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} u - \frac{\sigma_\lambda}{\sigma} c_\tau \right) \left( \frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} v + \frac{\bar{\sigma}_\lambda}{\sigma} \bar{c}_\tau \right); \\ Q_3 &= \left( \frac{\sigma'_l}{\sigma_l} u + e_l u \right) \frac{\sigma}{\sigma_l} c_\tau + \left( \frac{\bar{\sigma}'_l}{\sigma_l} v + \bar{e}_l v \right) \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_l} \bar{c}_\tau; \\ Q_4 &= \frac{\sigma_m}{\sigma_l} u - \frac{\bar{\sigma}_m}{\sigma_l} v. \end{aligned}$$

Die Wurzeln sind der Bedingung unterworfen:  $\sqrt{\frac{Q_1}{Q_2}} = it_0$ .

$c_\tau$  und  $\bar{c}_\tau$  unterscheiden sich hier von  $\pm \omega_l$  bzw.  $\pm \bar{\omega}_l$  höchstens um ganze Perioden; ob + oder - gilt, hängt von  $\tau$  ab.

## § 17. AUSBLICKE.

Wie Bianchi gezeigt hat, ermöglichen die Ergebnisse des § 16 nicht nur die Aufstellung der Koordinaten von  $\mathbf{F}_\tau$ , sondern auch die fortgesetzte und unbeschränkte Anwendung des Transformationsprozesses auf die nacheinander auftretenden neuen Flächen,<sup>63</sup> sowie die Aufstellung der Gleichung ihrer geodätischen Linien in endlicher Gestalt,<sup>64</sup> und zwar beides lediglich mittels algebraischer Rechnungen und Differentiationen. Aber hierauf soll im Rahmen dieser Arbeit ebensowenig mehr eingegangen werden wie auf die Spezialisierung des § 16 für die Entartungsfälle oder auf den naheliegenden Versuch, die Ergebnisse womöglich auf Lamésche dreifache pseudosphärische Orthogonalsysteme zu erweitern.

Ebenso muß die Behandlung der reellen E-Flächen positiver Krümmung in einer zum II. Teil analogen Form einer anderen Gelegenheit vorbehalten bleiben, trotzdem der Weg dazu offen steht und dieses Gebiet ebenso sehr und im nämlichen Sinne der Ergänzung

<sup>63</sup> Bianchi, Lezioni S. 741.

<sup>64</sup> Der letztere Satz fehlt bei Bianchi in der Auflage von 1922, steht aber in der Auflage von 1903, Bd. 2, S. 418 und in der deutschen Ausgabe (1910) S. 474.

bedarf, wie dies im Vorwort für die Flächen negativer Krümmung dargelegt wurde. Insbesondere ist auch hier die Realitätsbedingung zu erweitern, und das soll wenigstens noch an dieser Stelle geschehen durch den zu Satz 12 des § 4 analogen

**Satz 31:** *Eine nicht entartete E-Fläche positiver Krümmung enthält dann und nur dann reelle Bereiche, wenn*

*entweder  $A^2$  und  $B^2$  konjugiert komplex mit nicht verschwindendem Imaginärteil sind, oder  $A^2$  und  $B^2$  reell sind und einer der folgenden Bedingungen genügen:*<sup>65</sup>

- a)  $+\infty > A^2 > B^2 > 1$ ;
- b)  $0 > A^2 > B^2 > -\infty$ ;
- c)  $+\infty > A^2 > 1 > 0 > B^2 > -\infty$ .

Dazu kommen noch, mindestens zum Teil, die Entartungsfälle, in denen  $A^2$  oder  $B^2$  einen der Ausnahmewerte 0, 1,  $\infty$  annimmt, oder  $A^2 = B^2$  ist, oder beides eintritt.

Für  $A^2 \rightarrow B^2$  führt die Annahme a) auf die Flächen von Rembs, die Annahme b) auf die von Sievert, welche die nämlichen elastischen Kurven enthalten wie die Flächen {11}b negativer Krümmung. Unter die Annahme c) endlich fallen für  $B^2 \leq -1$  die Flächen von Bockwoldt, der insbesondere den Fall  $A^2 + B^2 = 0$  näher behandelt. Die Rotationsflächen reihen sich ebenfalls als Grenzfälle ein. Die übrigen Flächen harren noch der Untersuchung und dürften eine solche wohl verdienen.

---

<sup>65</sup> Zuzufolge § 2, e darf man o. B. d. A. voraussetzen, daß  $A^2 > B^2$  sei.

## LITERATURVERZEICHNIS.

### 1. Zitierte Lehrbücher und Sammelwerke.

- Bianchi, L.: Lezioni di geometria differenziale. Pisa 1922. Bes. I. Bd. Kap. 15 u. 16.  
Cesàro, E.: Vorlesungen über natürliche Geometrie. Deutsch von Kowalewski. Leipzig 1901.  
Darboux, G.: Leçons sur la théorie générale des surfaces. Paris 1894. Bes. III. Teil, Kap. 11 mit 13.  
Enzyklopädie der math. Wissenschaften. Besonders:  
III D 5 (Lilienthal R. v.), III D 6a (Voß A.), III D 7 (Liebmann H.), III D 9 (Salkowski E.).  
Loria, G.: Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven. Deutsch von Schütte. Leipzig 1902.  
Schwarz, H. A.-Weierstraß, K.: Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Funktionen.  
Berlin 1893.

### 2. Einschlägige Einzelschriften.

Abhandlungen zu den durch die Verlagshandlung von L. Brill in Darmstadt veröffentlichten Modellen, und zwar:

- zu Serie 1 von Bacharach, J.
- zu Serie 2 von Bacharach, J. und Dyck, W.
- zu Serie 5 von Kuen, Th. und Vogel, P.
- zu Serie 8 von Kuen, Th.
- zu Serie 17 von Sievert, H.

Bäcklund, A. V.: Om ytor med konstant negativ krökning. Lunds Universitets årsskrift XIX, 1883.

Bianchi, L.: Ricerche sulle superficie a curvatura costante e sulle elicoidi. Pisa 1879. (Auszug hieraus in Math. Ann. XVI, 1880.)

— Sopra i sistemi tripli ortogonali di Weingarten. Annali di Matematica, Serie II, XIII. Mailand 1885.

Böckwolddt, G.: Über die Enneperschen Flächen mit konstantem positivem Krümmungsmaß. Diss. Göttingen 1878. (In Enzyklopädie III D 5, S. 335 irrtümlich als „A. Bockholt“ zitiert.)

Bolke, G.: Die Komplementärflächen der pseudosphärischen Rotationsflächen und ihr Zusammenhang mit allgemeineren pseudosphärischen Flächen. Diss. Halle a. d. S. 1901.

Dini, U.: Sulle superficie che hanno un sistema di linee di curvatura piane. Pisa 1869.

