

Theorie

der

Beugungerscheinungen

kreisförmig begrenzter, symmetrischer,
nicht sphärischer Wellen.

Von

Dr. Rudolf Straubel.

Aus den Abhandlungen der k. bayer. Akademie der Wiss. II. Cl. XVIII. Bd. I. Abth.

München 1893.

Verlag der k. Akademie
in Commission bei G. Franz.

Einleitung.

Bekanntlich ist das Bild eines einfarbigen Fixsternes im Fernrohr nicht „punktförmig“, sondern besteht vielmehr bei einem gut corrigierten Instrumente aus einer kleinen Scheibe, deren Helligkeit nach dem Rande zu abnimmt und einer Anzahl concentrischer, nahezu aequidistanter Ringe, die mit zunehmender Grösse ebenfalls rasch lichtschwächer werden. Bei weissem Lichte modificiert sich die Erscheinung insofern, als das in der Mitte weisse Scheibchen am Rande rötlich gesäumt erscheint, und die concentrischen Ringe Farben zeigen, deren Lebhaftigkeit nach aussen sich vermindert.

Die theoretische Erklärung dieser zuerst von W. Herschel¹⁾ und Fraunhofer²⁾ genauer beobachteten Erscheinung wurde fast zu gleicher Zeit von Airy³⁾ und Scherard⁴⁾ aus den Principien der Fresnel'schen Diffractionstheorie gegeben. Das Bild wird hiernach betrachtet als der Interferenzeffekt einer kreisförmig begrenzten, concaven, sphärischen Welle und zwar als derjenige Interferenzeffekt, welcher in einer durch das Centrum der Welle gehenden Ebene auftritt. Der besonders von Scherard versuchte Nachweis der Uebereinstimmung der theoretischen Resultate mit den experimentell gefundenen Thatsachen fiel für die Theorie vollkommen befriedigend aus.

1) W. Herschel. Experiments of ascertaining, how far telescopes will enable us to determine very small angles . . . Phil. Trans. of the Royal soc. of London for the year 1805 part I pag. 31 etc. W. Herschel, Phaenomena produced by Apertures in Various figures (Theory of Light by J. Herschel § 766 1828).

2) Fraunhofer, Neue Modification des Lichtes . . . Schumacher's astron. Nachr. t. II. Gilbert's Ann. LXXIV, 337. Denkschriften der Münchener Akademie t. VIII. 1823.

3) Airy, On the Diffraction of an Object-Glass with Circular Aperture. Trans. of the Camb. Phil. Soc. V 283.

4) Scherard, Die Beugungserscheinungen aus den Fundamentalgesetzen . . . Mannheim 1835.

Für die Punkte ausserhalb der Fokalebene oder, bei endlicher Entfernung des leuchtenden Punktes, ausserhalb der Bildebene versuchte kurz darauf Knochenhauer¹⁾ die nötigen Formeln zu entwickeln; dieselben sind jedoch wenig durchsichtig und so blieb es Struve²⁾ und Lommel³⁾ vorbehalten, die Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter sphärischer Wellen theoretisch zu behandeln. Das Hauptergebniss dieser beiden Arbeiten, von denen diejenige Lommels auch die numerische und experimentelle Seite der Untersuchung in ausserordentlich umfassender Weise erledigte, ist der Nachweis der Bedeutung der Bessel'schen Functionen für das obige Problem, welcher Nachweis von Lommel⁴⁾ in einer späteren Arbeit auch auf die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme ausgedehnt wurde.

Nachdem so die Untersuchungen bei kreisförmiger Begrenzung für sphärische Wellen erledigt waren, lag es nahe, einen Schritt weiter zu thun und nicht sphärische Wellen zu betrachten. Es war dies um so mehr geboten, als ja thatsächlich in den optischen Instrumenten die auf dem Boden der Dioptrik ideale Forderung vollständiger Beseitigung der sphärischen Aberration aus technischen Gründen unmöglich ist. Jedes Vorhandensein von sphärischer Aberration ist aber gleichbedeutend mit einer Abweichung der Wellen von der Kugel- oder Kreiscylinder-Gestalt. Daraus ergibt sich die hervorragende Bedeutung der Behandlung der Beugungserscheinungen für andere als die bis dahin vorausgesetzten Wellenformen.

Lord Rayleigh⁵⁾ scheint der erste gewesen zu sein, der die Wichtigkeit dieser Untersuchungen für die Theorie der optischen Instrumente mit klarem Blicke erkannte⁶⁾ und es unternahm, unter diesem Gesichtspunkte

1) Knochenhauer, Die Undulationstheorie des Lichtes. Berlin 1839.

2) Struve, H. Ueber die allgemeine Beugungsfigur in Fernrohren. Mém. de l'ac. des sc. de St. Petersb. VII ser. vol. XXXIV. 1886.

3) Lommel, Die Beugungserscheinungen einer kreisrunden Oeffnung. Kgl. bayer. Akad. der Wiss. II. Cl. XV. Bd. II. Abt. 1884.

4) Lommel, Die Beugungserscheinungen geradlinig begrenzter Schirme. Kgl. bayer. Akad. der Wiss. II. Cl. XV. Bd. III. Abt. 1886.

5) Lord Rayleigh, Investigations in Optics, with special reference to the Spectroscope. Phil. Mag. Nov. 1879.

6) Allerdings war bereits früher der einfachste Typus einer nicht symmetrischen Cylinderwelle behandelt worden (Airy, Intensity of Light in the Neighbourhood of a Caustic. Trans. of

theoretische Darstellungen zu liefern. Er behandelte zunächst die zwei einfachsten¹⁾ Fälle cylindrischer Wellen und zwar für einen Spalt, der nach der einen Richtung gleich wie die Wellen unendlich ausgedehnt war und dessen Begrenzungslinien in der anderen Richtung den Erzeugenden des Wellencylinders parallel waren. Diese Typen haben in formeller Beziehung die Annehmlichkeit, dass die in Betracht kommenden Integrale nur von einer Coordinate abhängen und demnach für die Auswertung sowohl wie für die Discussion geringere Schwierigkeiten bieten. Was den Fall einer axial symmetrischen Welle bei kreisförmiger Begrenzung, also den für die Praxis wichtigsten Fall anbelangt, so beschränkt sich Rayleigh darauf, die Intensität des Axenbildpunktes für eine der vierten Potenz der linearen Oeffnung proportionale Aberration darzustellen. Er findet, dass die Intensität dieses Punktes bei einem Gangunterschiede der Central- und Rand-Strahlen von $\frac{1}{8}$ auf 0,9464, von $\frac{1}{4}$ auf 0,8003 und von $\frac{1}{2}$ auf 0,3947 von derjenigen Intensität herabsinkt, welche der aberrationsfreien Welle entsprechen würde, und schliesst daraus, dass in dieser Ebene die Aberration ungefähr bei einer Gangdifferenz von einer viertel Wellenlänge merklich zu werden beginne. Er erwähnt aber auch, dass für die Zwecke der Praxis die Bedeutung dieses Resultates durch eine Veränderung der Einstellungsebene modificiert werden könne.

Mit diesen einleitenden Bemerkungen dürfte²⁾ bereits die Behandlung

the Soc. of Camb. VI 379. 1834); es ist dies indess einerseits bei einer ganz anderen Gelegenheit, nämlich für die Theorie des Regenbogens geschehen, und es ist andererseits dieser Fall doch auch insofern verschiedener Natur, als die Welle beiderseits unendlich ausgedehnt angenommen werden konnte, so dass die künstliche physische Begrenzung hinwegfiel. Dass übrigens Airy sich der Bedeutung dieser Untersuchung bewusst war, zeigt der sehr allgemein gehaltene Titel der Abhandlung.