Dobriner, H.: Flächen konstanten Krümmungsmaßes mit einem System sphärischer Krümmungslinien. Acta Mathematica, Bd. 9, 1886/87.

Dyck, W.: Katalog mathematischer und mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. München 1892.

Enneper, A. in den Göttinger Nachrichten, und zwar:

- Analytisch-geometrische Untersuchungen V und VI. 1868.
- Bemerkungen zu den analytisch-geometrischen Untersuchungen. 1874.
- Bemerkungen über einige Flächen von konstantem Krümmungsmaß. 1876.

Kretschmer, E.: Beiträge zur Theorie der Flächen mit ebenen Krümmungslinien, welche gegebenen Bedingungen genügen. Programm des Gymnasiums Frankfurt a. d. O. 1871.

- K uen, Th.: Über Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Münchner Berichte 1884.
- Lehr, E.: Über die Kurven, deren Krümmung eine periodische Funktion des Bogens ist. Diss. T. H. München 1932. (Dasselbst weitere Literaturangaben über elastische Linien.)
- Lenz, E.: Über Ennepersche Flächen konstanten negativen Krümmungsmaßes. Diss. Göttingen 1879.
- Lie, S.: Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. Archiv for Mathematik og Naturvidenskab 1879 (I u. II) u. 1880 (III). Kristiania.
- Liebmann, H.: Die Verbiegung von geschlossenen und offenen Flächen positiver Krümmung. Münchner Berichte 1919.
- Rembs, E. in den Jahresberichten der D. M. V., und zwar:  
 Eine Verbiegung der Vollkugel Bd. 38, 1929.  
 Ennepersche Flächen konstanter positiver Krümmung und Hazzidakissche Transformation. Bd. 39, 1930.
- Schilling, M.: Katalog mathematischer Modelle. 7. Aufl. Leipzig 1911.
- Sievert, H.: Über die Zentraflächen der Enneperschen Flächen konstanten Krümmungsmaßes. Diss. Tübingen 1886.
- Simon, P.: Über Flächen mit konstantem Krümmungsmaß. Diss. Halle 1876.

## BEMERKUNGEN ZU DEN FIGUREN-TAFELN.

### I. ENTSTEHUNG DER FIGUREN.

*Ein brauchbares Modell einer E-Fläche negativer Krümmung läßt sich ohne Benützung elliptischer Funktionen herstellen, wenn  $R$ ,  $A$  und  $B$  gegeben sind.*

Dann kennt man nämlich zunächst den Wertvorrat von  $U'$  und  $V'$  für den  $\mathfrak{E}_0$  und kann nach Tabelle I alle benötigten Größen außer  $z$ ,  $z''$  und  $\varphi$  durch elementare Funktionen von  $U'$  und  $V'$  ausdrücken.

Jedes Werttripel  $R, A, B$  bestimmt genau eine elastische Kurve. Diese läßt sich nun, da  $r(U')$  und  $\rho'(U')$  berechenbar sind, auf Grund der Beziehung  $r\rho' = \text{const.}$  annähernd aus Kreisbogen zusammensetzen, wobei  $\gamma'(U')$  als Kontrollgröße dienen kann. Die Kenntnis der Elastika ermöglicht dann die mechanische Herstellung der Kr.-Ln.  $V' = \text{const.}$  nach dem auf S. 59 und S. 79 beschriebenen Verfahren.

Ferner lassen sich noch elementar durch  $V'$  ausdrücken:

der Öffnungswinkel  $\varepsilon(V')$  des ebenen Sektors, der durch Abwicklung des Tangentenkegels in einem konischen Punkt  $u = \text{const.}$  entsteht,

und die Bogenlänge  $s''(V')$  einer ebenen Kr.-L.  $u = \text{const.}$

Wenn nämlich  $A$  und  $B$  reell sind, ist

$$\text{bei den Flächen a} \quad \varepsilon(V') = \arcsin\left(\frac{-V'}{D}\right) \pm \arcsin\left(\frac{-V'}{C}\right);$$

$$\text{bei den Flächen b} \quad s''(V') = \ln \frac{Y_1 + AV'}{W(1-A)} \pm \ln \frac{Y_2 + BV'}{W(1-B)}.$$

Die oberen Vorzeichen gelten für  $u = 0$ , die unteren für  $u = 2\omega_1$ .

Wenn aber  $A$  und  $B$  konjugiert komplex sind, ist

$$\text{für } u = \omega_2 \quad \varepsilon(V') = 2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}} e^{-v}}{\sqrt{\mathfrak{E}\mathfrak{D}} e^v - V'};$$

$$\text{für } u = 0 \quad s''(V') = \ln \frac{(\mathfrak{A}V' + \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} e^v)^2 + (\mathfrak{B}V' - \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} e^{-v})^2}{W^2 [(\mathfrak{A} - 1)^2 + \mathfrak{B}^2]}.$$

Alle Integrationskonstanten sind so gewählt, daß für  $v = 0$  auch  $\varepsilon = 0$  und  $s'' = 0$  wird.

Da man für einen konischen Punkt  $u = \text{const.}$  außer  $\varepsilon(V')$  auch  $\gamma'(V')$  und  $\delta'(V')$  elementar berechnen kann, läßt sich ein Modell des zugehörigen Tangentenkegels näherungsweise herstellen.

Entsprechend ermöglicht die Kenntnis von  $s''(V')$ ,  $r(V')$  und  $\delta'(V')$  die modellmäßige Herstellung des geodätischen Flächenstreifens längs einer ebenen Kr.-L.  $u = \text{const.}$



Demnach ist die Stellung einer Ebene  $V' = \text{const.}$  jedesmal auf zwei verschiedene Arten bestimmbar, was wieder Kontrolle und Fehlerausgleich ermöglicht. Einfügung jeder vorher gezeichneten Kr.-Ln.  $V' = \text{const.}$  in ihre Ebene vollendet dann das Flächenmodell.

Das Verfahren mit den bei Entartung gebotenen Vereinfachungen liefert, wie weitgehende rechnerische Nachprüfung zeigte, Ergebnisse von befriedigender Genauigkeit.

## II. ERLÄUTERUNGEN ZU DEN FIGUREN.

### a) Allgemeines.

Wo im folgenden Maße angegeben sind, beziehen sich diese auf die Urzeichnungen, die für den Druck im Maßstab 1 : 6,5 verkleinert wurden.<sup>66</sup>

Die Werte von  $R$ ,  $A$  und  $B$  wurden bei den maßtreuen Figuren so gewählt, daß in allen Fällen die durch sie bestimmte Elastika im Scheitel  $u = 0$  die nämliche Krümmung  $\left(\rho' = \frac{-R}{A+B} = -3,75 \text{ cm}\right)$  erhielt.

Das dem  $\mathfrak{E}_w$  bzw.  $\mathfrak{E}_v$  angehörige Kurvenstück ist bei Fig. 1–75 jeweils durch Verstärkung hervorgehoben. Die Punkte in den Scheiteln  $u = 0$  der Kr.-Ln.  $w = w_2$  sollen die unendliche Krümmung ( $\rho' = 0$ ) in diesen Punkten andeuten. Die gestrichelten Linien vor den Spitzen der Kr.-Ln.  $w$  geben die jeweilige Richtung der Spitzentangente an.

In folgenden Fällen ist von mehreren analogen Kurven, die verschiedenen Flächenarten angehören, aber sich nur quantitativ, nicht qualitativ unterscheiden, jeweils nur eine gezeichnet:

| Figur     | gehört zu Fläche | Seite | dient auch für Fläche            | Seite     |
|-----------|------------------|-------|----------------------------------|-----------|
| 64        | [12] b           | 48    | (11) b                           | 46        |
| 65 und 71 | (13)             | 48    | (11) b                           | 47 und 45 |
| 67        | (33)             | 52    | (\gamma), (\delta), (\epsilon)   | 77        |
| 72        | {22} b           | 55    | {11} b                           | 54        |
| 74 und 75 | (33)             | 51    | {33} und (\alpha) bis (\epsilon) | 56 und 76 |

Auch die zwischen Fig. 6 und 7 eingeschaltete Darstellung der Zwischenformen ist nur dort genau, dagegen da, wo sie in den beiden nächsten Reihen wiederholt ist, bloß qualitativ richtig.

### b) Zu Tafel I.

Fig. 1–61: Die ebenen Kr.-Ln.  $w$  für  $R = 30 \text{ cm}$  und die nachstehend in der Reihenfolge der Figuren angeführten Werte von  $A$ ,  $B$  und  $w$ . Dabei bezeichnen  $w^*$  und  $w^{**}$  Werte des  $\mathfrak{E}_w$ , definiert durch die Beziehungen:

$$\frac{\sigma_2}{\sigma} w^* = \sqrt{2} \frac{\sigma_2}{\sigma} w_2; \quad \frac{\sigma_3}{\sigma} w^{**} = \sqrt{A \frac{\sigma_3}{\sigma} w_2} = \sqrt{A \frac{\sigma_3}{\sigma} w_1}.$$

Wegen der übrigen Bezeichnungen siehe S. 29 und S. 63.

<sup>66</sup> Ausnahmsweise wurden die zwischen 6 und 7 eingeschalteten Figuren, die den Werten  $W = 5,72$  und  $W = 5,60$  entsprechen, der Deutlichkeit halber nur im Maßstab 1 : 3,25 verkleinert.

1.  $A$  und  $B$  reell.

| Fig. Nr. | $A$ | $B$ | Werte von $w$ |          |                           |          |            | zu § |
|----------|-----|-----|---------------|----------|---------------------------|----------|------------|------|
| 1-3      | 8   | 0   | 0             | $w^*$    | $w_2 = w^{**} = \omega_1$ |          |            | 11   |
| 4-8      | 5   | 3   | 0             | $w^*$    | $w_2$                     | $w^{**}$ | $\omega_1$ | 8    |
| 9-13     | 5   | 3   | $\omega_1$    | $w^{**}$ | $w_1$                     | $w^*$    | 0          | 6    |
| 14-18    | 4   | 4   | 0             | $w^*$    | $w_2$                     | $w^{**}$ | $\infty$   | 9    |
| 18-22    | 4   | 4   | $\infty$      | $w^{**}$ | $w_1$                     | $w^*$    | 0          | 7    |

2.  $A$  und  $B$  konjugiert komplex (zu § 13).

| Fig. Nr. | $\Re$ | $\Im$                 | Werte von $w$                                                        |                  |                                  |                      |            |                  |
|----------|-------|-----------------------|----------------------------------------------------------------------|------------------|----------------------------------|----------------------|------------|------------------|
| 23-29    | 4     | 1                     | 0 $w^*$ $w_2$ $\frac{\omega_2}{2}$ $w_1$ $\omega_2 - w^*$ $\omega_2$ |                  |                                  |                      |            |                  |
| 30-36    | 4     | 1,83515               |                                                                      |                  |                                  |                      |            |                  |
| 37-43    | 4     | 2                     |                                                                      |                  |                                  |                      |            |                  |
| 44-48    | 4     | $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ | 0                                                                    | $w^*$            | $w_2 = \frac{\omega_2}{2} = w_1$ | $\omega_2 - w^*$     | $\omega_2$ |                  |
| 49-55    | 4     | $2\sqrt{2}$           | 0                                                                    | $\omega_2 - w_3$ | $w_1$                            | $\frac{\omega_2}{2}$ | $w_2$      | $w_3$ $\omega_2$ |
| 56-58    | 4     | 4                     | 0 $\frac{\omega_2}{2}$ $\omega_2$                                    |                  |                                  |                      |            |                  |
| 59-61    | 4     | 8                     |                                                                      |                  |                                  |                      |            |                  |

## c) Zu Tafel II.

Fig. 62-70: Die Abwicklungen der räumlichen Rückkehrkurve.

Fig. 71-75: Die ebenen Kr.-Ln.  $u = 0$  und  $u = 2\omega_1$ .

| Fig. | 62 | 63            | 64            | 65   | 66  | 67   | 68 | 69    | 70  | 71   | 72  | 73  | 74   | 75   |
|------|----|---------------|---------------|------|-----|------|----|-------|-----|------|-----|-----|------|------|
| $R$  | 30 | 10            | 10            | 6,3  | 6   | 5,7  | 30 | 9,375 | 7,5 | 6,3  | 7,5 | 6   | 5,7  | 5,1  |
| $A$  | 5  | $\frac{5}{3}$ | $\frac{5}{3}$ | 1,05 | 1   | 0,95 | 4  | 1,25  | 1   | 1,05 | 1   | 1   | 0,95 | 0,85 |
| $B$  | 3  | 1             | 1             | 0,63 | 0,6 | 0,57 | 4  | 1,25  | 1   | 0,63 | 1   | 0,6 | 0,57 | 0,51 |
| zu § | 6  | 6             | 8             | 8    | 8   | 8    | 7  | 9     | 9   | 8    | 9   | 8   | 8    | 8    |

Da hier entweder  $\frac{A}{B} = \frac{5}{3}$  oder  $\frac{A}{B} = 1$  ist, werden die Kr.-Ln.  $v$  der Flächen, denen die Kurven 62-75 angehören, durch die einschlägigen Figuren der Folge 4-22 dargestellt, und zwar in richtiger Größe.