1) Das Wort „einfachste“ bezieht sich selbstverständlich auf das hier vorliegende Problem. Gemeint sind die Fälle, wo das Aberrationsglied der 3. resp. 4. Potenz der linearen Oeffnung proportional ist, die Integrale also die Form $\int e^{i(ax + \beta x^3)} dx$ resp. $\int e^{i(ax + \beta x^4)} dx$ besitzen. Der erstere dieser Fälle ist für die Theorie des Spektroskopes wichtig und von Rayleigh für die Ebene der Centralstrahlen bei 4 Werten von β gegeben; der 2. besitzt keine hervorragendere Anwendung und ist aus diesem Grunde nur die Intensität der Bildlinie untersucht worden.

2) Man könnte einwenden, dass die von Mascart in seinem traité d'optique, t. I p. 413 gegebene Grundformel für unser Problem noch zu erwähnen gewesen wäre, indess ist dieselbe unrichtig. Es ist dieser Irrtum wahrscheinlich durch eine falsche Analogisierung veranlasst; er hat jedoch keine Folgen, da die allgemeine Formel nicht gebraucht, sondern nur das von Rayleigh gegebene reproduciert wird.

der in der Ueberschrift bezeichneten Aufgabe ihre Rechtfertigung gefunden haben, nämlich der Aufgabe, die Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter, axial symmetrischer, nicht sphärischer Wellen theoretisch darzustellen. Wir wollen indess, um die Bedeutung des Problem es in praktischer Beziehung etwas weiter darzulegen, noch einige Punkte berühren.

Der erste derselben ist die Frage nach der „Pointierungs“- oder „Einstellungs-Ebene“. Diese Frage ist bisher auch für den auf Grundlage der Dioptrik idealen Fall sphärischer Wellenflächen weder theoretisch noch experimentell gelöst worden. Es ist nun zwar für denselben von vorneherein zu erwarten, dass die Einstellungsebene der dioptrisch bestimmten Bildebene ausserordentlich nahe liegt, aber der Schluss, dass sie mit ihr zusammenfällt, schwebt nichtsdestoweniger in der Luft. Fassen wir dieses Zusammenfallen aber als Behauptung auf, so wird dieselbe zwar sowohl durch direkte Messungen wie auf indirektem Wege gestützt, aber abgesehen davon, dass dieses Zusammenfallen doch nicht strenger bewiesen werden kann, als die Beobachtungsfehler zulassen, muss auch berücksichtigt werden, dass systematische mit modernen Hilfsmitteln und allen Cautelen angestellte Messungen in dieser Richtung bisher noch nicht unternommen worden sind. Es kann nun allerdings hierbei auch der Fall eintreten, dass die Einstellungsebene überhaupt keine bestimmte, von der Individualität des Beobachters einerseits und der Art des zur Untersuchung verwandten Objektes andererseits unabhängige ist, sondern mit diesen beiden Umständen variiert. Diese Schwankungen werden dann aber jedenfalls sehr gering sein und die Thatsache derselben trifft auch nicht die theoretische Bestimmung, wenigstens sofern man nur die physikalische Seite des Problems im Auge hat und nicht ausserdem Erfahrungsthat sachen physiologischer und psychologischer Natur der Lösung mit zu Grunde legen will.

Complicierter wird natürlich die theoretische Bestimmung der Pointierungsebene, wenn es sich nicht um streng corrigierte, sondern um mit Aberration behaftete Systeme handelt; aber gerade hier hat dieselbe ein grosses Interesse, da ja bereits von dioptrischen Gesichtspunkten aus Zweifel über die Lage derselben vorhanden gewesen sind. So hat man vielfach die Ebene des (dioptrisch definierten) „kleinsten Zerstreuungs-

kreises“ als Einstellungsebene betrachtet und diese Voraussetzung der rechnerischen Bearbeitung zugrunde gelegt. Vom Standpunkte der Wellentheorie aus hat ersteres natürlich von vorneherein gar keinen Sinn oder wenigstens keine Begründung; man muss vielmehr bei vorgegebener Construction eines Objectivs resp. Gestalt der austretenden Wellenfläche die Diffraktionserscheinungen für eine hinreichend enge Anzahl von Ebenen durchrechnen und dann die Ebene bester „Definition“ auswählen.

Mit diesen Betrachtungen kommen wir jetzt zum zweiten Punkte unserer Darlegung, nämlich zum Auflösungsvermögen eines Objectivs. Auf dem Boden der Dioptrik war dasselbe natürlich bei Steigerung des Correctionszustandes einer entsprechenden Erhöhung fähig und insbesondere entsprach einem dioptrisch vollständig corrigierten Objectiv in physikalischer Beziehung auch ein Auflösungsvermögen ohne Grenzen. Vom Standpunkte der Wellentheorie aus ergaben sich dagegen ohne Schwierigkeit für den dioptrisch idealen Fall bestimmte Schranken, die man zwar durch geeignete Massregeln, z. B. Abblendungen, etwas weiter hinausrücken kann, die aber nichtsdestoweniger vorhanden bleiben. Solche Grenzen sind sicher für jede beliebige andere Construction ebenfalls vorhanden, und die vorliegende Abhandlung will zum Teil die analytischen Hilfsmittel schaffen, welche bei gegebenem dioptrisch bestimmtem Correctionszustand eines Objectivs das Auflösungsvermögen desselben berechnen lassen. — Es ist von vorneherein sicher, dass dasselbe mit dem zur Untersuchung benutzten Objecte variiert und wir müssen deshalb entweder eine eindeutige Definition für das Auflösungsvermögen annehmen, oder die Möglichkeit haben, mit verschiedenen Objecten gewonnene Zahlen auf einander zu reducieren. Wenn Foucault¹⁾ z. B. seine Untersuchungen mit Gittern machte, so ist der hierbei gefundene Wert nicht zu vergleichen mit dem z. B. von Dawes²⁾ an Doppelsternen gewonnenen. Da nun aber die Reduktion nur durch ausserordentlich complicierte analytische Entwicklungen einerseits und weitläufige numerische Rechnungen andererseits

1) Foucault, Mémoire sur la construction des télescopes en verre argenté. Annales de l'observ. de Paris. vol. V.

2) Dawes, Catalogue of micrometrical measurements of double stars. Mem. of the Royal Astr. Soc. vol. XXXV.

ermöglicht werden könnte, so scheint die eindeutige Definition des Auflösungsvermögens der einzig brauchbare Ausweg zu sein. Freilich bietet auch dieser Schwierigkeiten, auf die indess hier nicht eingegangen werden soll.

Wir können weiter noch unter einem zweiten Gesichtspunkte das Auflösungsvermögen betrachten, nämlich an die Frage nach der Abhängigkeit desselben von einem gegebenen Correctionszustande die unmittelbar damit zusammenhängende schliessen, welcher von diesen dioptrisch definierten Zuständen oder welche Wellenform liefert das grösste Auflösungsvermögen. Man kann geneigt sein, dies dem dioptrisch idealen Falle, der streng sphärischen Welle zu vindicieren und in der That besteht diese Meinung auch unter Forschern auf diesem Gebiete. André¹⁾ z. B. sagt: . . . ces imperfections ont toutes pour résultat de changer la forme du solide de diffraction théorique, de manière à augmenter en définitive le diamètre du disque central correspondant à l'image d'un point. Tous les instrumentes affectés d'aberration ont donc, dans chaque cas, une constante de séparation plus grande que celles que nous venons de donner.

Man kann die Möglichkeit, ja die Wahrscheinlichkeit davon vollständig zugeben; aber man fragt doch unwillkürlich, wie kommt André zu dieser ganz bestimmt ausgesprochenen Behauptung. Rein erfahrungsmässig kann der Inhalt derselben nicht gewonnen sein, denn dann könnten wir doch nicht behaupten, dass er den Charakter der Allgemeingiltigkeit besitzt und auf analytischem Wege, durch blosse Discussion des Intensitätsausdruckes gefunden zu sein, dürfte bei der Complicirtheit der vorkommenden Ausdrücke äusserst unwahrscheinlich sein. Vielleicht hat André eine Vorstellung vorgeschwebt, wie sie auch sonst noch zu treffen ist²⁾, dass nämlich eine Superposition der Beugungskreise und der dioptrisch bestimmten Aberrationskreise stattfindet, eine Vorstellung indess, die auf dem Boden der Wellentheorie a priori keine Begründung hat.³⁾

1) André, Étude de la diffraction dans les instruments d'optique. Annal. de l'école normale supérieure 1876.

2) Kramer, Allgemeine Theorie der 2 und 3 theiligen Fernrohrobjective. Berlin 1885. p. 82.

3) Czapski z. B. sagt (Bemerkungen zu der Abhandlung von E. v. Hoegh: „Die sphärische Abweichung Zeitschr. für Instr.-Kunde, Jahrgang 8. 1888. Juni, pag. 203): Von Beugungsaberration zu reden, wie es z. B. Kramer thut, und die Grösse der Gesamtaberration so zu bestimmen, dass der Durchmesser des „sphärischen Aberrationskreises“ zu dem der „Beugungsaberration“ einfach hinzu addirt wird, erscheint doch sehr gewagt.“

Man muss also einerseits zwar die Möglichkeit der Richtigkeit des André'schen Satzes offen lassen, kann aber gleichwohl andererseits der Meinung sein, dass derselbe falsch ist, und dass man vielmehr bei einem nach dioptrischen Grundsätzen nicht vollständig corrigierten System unter Umständen eine Steigerung des Auflösungsvermögens erzielen kann. Es bedarf natürlich kaum der Erwähnung, dass für die Wellenform, welche die Eigenschaft des grössten Auflösungsvermögens besässe, die Abweichungen gegenüber der Kugelgestalt sehr gering sein und sich wahrscheinlich nur auf kleinere Bruchteile einer Wellenlänge belaufen würden. Ich lasse es weiter auch dahingestellt, ob die Technik in Bezug auf den Charakter der Glassorten und die präzise Erreichung der Dimensionen gegenwärtig oder in nächster Zeit in der Lage wäre, nach diesen Grundsätzen Objektive zu bauen, ob mit anderen Worten diese Untersuchungen einen direkten Nutzen für die Praxis haben könnten, und kann dies um so mehr thun, als die vorliegende Abhandlung dieses Problem nicht behandelt, aber ich wollte es nicht unterlassen, in dieser Richtung auf die, wenn auch nur entfernte, Möglichkeit eines Fortschrittes hinzuweisen.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist vielmehr, die analytischen Ausdrücke für die Beugungserscheinungen kreisförmig begrenzter symmetrischer, nicht sphärischer Wellen zu geben und sie für die Zwecke der Rechnung in geeigneter Weise darzustellen.

Die gegebenen Betrachtungen gliedern sich in folgender Weise:

Teil I. Aufstellung der Voraussetzungen und Fundamentalformeln.

Teil II. Entwicklung der letzteren für grössere Abstände von der Symmetrieaxe der Welle.

Teil III. Entwicklungen für Punkte in der Nähe dieser Axe.

Teil IV. Allgemeinere Feststellungen über die betrachtete Lichtwirkung.

I. Aufstellung der Voraussetzungen und Fundamentalformeln.

Wir werden eine Reihe von Voraussetzungen allgemeinerer wie speciellerer Natur machen, die zunächst hier kurz angegeben werden mögen. Es sind dies folgende:

- 1) Die Benutzbarkeit der Stokes'schen Diffraktionsformeln und die Annahme eines bestimmten Vibrationszustandes der Welle.
- 2) Die Kleinheit der Neigung der Elementarstrahlen gegenüber der Wellennormale oder die Möglichkeit der Ersetzung der Neigung durch einen Mittelwert.
- 3) Die Kleinheit der Abweichungen der Wellenfläche von der Kugelgestalt und
- 4) Die Beschränkung der Untersuchung auf die der Axe nahen Punkte der Ebenen, die den Bildebenen der Strahlen der verschiedenen Zonen nahe liegen.

Eine genauere Präcisierung der Voraussetzungen kann leicht zeigen, dass die letzten drei, also die specielleren Charakters, keineswegs enger Natur sind, sondern vielmehr hinreichenden Spielraum lassen.

Was zunächst die Stokes'schen Diffraktionsformeln anbelangt, so besagen dieselben folgendes: Es sei auf dem Element $d\omega$ einer Wellenfläche eine Verschiebung von der Form $g(bt)$ gegeben. Betrachten wir dann die von diesem Element herrührende Störung am Endpunkte eines Radiusvektors d , der nur der Bedingung genügen muss, gegenüber der Wellenlänge gross zu sein, so zeigt dieselbe folgende Eigenschaften. Die bewirkte Verschiebung ist senkrecht zum Radiusvektor, liegt in der durch Radiusvektor und Verschiebungsrichtung in $d\omega$ gelegten Ebene und hat die Grösse $\frac{d\omega}{4\pi d} g'(bt-d) \cdot (1 + \cos \vartheta) \sin \eta$, wo ϑ und η die Winkel zwischen Radiusvektor einerseits und Wellennormale resp. Verschiebungsrichtung in $d\omega$ andererseits bedeuten. Diese Formeln sind von Stokes auf Grund der Elasticitätstheorie abgeleitet worden¹⁾ und haben abgesehen von der Berücksichtigung der Polarisationsverhältnisse und der Neigung der

1) Stokes, On the dynamical theory of diffraction. Trans. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. IX. p. 1. 1849.

Elementarstrahlen zur Wellennormale vor allem gegenüber den Fresnel'schen den Vorzug, bei der Anwendung auf eine Vollwelle die Phase richtig zu geben.

Was zweitens den Vibrationszustand der Welle anbetrifft, so wollen wir von demselben zunächst in genetischer Weise eine Vorstellung zu gewinnen versuchen.

Wir betrachten zu diesem Zwecke eine ebene Welle mit geradlinigen und unter einander parallelen Schwingungen, deren Amplitudenverhältnisse und damit deren dynamische Möglichkeit wir in suspenso lassen. Wir stellen uns weiter vor, dass diese Welle sich in der Richtung der zu ihr Senkrechten fortbewegt und auf diesem Wege Verzögerungen erfährt, die um eine bestimmte Normale herum (axial) symmetrisch sind. Diese Verzögerungen sollen schliesslich in einem beliebigen Augenblicke den Gesamteffekt bewirkt haben, ein um jene Normale symmetrisch liegendes kreisförmiges Stück unserer Welle in eine (concave) Kugelcalotte zu verwandeln.

Einen solchen Process kann man bekanntlich physikalisch mit Hilfe eines Cylinders verwirklichen, falls dieser die Eigenschaft besitzt, einen von der Axe nach dem Mantel zu in bestimmter Weise abnehmenden Brechungs-exponenten zu besitzen.

Es fragt sich nun, wie sind die Polarisationsverhältnisse dieses so deformierten Wellenteiles. Da wir uns den Process rein geometrisch denken wollen, also das Auftreten besonderer eventuell dynamisch bedingter polarisatorischer Effekte von vorneherein ausschliessen, so ist folgendes klar. Alle Schwingungsrichtungen auf dem betrachteten Teil der Kugelwelle fallen in die Curven, die durch den Schnitt dieser Kugel¹⁾ mit der Schaar derjenigen parallelen Ebenen entstehen, welche die Normalen und Schwingungsrichtungen unserer als Ausgangselement betrachteten ebenen Welle enthalten.

So liegt die Sache rein geometrisch betrachtet. Stellen wir nun aber weiter die Forderung, dass diese Bewegung nach dynamischen Rücksichten eine freie elastische Schwingung sein soll, so dürfen die Intensitäts- oder Amplituden-Verhältnisse nicht willkürlich sein. Als freie elastische

1) Die Schwingungen sollen in der Wellenfläche oder deren Tangentialebenen stattfinden.