Fig. 71 stellt gemäß Satz 19, 2 (S. 45) die Kr.-L.  $u = 0$  oder  $u = 2\omega_1$  dar, je nachdem man den längeren oder kürzeren verstärkten Bogen als dem  $\mathfrak{C}_0$  angehörig betrachtet. In Fig. 73-75 ist auch der Inversionskreis (Satz 19, 1) eingezeichnet. Fig. 74 schließt sich zufällig für das Auge, da hier  $6\Phi = 359^\circ 45'$  ist.

Fig. 76-79 stellen die Symmetrieverhältnisse der nicht entarteten Flächen symbolisch dar.

Fig. 80 und 81 illustrieren die Sätze 22, 3 (S. 58) und 26, 3 (S. 79). Sie sind schematisch gehalten, da bei maßtreuer Darstellung  $|z_m - z_s|$  zu klein würde, um das Wesentliche erkennen zu lassen. Eine Fülle maßtreuer Beispiele findet sich auf Tafel I.

Fig. 82 bringt als Beispiel für das auf S. 59 beschriebene mechanische Verfahren zur Herstellung der Kr.-Ln.  $w$  die Erzeugung der Fig. 10 mittels der Elastika Fig. 4.

#### BERICHTIGUNGEN.

Seite 8, Zeile 3 von oben lies  $R \sin \vartheta dv$  statt  $R \sin \vartheta du$ .

Seite 65, Zeile 8-11 von unten lies fünfmal  $u_m(w)$  statt  $u_m(w)$ .

## INHALTSVERZEICHNIS.

|                                                                                                                         |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Vorwort . . . . .                                                                                                       | 3   |
| Erster Teil. Die E-Flächen im allgemeinen . . . . .                                                                     | 7   |
| § 1. Grundlagen . . . . .                                                                                               | 7   |
| § 2. Koordinaten . . . . .                                                                                              | 11  |
| § 3. Eigenschaften der E-Flächen . . . . .                                                                              | 15  |
| Zweiter Teil. Die reellen E-Flächen negativer Krümmung . . . . .                                                        | 22  |
| § 4. Realitätsbedingung. Einteilung . . . . .                                                                           | 22  |
| § 5. $A$ und $B$ reell . . . . .                                                                                        | 26  |
| § 6. Die Fälle $(11)a$ und $[12]a$ . . . . .                                                                            | 33  |
| § 7. Die Fälle $\{11\}a$ und $\{22\}a$ . . . . .                                                                        | 39  |
| § 8. Die Fälle $(11)b$ , $[12]b$ , $(13)$ , $[23]$ und $(33)$ . . . . .                                                 | 42  |
| § 9. Die Fälle $\{11\}b$ , $\{22\}b$ und $\{33\}$ . . . . .                                                             | 53  |
| § 10. Beziehungen zwischen den Flächen vom Typus $a$ und vom Typus $b$ mit gleichen<br>Konstanten $A$ und $B$ . . . . . | 56  |
| § 11. Die Fälle $[14]$ , $[24]$ und $[34]$ . . . . .                                                                    | 59  |
| § 12. $A$ und $B$ konjugiert komplex . . . . .                                                                          | 61  |
| § 13. Diskussion der einzelnen Fälle . . . . .                                                                          | 70  |
| Dritter Teil. Bäcklundsche Transformation der E-Flächen . . . . .                                                       | 81  |
| § 14. Die E-Flächen als ihre eigenen Transformierten . . . . .                                                          | 81  |
| § 15. Anwendung auf die reellen Flächen . . . . .                                                                       | 85  |
| § 16. Die allgemeinsten Bäcklundschen Transformierten der E-Flächen . . . . .                                           | 95  |
| § 17. Ausblicke . . . . .                                                                                               | 98  |
| Literaturverzeichnis . . . . .                                                                                          | 100 |
| Bemerkungen zu den Figuren-Tafeln . . . . .                                                                             | 102 |

Tabelle I.

Wegen der Bezeichnungen vgl. § 1 und § 2 a.

Bei  $ch$  und  $sh$  ist überall das Argument  $(U + V)$  hinzuzudenken.

Die nachstehenden, unter Voraussetzung der Nichtentartung abgeleiteten Formeln bleiben darüber hinaus für alle reellen Flächen gültig, für welche  $B \neq 0$  ist, wenn man für  $U, V$  usw. jeweils die aus Tabelle II ersichtlichen Funktionen von  $u$  und  $v$  bzw.  $w$  einsetzt. Siehe ferner (1; 13) S. 9, (1; 15) S. 10, (2; 10) und (2; 11) S. 13.

$$1. \quad r = \frac{RW}{ABch}; \quad \varphi = \int \frac{ABdv}{W^2}; \quad x = r \cos \varphi; \quad y = r \sin \varphi;$$

$$z = \frac{R}{AB} \left( -\frac{U'sh}{ch} + \int U'^2 du \right).$$

$$2. \quad \frac{\partial r}{\partial u} = \frac{-RU'Wsh}{ABch^2}; \quad \frac{\partial r}{\partial v} = \frac{-RV'S}{ABWch^2};$$

$$\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{-R(ABch \sin \varphi + V'S \cos \varphi)}{ABWch^2}; \quad \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{R(ABch \cos \varphi - V'S \sin \varphi)}{ABWch^2};$$

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{RSsh}{ABch^2}; \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{-RU'V'}{ABch^2}.$$

$$3. \quad \cos \alpha = \frac{S \cos \varphi - ABV'ch \sin \varphi}{ABWch}; \quad \cos \beta = \frac{S \sin \varphi + ABV'ch \cos \varphi}{ABWch};$$

$$\cos \gamma = \frac{U'}{ABch}.$$

$$4. \quad \cos \alpha' = \frac{U'W \cos \varphi}{ABch}; \quad \cos \beta' = \frac{U'W \sin \varphi}{ABch}; \quad \cos \gamma' = \frac{-S}{ABch};$$

$$\sin \gamma' = \frac{U'W}{ABch}; \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial u} = \frac{W}{ch}; \quad \frac{\partial \gamma'}{\partial v} = \frac{U'V'}{Wch}.$$

$$5. \quad \cos \xi' = \frac{-S \cos \varphi}{ABch}; \quad \cos \eta' = \frac{-S \sin \varphi}{ABch}; \quad \cos \zeta' = \frac{-U'W}{ABch}.$$

$$6. \quad \cos \lambda' = -\sin \varphi; \quad \cos \mu' = \cos \varphi; \quad \cos \nu' = 0.$$

$$7. \quad \cos \delta' = \frac{V'}{W}; \quad \sin \delta' = \frac{1}{W}; \quad \cot \delta' = V'.$$

$$8. \quad r' = Rsh; \quad \rho' = \frac{-Rsh}{W}; \quad \frac{\partial \rho'}{\partial u} = \frac{-RU'ch}{W}; \quad \frac{\partial \rho'}{\partial v} = \frac{RV'(V''sh - W^2ch)}{W^3}.$$