Welle müssen ihre Punkte gleiche Phase besitzen, denn für solche Wellen gilt das Princip der Erhaltung der Schwingungsdauer. Ferner ist einzusehen, dass infolge der Erfahrungsthatſache, dass für die Erklärung der Erscheinungen des Lichtes die Compressibilität des Aethers nicht beansprucht werden darf, die Verschiebungen in jeder der oben genannten Ebenen gleich gross sein müssen. Stellen wir weiter die Forderung, dass innerhalb der Wellenfläche keine Reibungen vorkommen sollen, so resultiert daraus, dass die Bewegung in der im Raume fixiert gedachten Wellenfläche in einer einfachen (periodischen) Drehung dieser Fläche um eine Axe bestehen muss, die zur ursprünglichen Schwingungsrichtung und zur Symmetrielinie senkrecht steht und durch das Centrum der Welle geht.

Die vorliegenden Betrachtungen sind, wie man sieht, keineswegs streng dynamischer Natur, sondern sollen vielmehr im wesentlichen nur unsere Anschauung unterstützen. Würden wir auf Grund dieser Einsicht unsere Aufgabe¹⁾ behandeln, so würde dieselbe mehr unter einen mathematischen als physikalischen Gesichtspunkt fallen. Diese Beschränkung ist jedoch keineswegs nötig, denn die für die Kugel plausibel gemachte Art der Bewegung ist aus den Elementen der Elasticitätstheorie ohne weiteres als möglich herzuleiten und ist in der That der einfachste Fall der Bewegung auf einer kugelförmigen Wellenfläche.²⁾ So weit über das rein theoretische Problem.

Was den wirklichen Zustand einer ursprünglich ebenen, geradlinig und gleichgerichtet polarisierten Welle, die durch die ungleich verzögernde Wirkung eines Objectivs eine Durchbiegung erfahren hat, anbetrifft, so ist derselbe ja allerdings ein anderer, da beim Hindurchtreten des Lichtes durch das Objectiv neue polarisatorische Effekte auftreten.³⁾ Indessen wird derselbe bei einer kleinen Anzahl der dioptrischen Trennungsflächen für mässige Krümmungen derselben und geringes Oeffnungsverhältniss des Objectivs sicher nicht viel von dem obigen abweichen.⁴⁾

1) Die für eine wenig von der Kugelgestalt abweichende Wellenform eintretenden Modificationen sollen hier als unbedeutend betrachtet werden.

2) Kirchhoff, Optik.

3) Bratuschek, Zeitschr. für wiss. Microscopie . . Bd. IX. 1892. p. 145.

4) Sehen wir von der strengen Berücksichtigung dieser besonderen Effekte ab, so ist klar, dass wir auch den oben geschilderten Zustand nicht in aller Strenge voraussetzen brauchen; die

Die zweite beschränkende Annahme war die Kleinheit der Neigung der Elementarstrahlen gegenüber der Wellennormale. Was es mit dieser jedoch für eine Bewandtniss hat, lässt sich leicht schätzen. Nehmen wir zu diesem Zwecke zunächst wieder eine sphärische Wellenfläche an, so ist bekanntlich in der Fokalebene für das m te Minimum, also den m ten dunklen Ring, der halbe vom Scheitel aus gerechnete Oeffnungswinkel (γ) annähernd durch den Wert $\frac{\lambda}{2R} (0,22 + m)$ gegeben, worin $2R$ die lineare Oeffnung und λ die Wellenlänge des angewandten Lichtes bedeutet. Nach der Formel von Stokes kommen die Cosinus der Winkel ϑ und $90 - \eta$ vor. Nun ist offenbar $90 - \eta$ höchstens gleich ϑ und im Durchschnitt nur halb so gross, ferner erreicht ϑ nur im Maximum die Grösse des vom Scheitel aus gerechneten Winkels γ , wir werden also höchstens Glieder von der Grösse $\frac{2 - (1 + \cos \gamma) \cos \gamma}{2}$ gegenüber der Einheit vernachlässigen, falls wir den Faktor $(1 + \cos \vartheta) \sin \eta$ in der Stokes'schen Formel gleich 2 setzen. $\frac{2 - (1 + \cos \gamma) \cos \gamma}{2}$ lässt sich aber mit genügender Näherung durch $\frac{3}{4} \gamma^2$ darstellen. Vernachlässigen wir also z. B. Glieder, die höchstens $0,23 \cdot 10^{-6}$ betragen gegenüber der Einheit, so können wir — die mittlere Wellenlänge des Lichtes zu $0,55 \cdot 10^{-3}$ mm angenommen — die Rechnung bis zu einem Ringe, der durch die Gleichung $0,22 + m = 2R$ gegeben ist, als gesichert betrachten, oder mit anderen Worten, bis zu einem Ringe, dessen Index der Anzahl der Millimeter des Durchmessers der Oeffnung gleichkommt. — Man sieht also, dass jene Voraussetzung im Falle der Kugelwelle für nicht sehr kleine Oeffnungen und für den beobachtbaren Teil der Beugungserscheinung¹⁾ in der Fokalebene gleichgiltig ist, da sie immer von selbst in grösserer Annäherung als notwendig erfüllt erscheint.

Schwingungen auf der Kugelwelle können vielmehr auch ganz beliebige kleine Drehungen und Amplitudenänderungen erfahren. Gleiches gilt natürlich auch für eine nicht sphärische Wellenfläche. Indem wir uns vorbehalten, bei anderer Gelegenheit einen einfachen Fall mit Berücksichtigung der durch das Objektiv in den Polarisationsverhältnissen bewirkten Modification zu behandeln, wollen wir hier den obigen theoretischen Vibrationszustand voraussetzen.

1) Meines Wissens sind nicht über 14 Ringe beobachtet worden.

Gehen wir jetzt von der sphärischen Welle zu der mit Aberration behafteten über, und ziehen wir dabei nicht bloss die Bildebene der Centralstrahlen in Betracht, sondern die Bildebenen sämtlicher Zonen und auch noch die nächste Umgebung beiderseits, so sieht man, dass erst diese Momente die Betonung der Voraussetzung nötig machen.

Es ist übrigens unmittelbar klar, dass wir die vorliegende Annahme auch in anderer Weise, nämlich so aussprechen können, dass geringe Neigung der Wellenfläche gegenüber den benachbarten Teilen einer sich anschmiegenden Kugelfläche, oder noch anders, geringe Fokusdifferenzen für die verschiedenen Zonen voraussetzen. Dass aber auch diese Annahme keineswegs enger Natur ist, folgt daraus, dass nur die Cosinus der betrachteten Neigungswinkel in die Formel eingehen, also von vorneherein nur Grössen 2. Ordnung, die Winkel als solche 1. betrachtet, vernachlässigt werden.

Die gemachten Voraussetzungen scheinen uns nicht ein sicheres Urteil über die Vernachlässigungen zu erlauben, welche wir begehen, wenn wir an die Stelle des für unsere nicht sphärische Welle dynamisch möglichen Polarisationszustandes den oben skizzierten für die Kugelfläche möglichen substituieren.¹⁾ Andererseits aber ist es — die Möglichkeit einer kontinuierlichen Aenderung des Vibrationszustandes bei stetiger Aenderung der Form der Wellenfläche zugegeben — sogar wahrscheinlich, dass bei der von uns vorausgesetzten Kleinheit der Abweichungen der Wellenfläche in Radiusvektor und Neigung, nur Glieder 2. Ordnung vernachlässigt werden, wenn man die Abweichungen als solche 1. betrachtet.