$$9. \quad \rho'_g = \frac{-Rsh}{V'}; \quad \frac{1}{T'} = \frac{1}{R'} = 0; \quad z + \rho' \cos \zeta' = \frac{R}{AB} \int U'^2 du.$$

$$10. \quad \cos \alpha'' = \frac{-ABch \sin \varphi - V'S \cos \varphi}{ABWch}; \quad \cos \beta'' = \frac{ABch \cos \varphi - V'S \sin \varphi}{ABWch};$$

$$\cos \gamma'' = \frac{-U'V'}{ABch}.$$

$$11. \quad \cos \xi'' = \frac{ABV'chsh \sin \varphi - (Ssh + U'^2W^2) \cos \varphi}{ABWch \sqrt{U'^2 + sh^2}};$$

$$\cos \eta'' = \frac{-ABV'chsh \cos \varphi - (Ssh + U'^2W^2) \sin \varphi}{ABWch \sqrt{U'^2 + sh^2}};$$

$$\cos \zeta'' = \frac{U'(S - sh)}{ABch \sqrt{U'^2 + sh^2}}.$$

$$12. \quad \cos \lambda'' = \frac{-U'(ABV' \sin \varphi + V'' \cos \varphi)}{ABW \sqrt{U'^2 + sh^2}}; \quad \cos \mu'' = \frac{U'(ABV' \cos \varphi - V'' \sin \varphi)}{ABW \sqrt{U'^2 + sh^2}};$$

$$\cos \nu'' = \frac{U'^2ch - U''sh}{AB \sqrt{U'^2 + sh^2}}.$$

$$13. \quad \cos \delta'' = \frac{U'}{\sqrt{U'^2 + sh^2}}; \quad \sin \delta'' = \frac{sh}{\sqrt{U'^2 + sh^2}}; \quad \cot \delta'' = \frac{U'}{sh}.$$

$$14. \quad r'' = \frac{-R}{sh}; \quad \rho'' = \frac{R}{\sqrt{U'^2 + sh^2}}.$$

$$15. \quad \rho''_g = \frac{-R}{U'}; \quad \frac{1}{T''} = \frac{-U'V'ch^2}{R(U'^2 + sh^2)}; \quad R''^2 = \frac{R^2}{U'^2}.$$

$$16. \quad x'' = y'' = 0; \quad z'' = \frac{R}{AB} \left( \int U'^2 du - \frac{U''}{U'} \right); \quad z - z'' = \frac{R}{U'} \cos \gamma' = \frac{-RS}{ABU'ch};$$

$$(x - x'') \cos \alpha + (y - y'') \cos \beta + (z - z'') \cos \gamma = 0; \quad \frac{dz''}{du} = \frac{RAB}{U'^2}.$$

Tabelle II.

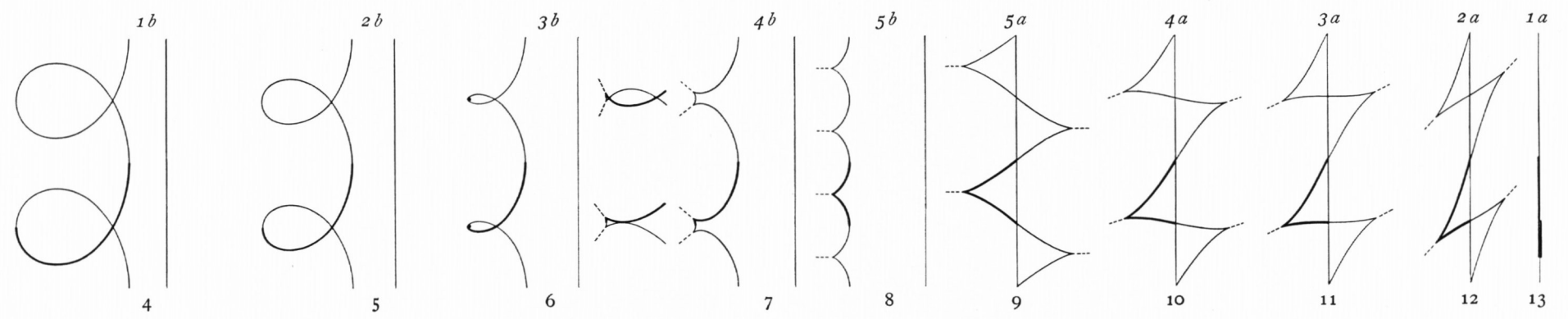
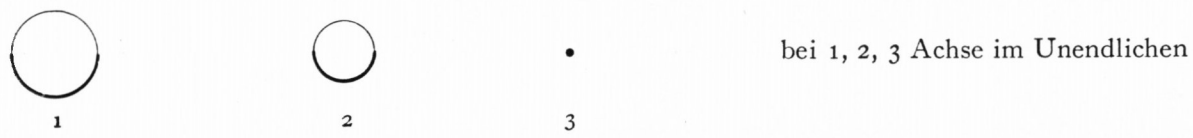
Die wichtigsten Größen, spezialisiert für die reellen Flächen, als Funktionen reeller Parameter.