Bei der vorliegenden Unsicherheit wollen wir, ohne auch nur zu versuchen, die Möglichkeit der Vernachlässigungen plausibel zu machen, diese letztere einfach als neue Voraussetzung behandeln. Wollten wir übrigens eine der früheren gleiche genetische Vorstellung als begründet ansehen, so könnten wir aus dieser Voraussetzung wenigstens den die

1) Hier ist eine Bemerkung zu machen. Im Allgemeinen sind für jede Form einer freien elastischen Welle eine ganze Reihe von Vibrationszuständen möglich; wenn wir nun hier nur von einem einzigen gesprochen haben, so soll darunter derjenige verstanden sein, welcher bei einer kontinuierlichen bis zum Verschwinden fortgesetzten Verkleinerung der für die nicht sphärische Welle charakteristischen Constanten durch eine Reihe dynamisch möglicher Zustände zu dem obigen für die Kugel auf ebenfalls — falls dies überhaupt möglich ist — kontinuierlichem Wege hinführt.

Schwingungsrichtung betreffenden Teil herausnehmen und liessen dann bloss die Frage nach der Amplitude offen. Da jene strengere Begründung indessen fehlt, so mögen beide Teile in der Voraussetzung bleiben.

Diese letztere enthält jedoch noch eine Unbestimmtheit, nämlich die der Art und Weise, wie der Vibrationszustand auf der Kugel auf die nicht sphärische Fläche übertragen werden soll. Da dies bei unserer mangelnden dynamischen Einsicht etwas willkürlich ist, und höchstens das Motiv, möglichst geringe Abweichungen auf den beiden Flächen zu erhalten, also z. B. die Vibrationszustände auf möglichst benachbarte Punkte zu übertragen, von Bedeutung sein könnte, so haben hier die analytischen Rücksichten auf Einfachheit in Verbindung mit dem Schwingungszustand der Kugel ein entscheidendes Gewicht, und wir treffen mit Rücksicht hierauf unsere Bestimmungen in folgender Weise.

Die Bewegung in unserer Wellenfläche soll der Amplitude nach durch eine einfache periodische Rotation um eine feste Axe gegeben sein. Diese Axe soll durch den Mittelpunkt der im Symmetriepunkte sich anschmiegenden Kugel gehen und senkrecht zur Symmetrielinie liegen. Was zweitens die Richtung anbetrifft, so sollen die Vibrationen in den Schnittlinien der zur Drehungsaxe senkrechten Ebenen mit der Wellenfläche stattfinden. Die Bewegung soll also stets innerhalb der Wellenfläche vor sich gehen. Statt der ersteren Bedingung, wonach die Amplitude dem Abstand eines Punktes der Wellenfläche von der genannten Axe proportional ist, können wir übrigens auch die andere substituieren, dass sie dem Abstand der die Schwingung enthaltenden geraden Linie von jener Axe proportional sein soll. Denn dies würde nur auf Vernachlässigung von Grössen 2. Ordnung hinauslaufen, wenn wir wiederum die Abweichungen der beiden Wellenflächen in Radiusvektor und Neigung als solche 1. Ordnung betrachten.

Gehen wir schliesslich zu unseren beiden letzten Voraussetzungen über, so ist darüber nur zu sagen, dass die Abweichungen der Wellenflächen im Radiusvektor für praktische Zwecke höchst wahrscheinlich kaum eine Wellenlänge betragen dürften.

Präcisieren wir jetzt unsere Annahmen noch einmal, so können wir kurz sagen. Es wird vorausgesetzt:

1) Die Benutzbarkeit der Stokes'schen Formeln unter Zugrundelegung eines im Grenzfalle der Kugel dynamisch möglichen Vibrationszustandes.

2) Die Kleinheit der Störungen der Welle in Radiusvektor und Neigung.

3) Die Beschränkung auf die der Axe nahen Punkte der Bildebenen der verschiedenen Zonen und deren nächster Umgebung.

Wir haben bisher eine Voraussetzung nicht erwähnt, nämlich die der Beschränkung in der Grösse des Oeffnungswinkels und geschah dies aus dem Grunde, weil die Präcisierung derselben in bequemer Weise sich erst später geben lässt. Bisweilen ist diese Grösse nämlich fast ganz ohne Einfluss und kann dann die einfallende Welle fast halbkugelförmig sein; bisweilen aber müssen wir auch, wie z. B. bei dioptrisch weniger corrigierten Systemen, eine starke Beschränkung im Oeffnungswinkel eintreten lassen.

Keine einengenden Voraussetzungen sind dagegen nötig in bezug auf die Anzahl der Aberrationsglieder und kann in dieser Beziehung die Aufgabe in voller Allgemeinheit behandelt werden; nichtsdestoweniger wollen wir jedoch der Einfachheit halber uns auf die der 4. und 6. Potenz der linearen Oeffnung proportionalen Glieder beschränken und uns begnügen, an den betreffenden Stellen darauf hinzuweisen, dass keine principiellen Veränderungen in der Entwicklung bei Mitnahme beliebig vieler Glieder eintreten würden.

Wir wenden uns jetzt zur Aufstellung der Grundformeln und haben zu diesem Zwecke zunächst das Coordinatensystem und die Bezeichnungen zu wählen.

Den Anfangspunkt des ebenen, rechtwinkligen Coordinatensystems verlegen wir in den Scheitel (Symmetriepunkt) des begrenzten Wellenstückes, die z Axe senkrecht zur Wellenfläche (positiv in der Richtung der Fortpflanzung des Lichtes gerechnet), und

die x Axe parallel der Vibrationsrichtung im Scheitel.¹⁾

1) Ueber die positive Richtung der x und y Axe brauchen wir schon aus Symmetriegründen keine Bestimmung zu treffen.

Ferner seien:

x, y, z die Coordinaten eines Punktes der Wellenfläche,

ξ, η, ζ „ „ „ des untersuchten „Bildpunktes“,

t die Zeit,

Θ die Schwingungsdauer des angewandten Lichtes,

λ die Wellenlänge desselben,

d die Entfernung eines Punktes der Wellenfläche von einem „Bildpunkte“,

R der Radius der kreisförmigen Begrenzung,

$d\omega$ ein Element der Wellenfläche.

Schliesslich führen wir noch die Grössen $r, \varphi, \varrho, \chi$ durch die Gleichungen $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, \xi = \varrho \cos \chi, \eta = \varrho \sin \chi$ ein.