| Fall                                     | Funktionen von $u$                                                                                          |                                                                                                            |                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                                                                                          | Funktionen von $w$             |                                   |                                   |                                                                                    | Funktionen von $v$                    |                                         |                                         |                                                                                                      |
|------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|                                          | $U'$                                                                                                        | $X_1$                                                                                                      | $X_2$                                                                                                      | $e^U$                                                                                                                                                                                                                                                                    | $W$                            | $Y_1$                             | $Y_2$                             | $e^V$                                                                              | $V'$                                  | $Y_1$                                   | $Y_2$                                   | $e^V$                                                                                                |
| (11) a                                   | $\frac{\sigma_3}{\sigma} u$                                                                                 | $-\frac{\sigma_1}{\sigma} u$                                                                               | $\frac{\sigma_2}{\sigma} u$                                                                                | $\frac{\sigma u}{\sigma_1 u + \sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                               | $AB \frac{\sigma}{\sigma_3} w$ | $-iA \frac{\sigma_2}{\sigma_3} w$ | $-iB \frac{\sigma_1}{\sigma_3} w$ | $\frac{B\sigma_1 w + A\sigma_2 w}{\sigma_3 w}$                                     | $-CD \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_3} v$ | $-iC \frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma_3} v$ | $-iD \frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma_3} v$ | $\frac{D\bar{\sigma}_1 v + C\bar{\sigma}_2 v}{\bar{\sigma}_3 v}$                                     |
| [12] a                                   | $\frac{\sigma_3}{\sigma} u$                                                                                 | $-\frac{\sigma_1}{\sigma} u$                                                                               | $\frac{\sigma_2}{\sigma} u$                                                                                | $\frac{\sigma u}{\sigma_1 u + \sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                               | 1                              | $-iC$                             | 0                                 | $C$                                                                                | 0                                     | $-iC$                                   | 0                                       | $C$                                                                                                  |
| $H_a$                                    | $A \coth Au$                                                                                                | $-\frac{A}{shAu}$                                                                                          | $\frac{A}{shAu}$                                                                                           | $\frac{shAu}{2A}$                                                                                                                                                                                                                                                        | $A \tanh Aw$                   | $-\frac{iA}{chAw}$                | $-\frac{iA}{chAw}$                | $\frac{2A}{chAw}$                                                                  | $-C \tanh Cv$                         | $-\frac{iC}{chCv}$                      | $-\frac{iC}{chCv}$                      | $\frac{2C}{chCv}$                                                                                    |
| R                                        | $A$                                                                                                         | 0                                                                                                          | 0                                                                                                          | $e^{Au}$                                                                                                                                                                                                                                                                 | $A$                            | 0                                 | 0                                 | $e^{-Aw}$                                                                          | $-C$                                  | 0                                       | 0                                       | $e^{-Cv}$                                                                                            |
| L                                        | $A$                                                                                                         | 0                                                                                                          | 0                                                                                                          | $e^{Au}$                                                                                                                                                                                                                                                                 | $A$                            | 0                                 | 0                                 | $e^{Aw}$                                                                           | $C$                                   | 0                                       | 0                                       | $e^{Cv}$                                                                                             |
| {22} a                                   | 1                                                                                                           | 0                                                                                                          | 0                                                                                                          | $e^u$                                                                                                                                                                                                                                                                    | 1                              | 0                                 | 0                                 | 1                                                                                  | 0                                     | 0                                       | 0                                       | 1                                                                                                    |
| (11) b                                   | $AB \frac{\sigma}{\sigma_3} u$                                                                              | $-iA \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u$                                                                          | $iB \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$                                                                           | $\frac{\sigma_3 u}{B\sigma_1 u + A\sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                           | $\frac{\sigma_3}{\sigma} w$    | $\frac{\sigma_1}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_2}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_1 w + \sigma_2 w}{\sigma w}$                                         | $-\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} v$    | $\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_1 v + \bar{\sigma}_2 v}{\bar{\sigma} v}$                                         |
| [12] b                                   | $A \frac{\sigma}{\sigma_3} u$                                                                               | $-iA \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u$                                                                          | $i \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$                                                                            | $\frac{\sigma_3 u}{\sigma_1 u + A\sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                            | $\frac{\sigma_3}{\sigma} w$    | $\frac{\sigma_1}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_2}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_1 w + \sigma_2 w}{\sigma w}$                                         | $-\frac{C}{\sin Cv}$                  | $C \cot Cv$                             | $\frac{C}{\sin Cv}$                     | $C \cot \frac{Cv}{2}$                                                                                |
| (13)                                     | $AB \frac{\sigma}{\sigma_3} u$                                                                              | $-iA \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u$                                                                          | $iB \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$                                                                           | $\frac{\sigma_3 u}{B\sigma_1 u + A\sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                           | $\frac{\sigma_3}{\sigma} w$    | $\frac{\sigma_1}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_2}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_1 w + \sigma_2 w}{\sigma w}$                                         | $-\frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} v$    | $\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_1 v + \bar{\sigma}_3 v}{\bar{\sigma} v}$                                         |
| [23]'                                    | $B \frac{\sigma}{\sigma_3} u$                                                                               | $-i \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u$                                                                           | $iB \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$                                                                           | $\frac{\sigma_3 u}{B\sigma_1 u + \sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                            | 1                              | 0                                 | $D'$                              | $D'$                                                                               | 0                                     | 0                                       | $D'$                                    | $D'$                                                                                                 |
| [23]''                                   | $B \frac{\sigma}{\sigma_3} u$                                                                               | $-i \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u$                                                                           | $iB \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$                                                                           | $\frac{\sigma_3 u}{B\sigma_1 u + \sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                            | $\frac{\sigma_3}{\sigma} w$    | $\frac{\sigma_1}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_2}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_1 w + \sigma_2 w}{\sigma w}$                                         | $-\frac{D'}{shD'v}$                   | $\frac{D'}{shD'v}$                      | $D' \coth D'v$                          | $D' \coth \frac{D'v}{2}$                                                                             |
| (33)                                     | $AB \frac{\sigma}{\sigma_3} u$                                                                              | $-iA \frac{\sigma_2}{\sigma_3} u$                                                                          | $iB \frac{\sigma_1}{\sigma_3} u$                                                                           | $\frac{\sigma_3 u}{B\sigma_1 u + A\sigma_2 u}$                                                                                                                                                                                                                           | $\frac{\sigma_3}{\sigma} w$    | $\frac{\sigma_1}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_2}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_1 w + \sigma_2 w}{\sigma w}$                                         | $-\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma} v$    | $\frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_2 v + \bar{\sigma}_3 v}{\bar{\sigma} v}$                                         |
| $H_b$                                    | $A \tanh Au$                                                                                                | $-\frac{iA}{chAu}$                                                                                         | $\frac{iA}{chAu}$                                                                                          | $\frac{chAu}{2A}$                                                                                                                                                                                                                                                        | $A \coth Aw$                   | $\frac{A}{shAw}$                  | $\frac{A}{shAw}$                  | $\frac{2A}{shAw}$                                                                  | $-C \coth Cv$                         | $\frac{C}{shCv}$                        | $\frac{C}{shCv}$                        | $\frac{2C}{shCv}$                                                                                    |
| {22} b                                   | $\tanh u$                                                                                                   | $-\frac{i}{chu}$                                                                                           | $\frac{i}{chu}$                                                                                            | $\frac{chu}{2}$                                                                                                                                                                                                                                                          | $\coth w$                      | $\frac{1}{shw}$                   | $\frac{1}{shw}$                   | $\frac{2}{shw}$                                                                    | $-\frac{1}{v}$                        | $\frac{1}{v}$                           | $\frac{1}{v}$                           | $\frac{2}{v}$                                                                                        |
| {33}                                     | $A \tanh Au$                                                                                                | $-\frac{iA}{chAu}$                                                                                         | $\frac{iA}{chAu}$                                                                                          | $\frac{chAu}{2A}$                                                                                                                                                                                                                                                        | $A \coth Aw$                   | $\frac{A}{shAw}$                  | $\frac{A}{shAw}$                  | $\frac{2A}{shAw}$                                                                  | $-C' \cot C'v$                        | $\frac{C'}{\sin C'v}$                   | $\frac{C'}{\sin C'v}$                   | $\frac{2C'}{\sin C'v}$                                                                               |
| [14]                                     | 0                                                                                                           | $-iA$                                                                                                      | 0                                                                                                          | $\frac{1}{A}$                                                                                                                                                                                                                                                            | $\frac{A}{\sin Aw}$            | $A \cot Aw$                       | $\frac{A}{\sin Aw}$               | $A \cot \frac{Aw}{2}$                                                              | $-\frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} v$    | $\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_1 v + \bar{\sigma}_3 v}{\bar{\sigma} v}$                                         |
| {24}                                     | 0                                                                                                           | $-i$                                                                                                       | 0                                                                                                          | 1                                                                                                                                                                                                                                                                        | $\frac{1}{\sin w}$             | $\cot w$                          | $\frac{1}{\sin w}$                | $\cot \frac{w}{2}$                                                                 | $-\frac{1}{shv}$                      | $\frac{1}{shv}$                         | $\coth v$                               | $\coth \frac{v}{2}$                                                                                  |
| [34]                                     | 0                                                                                                           | $-iA$                                                                                                      | 0                                                                                                          | $\frac{1}{A}$                                                                                                                                                                                                                                                            | $\frac{A}{\sin Aw}$            | $A \cot Aw$                       | $\frac{A}{\sin Aw}$               | $A \cot \frac{Aw}{2}$                                                              | $-\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma} v$    | $\frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_2 v + \bar{\sigma}_3 v}{\bar{\sigma} v}$                                         |
| $A^2$ und $B^2$<br>konjugiert<br>komplex | $(\mathfrak{A}^2 + \mathfrak{B}^2) \frac{\sigma}{\sigma_2} u$<br>$= \frac{\sigma_2}{\sigma} (\omega_2 - u)$ | $(\mathfrak{B} - i\mathfrak{A}) \frac{\sigma_3}{\sigma_2} u$<br>$= \frac{\sigma_1}{\sigma} (\omega_2 - u)$ | $(\mathfrak{B} + i\mathfrak{A}) \frac{\sigma_1}{\sigma_2} u$<br>$= \frac{\sigma_3}{\sigma} (\omega_2 - u)$ | $\frac{\mathfrak{B}(\sigma_1 u + \sigma_3 u) + i\mathfrak{A}(\sigma_1 u - \sigma_3 u)}{2 \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \sigma_2 u}}$<br>$= \frac{\sigma_1(\omega_2 - u) + \sigma_3(\omega_2 - u)}{2 \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \sigma (\omega_2 - u)}}$ | $\frac{\sigma_2}{\sigma} w$    | $\frac{\sigma_1}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_3}{\sigma} w$       | $\frac{\sigma_1 w + \sigma_3 w}{2 \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \sigma w}}$ | $-\frac{\bar{\sigma}_2}{\sigma} v$    | $\frac{\bar{\sigma}_1}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_3}{\sigma} v$       | $\frac{\bar{\sigma}_1 v + \bar{\sigma}_3 v}{2 \sqrt{\mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \bar{\sigma} v}}$ |