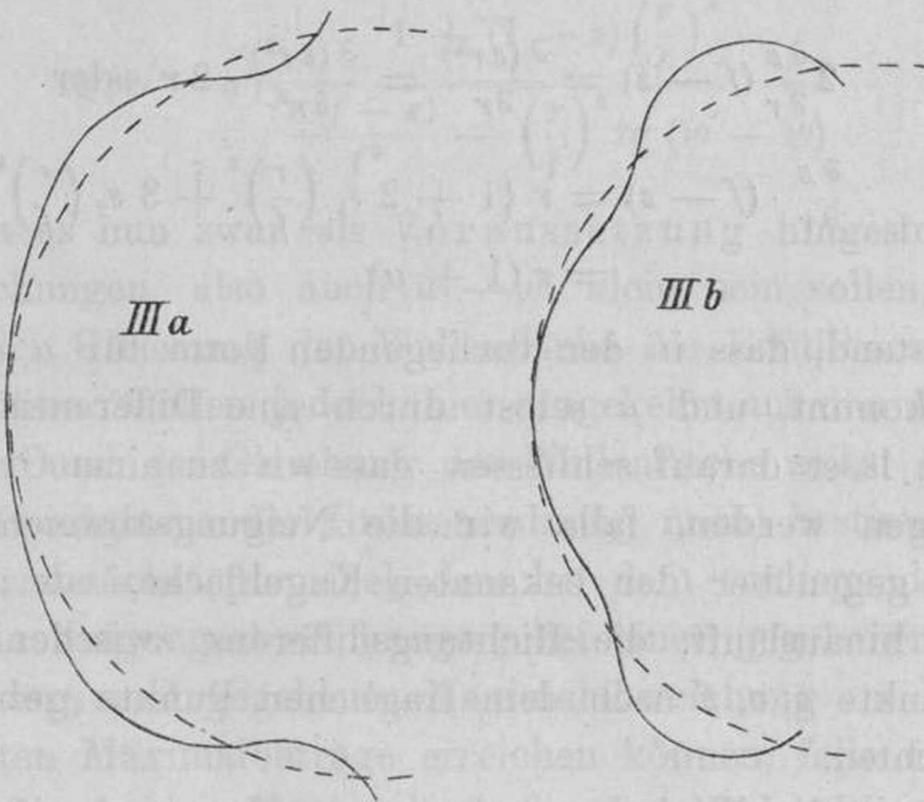
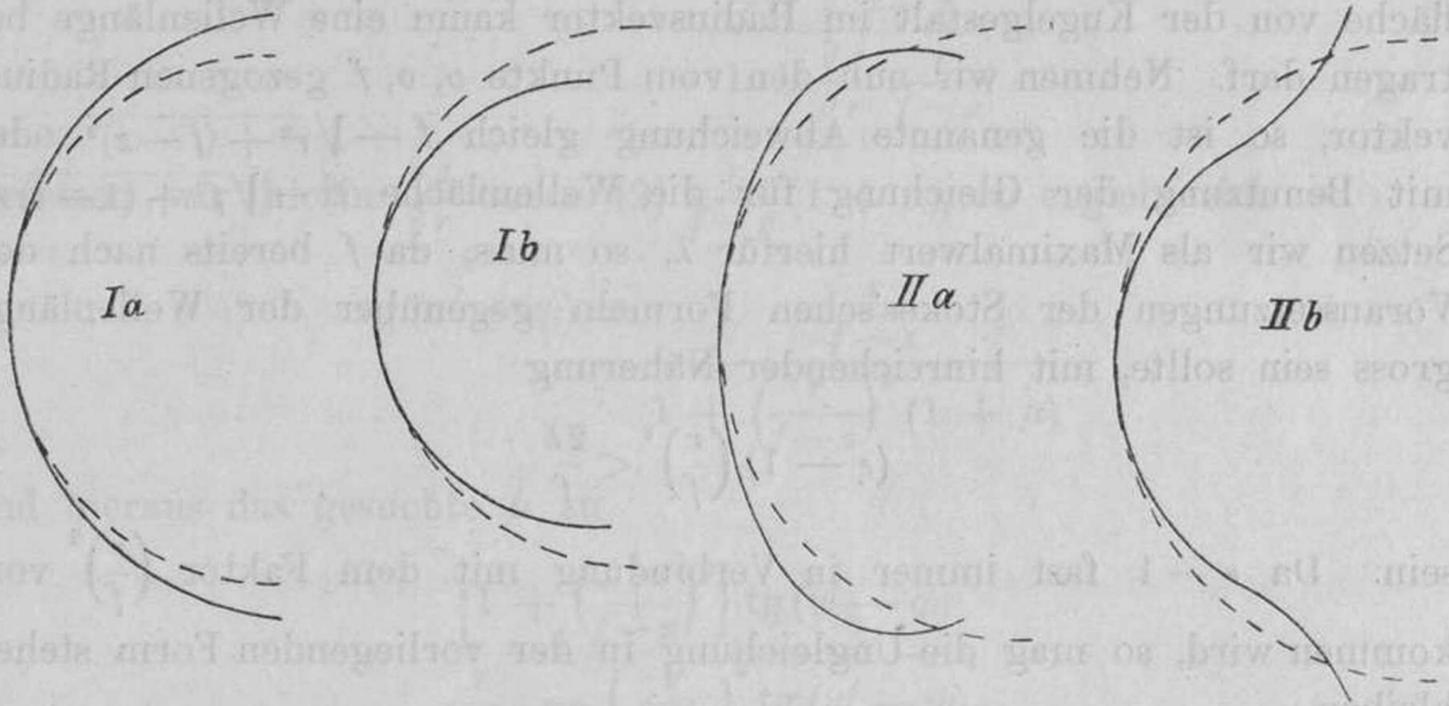
Indem wir jetzt in den Stokes'schen Formeln unter $g(bt)$ nicht eine Verrückung, sondern die Geschwindigkeit derselben verstehen, — was ohne weiteres gestattet ist — und dieselbe in der Form $A' \sin 2\pi \frac{t}{\Theta}$ ansetzen, gilt es zunächst, die Variabilität des Faktors A' mit dem Orte auf der Wellenfläche darzustellen.

Um dies thun zu können, brauchen wir die Gleichung der Wellenfläche. Es ist wichtig, derselben eine Gestalt zu geben, welche einerseits in den vorkommenden Formeln zu analytisch einfachen Ausdrücken führt und andererseits die durch die Abweichungen von der Kugelgestalt veranlassten Wirkungen leicht übersehen lässt. Wir wählen die Form: $(f - z)^2 + \varepsilon r^2 = f^2$, worin ε den Ausdruck $1 + \varepsilon_1 \left(\frac{r}{f}\right)^2 + \varepsilon_2 \left(\frac{r}{f}\right)^4 + \dots$ bedeuten soll. Für $\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots = 0$, also $\varepsilon = 1$ geht dieselbe offenbar in die Gleichung einer Kugelfläche vom Radius f über. Ebenso ist klar, dass im allgemeinen Falle f die Vereinigungsweite der Centralstrahlen bedeutet. $\varepsilon_1 \left(\frac{r}{f}\right)^2, \varepsilon_2 \left(\frac{r}{f}\right)^4$ etc. sollen das erste, zweite etc. Aberrationsglied heissen.¹⁾

Was die Gestalt der durch die obige Gleichung darstellbaren Wellenfläche anbelangt, so möge hier kurz folgendes bemerkt werden. Be-

1) Diese Bezeichnungsweise weicht insofern von der üblichen ab, als man gewöhnlich das in der Gleichung der Wellenfläche mit ε multiplicierte r^2 hinzurechnet und dann von Gliedern, welche der 4., 6. Potenz der linearen Oeffnung proportional sind, spricht.

----- Schmiegunngskugel



Was die erstere, also ν anbetrifft, so gelangen wir zu dem genannten Zwecke sehr leicht auf dem folgenden Wege.

Wir haben bereits früher erwähnt, dass die Abweichung der Wellenfläche von der Kugelgestalt im Radiusvektor kaum eine Wellenlänge betragen darf. Nehmen wir nun den vom Punkte o, o, f gezogenen Radiusvektor, so ist die genannte Abweichung gleich $f - \sqrt{r^2 + (f - z)^2}$ oder mit Benutzung der Gleichung für die Wellenfläche $f - \sqrt{f^2 + (1 - \varepsilon)r^2}$. Setzen wir als Maximalwert hierfür λ , so muss, da f bereits nach den Voraussetzungen der Stokes'schen Formeln gegenüber der Wellenlänge gross sein sollte, mit hinreichender Näherung

$$(\varepsilon - 1) \left(\frac{r}{f}\right)^2 < \frac{2\lambda}{f} \quad 1)$$

sein. Da $\varepsilon - 1$ fast immer in Verbindung mit dem Faktor $\left(\frac{r}{f}\right)^2$ vorkommen wird, so mag die Ungleichung in der vorliegenden Form stehen bleiben.

Wir wenden uns weiter der Grenzbestimmung für μ zu. Differenzieren wir zu diesem Zwecke die Gleichung der Wellenfläche, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial z}{\partial r} (f - z) &= \frac{\partial (\varepsilon r^2)}{\partial r} = \frac{\partial (\varepsilon r^2)}{\partial r^2} \cdot 2r \text{ oder} \\ \frac{\partial z}{\partial r} \cdot (f - z) &= r \left\{ 1 + 2 \varepsilon_1 \left(\frac{r}{f}\right)^2 + 3 \varepsilon_2 \left(\frac{r}{f}\right)^4 + \dots \right\} \\ &= r (1 + \mu) \end{aligned} \quad 2)$$

Der Umstand, dass in der vorliegenden Form für μ ein Differentialquotient vorkommt, und μ selbst durch eine Differentiation gewonnen werden kann, lässt darauf schliessen, dass wir zu einer Grenzbestimmung für μ gelangen werden, falls wir die Neigungsabweichungen unserer Wellenfläche gegenüber der bekannten Kugelfläche, oder, was ungefähr auf dasselbe hinausläuft, die Richtungsdifferenz zwischen Normale und dem vom Punkte o, o, f nach dem fraglichen Punkte gezogenen Radiusvektor betrachten.

Nennen wir die Winkel zwischen der z Axe einerseits und der Normale resp. dem Radiusvektor andererseits ψ' resp. ψ ¹⁾, so bestehen offen-

1) In der üblichen analytischen Bezeichnungsweise würden dieselben $\pi - \psi'$ und $\pi - \psi$ heissen.

bar die Gleichungen $\frac{r}{f-z} = \operatorname{tg} \psi$ und $\frac{\partial z}{\partial r} = \operatorname{tg} \psi'$ und demnach

$$\operatorname{tg} (\psi' - \psi) = \frac{\frac{\partial z}{\partial r} - \frac{r}{f-z}}{1 + \frac{\partial z}{\partial r} \cdot \frac{r}{f-z}}$$

Ersetzen wir hierin $\frac{\partial z}{\partial r}$ durch (2) $\frac{r}{f-z} (1 + \mu)$, so ergibt sich

$$\operatorname{tg} (\psi' - \psi) = \frac{\mu \frac{r}{f-z}}{1 + \left(\frac{r}{f-z}\right)^2 (1 + \mu)}$$

und hieraus das gesuchte μ zu

$$\frac{\left\{1 + \left(\frac{r}{f-z}\right)^2\right\} \operatorname{tg} (\psi' - \psi)}{\frac{r}{f-z} - \left(\frac{r}{f-z}\right)^2 \operatorname{tg} (\psi' - \psi)},$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung der Wellenfläche zu

$$\operatorname{tg} (\psi' - \psi) \cdot \frac{1 + (1 - \varepsilon) \left(\frac{r}{f}\right)^2}{\frac{r(f-z)}{f^2} - \left(\frac{r}{f}\right)^2 \operatorname{tg} (\psi' - \psi)}$$

Wir haben es nun zwar als Voraussetzung hingestellt, dass die Neigungsabweichungen, also auch $\psi' - \psi$ klein sein sollen, und hätten bei der Wahl der Gleichung der Wellenfläche die Erfüllbarkeit derselben controlieren müssen, wollen jedoch hier umgekehrt aus den Abweichungen im Radiusvektor und der Gleichung der Wellenfläche selbst die Neigungsabweichungen (wenigstens der Grössenordnung nach) bestimmen.

Es ist nun zunächst plausibel, dass bei dem vorliegenden Typus der Wellenfläche die Neigungsabweichungen, bei einer gegebenen Anzahl von Aberrationsgliedern und gegebener Maximalabweichung im Radiusvektor, dann die grössten Maximalbeträge erreichen können, falls möglichst viel Schnittpunkte der beiden Flächen¹⁾ vorhanden sind. Dies sei der Fall.

1) Wir rechnen hier wie im folgenden die Flächen immer nur bis zur Begrenzung.

Wir wollen nun weiter annehmen, dass die Bogen, in welche ein Meridian-schnitt der Wellenfläche durch jene Schnittpunkte geteilt wird, annähernd gleich gross sind und die Bogen selbst als Kreisbogen betrachtet werden können.¹⁾ Die Maximalabweichungen in der Neigung finden dann selbstverständlich in den Schnittpunkten statt und lassen sich darstellen durch die halbe Differenz oder Summe der Centriwinkel, welche den beiden benachbarten Bogen (der Wellenfläche nämlich und der bekannten Kugelfläche) angehören, oder wenn man mit $\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2$ die Sehne und die beiden Radien der flachen Bogen bezeichnet, näherungsweise durch $\frac{\vartheta_0}{2} \left(\frac{1}{\vartheta_1} \pm \frac{1}{\vartheta_2} \right)$. Nun ist aber andererseits die Summe oder Differenz der Pfeilhöhen der Bogen durch $\frac{1}{2} \left(\frac{\vartheta_0}{2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{\vartheta_1} \pm \frac{1}{\vartheta_2} \right\}$ gegeben, und demnach der Neigungswinkel an den Endpunkten durch das Produkt aus $\frac{4}{g}$ und dem grössten Abstand der beiden Bogen. Soll dieser letztere Faktor höchstens λ betragen, und nehmen wir $2n$ Schnittpunkte der beiden Flächen an, so ist also $\text{tg}(\psi' - \psi)$ oder $\psi' - \psi$ gleich oder kleiner als $4n\lambda$ dividiert durch den halben Meridianbogen der Wellenfläche oder mit Verstärkung der Bedingung: $\psi' - \psi \leq \frac{4n\lambda}{R}$.

Die zuletzt gemachten Voraussetzungen über die Grösse der einzelnen Bogen und ihre Gestalt brauchen natürlich keineswegs erfüllt zu sein, andererseits aber handelt es sich für uns auch nur darum, ein Urteil über die Grössenordnung von $\psi' - \psi$ und damit von μ zu gewinnen und es wird in den meisten Fällen gleichgiltig sein, ob ein Neigungswinkel unter Umständen das Zehnfache des soeben festgesetzten Wertes erreicht.

Wie man sieht, wächst die Maximalgrenze der Neigungswinkel mit wachsender Anzahl der Schnittpunkte; wir dürfen diese also nicht, ohne gleichzeitig die Maximalgrenze für die Abweichungen im Radiusvektor herunterzusetzen, beliebig wachsen lassen. In der That aber dürfen wir auch, um nicht enorme Weitläufigkeiten der Rechnung zu haben, höchstens 4 bis 5 Aberrationsglieder zulassen, die also ihrerseits höchstens 3 bis 4 Schnittpunkte bewirken könnten. Demnach ist $\psi' - \psi$ für alle

1) Da es uns nur auf die Bestimmung der Grössenordnung von μ ankommt, ist die Frage nach der Möglichkeit dieses Falles ziemlich gleichgiltig.

Arten der jetzt üblichen Objektive eine kleine Grösse. Ist nun $\frac{f-z}{r}$ beträchtlich grösser als $\psi' - \psi$, so ergibt sich $\mu \frac{r}{f}$ zu $\frac{\psi' - \psi}{f-z} \cdot f$ und also der Maximalwert von $\mu \frac{r}{f}$ zu $\frac{f}{f-z} \cdot \frac{4n\lambda}{R}$, der von $\mu \left(\frac{r}{f}\right)^2$ zu $\frac{4n\lambda}{f-z}$ — 3) Alles dies natürlich nur auf Grund der früheren vereinfachenden Annahmen.

Da nach den früheren Festsetzungen die Amplitude und damit die Vibrationsgeschwindigkeit eines Punktes der Wellenfläche dem Abstand desselben von der durch den Vereinigungspunkt der Centralstrahlen gelegten zur y Axe Parallelen proportional sein soll, so müssen wir den Faktor A' durch $A \cdot \frac{\mathcal{G}}{f}$ darstellen, worin \mathcal{G} den genannten Abstand bezeichnen soll und demnach A ersichtlich die Amplitude der Vibrationsgeschwindigkeit im Symmetriepunkte bedeutet. Denke ich mir jetzt durch jenen Punkt der Wellenfläche eine zur y Axe senkrechte Ebene gelegt, so ist der Abstand \mathcal{G} die Entfernung zweier Punkte mit den Coordinaten x, z und o, f , also durch $\sqrt{x^2 + (f-z)^2}$ gegeben. Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Gleichung der Wellenfläche auf die Form $\sqrt{f^2 - y^2 + (1-\varepsilon)r^2}$ gebracht werden und es wird demnach die Amplitude der Vibrationsgeschwindigkeit $\frac{\sqrt{f^2 - y^2 + (1-\varepsilon)r^2}}{f} \cdot A$.