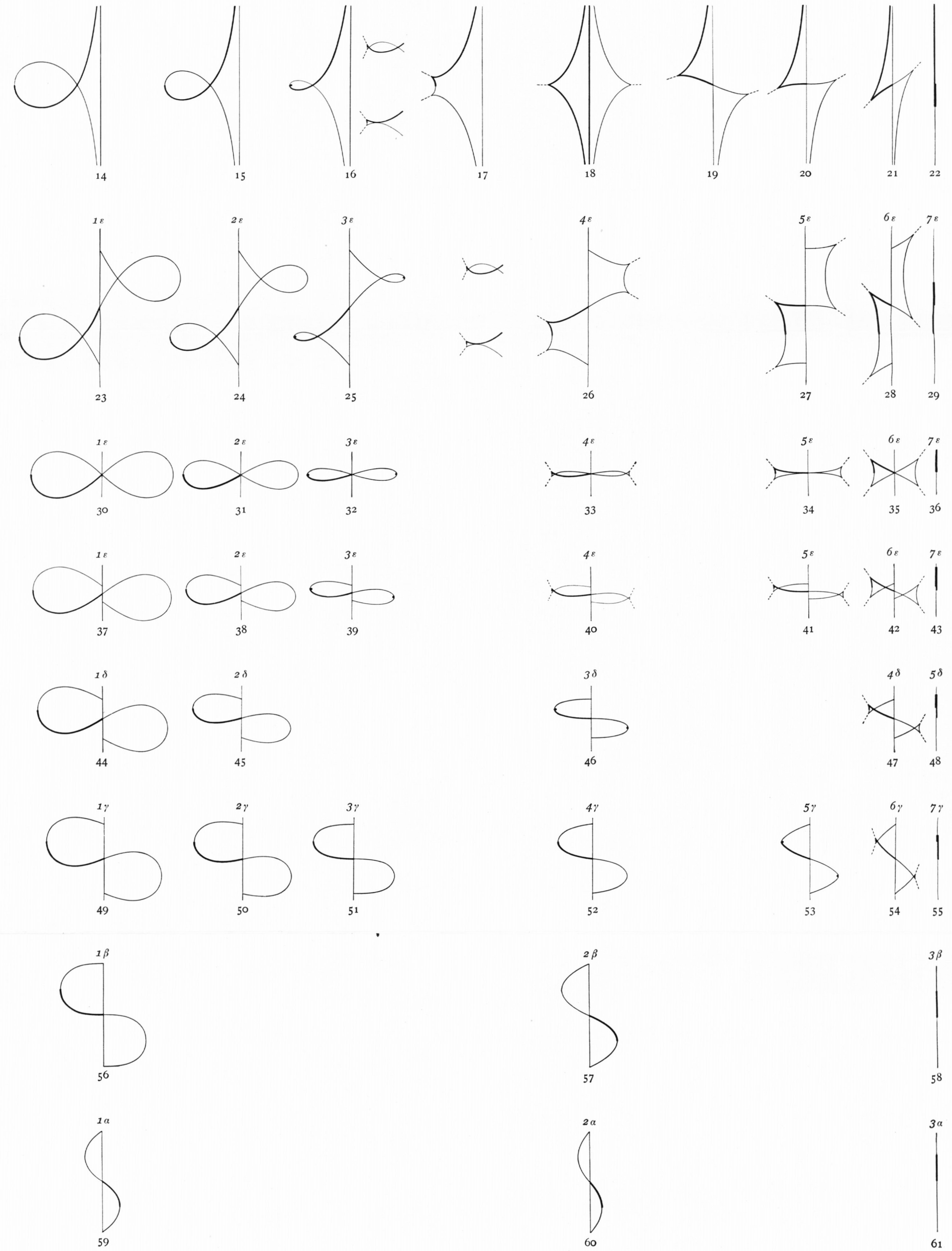
Für die Achse als Grenzfall bleibt man mit Tabelle I in Einklang, wenn man  $A > 1$ , im übrigen beliebig, wählt, und dann  $U + V = \pm \infty$ ;  $U' = W = A$  setzt.



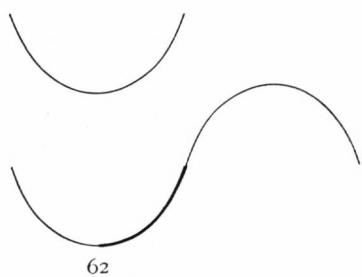
Entartungsformen der nächsten Reihe für  $B = 0$ :



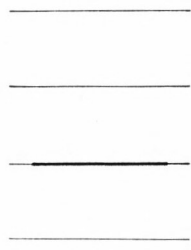
Entartungsformen der vorhergehenden Reihe für  $A = B$ :







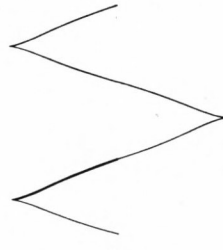
62



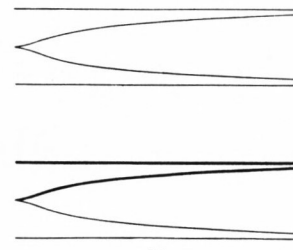
63



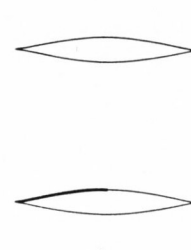
64



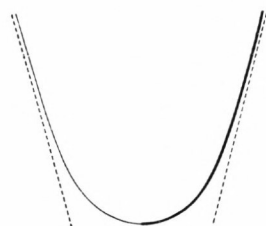
65



66

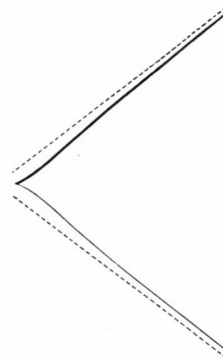


67

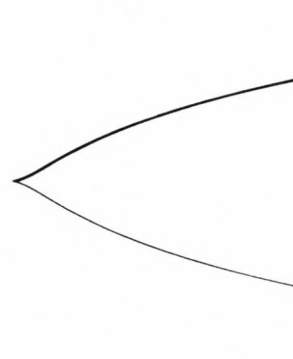


68

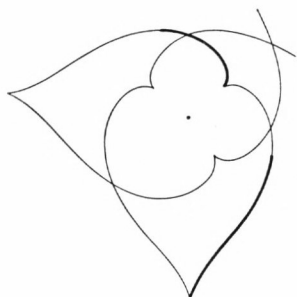
Entartungsformen  
der vorhergehenden  
Reihe für  $A = B$



69



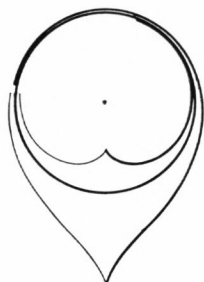
70



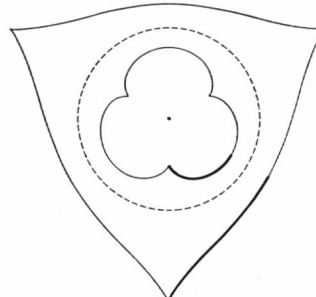
71



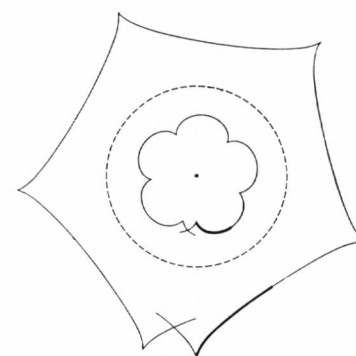
72



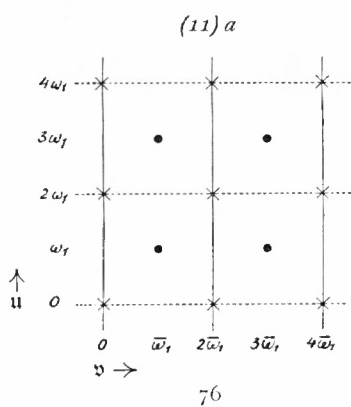
73



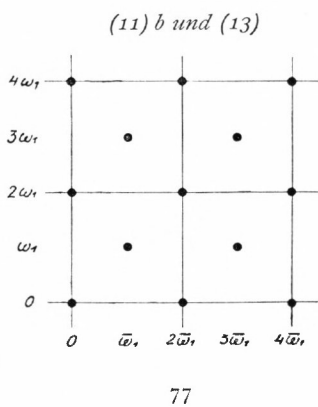
74



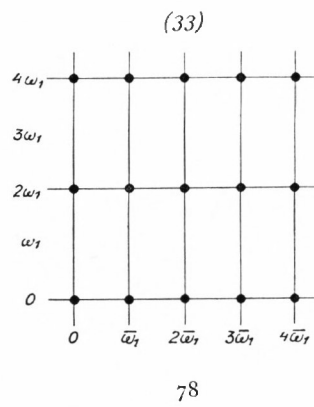
75



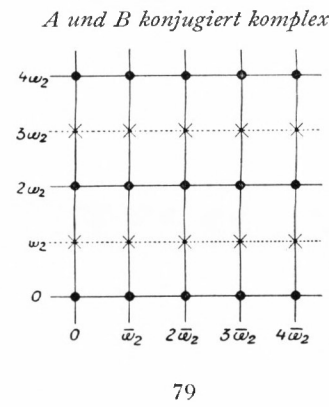
76



77



78



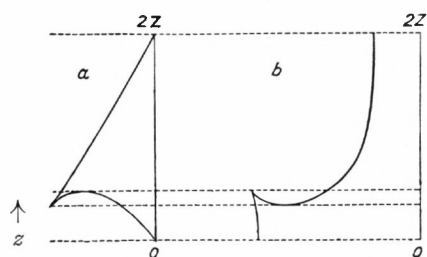
79

Zeichenerklärung zu Fig. 76-79:

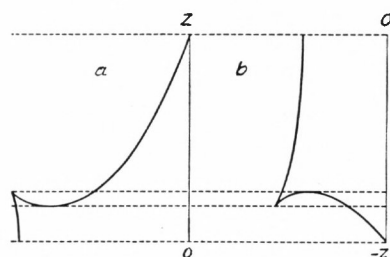
..... Symmetriezentrum  
—— Symmetrieebene

• Symmetrieachse in der Ebene  $\mathfrak{v} = \text{const.}$

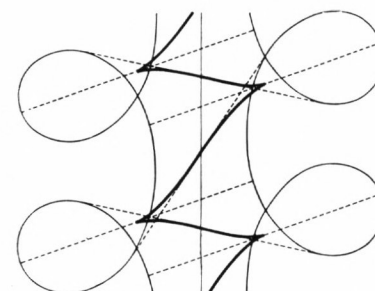
× Symmetrieachse senkrecht zur Ebene  $\mathfrak{v} = \text{const.}$



80



81



82