Würden wir an Stelle des Abstandes der betrachteten Geraden von einem Punkte der Wellenfläche den Abstand jener Geraden von der die Schwingung enthaltenden Tangente nehmen, so hätten wir offenbar nur \mathcal{G} mit dem Cosinus des Winkels zwischen dem ersteren Abstände und der Normalen (des Schnittes der Wellenfläche mit der Ebene $y = \text{Const}$) im fraglichen Punkte zu multiplicieren. Dieser Cosinus lässt sich durch

$$\frac{(f-z)^2 + x^2(1+\mu)}{\sqrt{(f-z)^2 + x^2} \cdot \sqrt{(f-z)^2 + x^2(1+\mu)^2}}$$

darstellen, worin μ unseren Ausdruck $2\varepsilon_1 \left(\frac{r}{f}\right)^2 + 3\varepsilon_2 \left(\frac{r}{f}\right)^4 + \dots$ bedeutet. Bringen wir den Cosinus auf die Form

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\mu x^2}{(f-z)^2 + x^2(1+\mu)}}} \cdot \sqrt{1 + \frac{\mu x^2 + \mu^2 x^2}{(f-z)^2 + x^2(1+\mu)}}$$

so sehen wir, dass in der Differenz desselben gegenüber 1 höchstens Glieder, die mit μ^2 multipliziert sind, vorkommen. Da nun — ausser für Systeme mit sehr grossem Oeffnungswinkel — $\frac{x^2}{(f-z)^2 + x^2(1+\mu)}$ eine Grösse von derselben Ordnung wie $\left(\frac{r}{f}\right)^2$ ist, so ist das mit μ^2 multiplizierte grösste Glied von der Grössenordnung $\left(\frac{f}{f-z} \cdot \frac{4n\lambda}{R}\right)^2$ und es sind demnach die nach den beiden Annahmen gefundenen Ausdrücke für A' selbst für die meisten Mikroskopobjektive hinreichend gleich.

Benutzen wir nun den ersteren $\frac{\sqrt{f^2 - y^2 + (1-\varepsilon)r^2}}{f} \cdot A$, so können wir mit der gleichen Beschränkung auf nicht allzu grosse Oeffnungswinkel — z. B. bis auf solche von 120° — für die meisten Objektive den Faktor $\sqrt{f^2 - y^2 + (1-\varepsilon)r^2}$ durch $\sqrt{f^2 - x^2}$ ersetzen, denn die begangene Vernachlässigung erreicht nur ein geringes Multiplum von $\frac{\lambda}{f}$.

Wir wenden uns jetzt zur Darstellung des Flächenelementes unserer Wellenfläche. — Indem wir mit N die Grösse der Normale bis zur Symmetrieaxe bezeichnen und die bereits früher eingeführten Winkel φ und ψ ¹⁾ benutzen, erhalten wir für dasselbe: $d\omega = N \sin \psi d\varphi \cdot N d\psi = N^2 \sin \psi d\psi d\varphi$. Da nun aber $\sin \psi = \frac{N}{r}$ und $\text{tg } \psi = \frac{\partial z}{\partial r}$ ist, so ergibt sich der Reihe nach:

$$d\omega = \frac{r^2 d\psi \cdot d\varphi}{\sin \psi} = \frac{r^2 \cos^2 \psi d\varphi \cdot d\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)}{\sin \psi} = r^2 \cdot \frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)}{\frac{\partial z}{\partial r}} \cdot \frac{d\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2}}$$

Ersetzen wir hierin $\frac{\partial z}{\partial r}$ durch den aus 2) genommenen Wert $\frac{r}{f-z}(1+\mu)$,

also

$$\frac{d\left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)}{\frac{\partial z}{\partial r}} \text{ durch } \frac{d\left(\frac{r}{f-z}\right)}{\frac{r}{f-z}} + \frac{d\mu}{1+\mu}$$

und machen die gleiche Substitution nach Ausführung der Differentiation

1) pag. 127 und 130.

in dem Gliede $\frac{d\left(\frac{r}{f-z}\right)}{\frac{r}{f-z}}$, so erhält der Ausdruck für das Flächenelement die Form:

$$dw = r dr d\varphi \cdot \frac{(f-z)^2 + r^2(1+\mu)}{(f-z)^2 \sqrt{1 + \left(\frac{r}{f-z}\right)^2 (1+\mu)^2}}$$

oder mit Benutzung der Gleichung der Wellenfläche:

$$\frac{r dr d\varphi}{f-z} \cdot \frac{f^2 + r^2(1-\varepsilon+\mu)}{\sqrt{f^2 + r^2\{(1+\mu)^2 - \varepsilon\}}}$$

Entwickle ich diesen Ausdruck nach steigenden Potenzen von $\frac{r}{f}$, so ergibt sich mit der für die Beurteilung der Vernachlässigungen zulässigen Beschränkung auf das erste Glied $f \cdot \frac{r dr d\varphi}{f-z} \left\{ 1 + \frac{r^2}{2f^2} (1 - \varepsilon - \mu^2) + \dots \right\}$ Es werden also hier wiederum Glieder von der Grössenordnung $\frac{\lambda}{f}$ und $\left(\frac{f}{f-z} \cdot \frac{4n\lambda}{R}\right)^2$ vernachlässigt, falls wir den Ausdruck für das Flächenelement in der Gestalt $f \cdot \frac{r dr d\varphi}{f-z}$ annehmen.

Es handelt sich weiter darum, die Verschiebungen resp. Vibrationsgeschwindigkeiten in einem „Bildpunkte“ nach den hierfür geltenden Regeln zusammzusetzen. — Nach Stockes liegt die bewirkte Verschiebung senkrecht zum Elementarstrahl und in der durch diesen und die Verschiebungsrichtung in dem Element der Wellenfläche gelegten Ebene. Wir hätten also in der üblichen Weise die Verschiebungscomponenten nach jeder der Coordinatenachsen zu addieren und diese Summen wiederum zur Resultante zusammzusetzen. Zu diesem Zwecke haben wir zunächst die Verschiebung am Ende eines Elementarstrahles mit dem Cosinus der Neigung desselben gegenüber der Axe zu multiplicieren. Es ist nun nach dem bereits früher angedeuteten klar, dass infolge der grossen Nähe der in betracht kommenden Teile zur Axe und der voraussetzungsmässigen Kleinheit der Longitudinalaberration wir ohne grössere Einbusse an Genauigkeit an Stelle der wirklichen Neigungswinkel die für den Punkt o, o, f , also den Vereinigungspunkt der Centralstrahlen

giltigen substituieren können; denn es werden hierbei von vorneherein nur Glieder von der Ordnung des Quadrates des Winkels vernachlässigt werden, welcher vom Scheitelpunkt der Welle aus gerechnet die in betracht kommende (beobachtbare) Erscheinung umfasst. Substituieren wir aber die genannten Winkel, so ergibt sich infolge des vorausgesetzten Polarisationszustandes, dass nur für die x und z Axe ein von Null wesentlich verschiedenes Resultat vorhanden ist, dass dagegen der für die y Axe gebildete Ausdruck nur durch die Abweichungen der Fläche von der Kugelgestalt bedingt ist und mit ihnen verschwindet.

Wir hätten demnach nur die Cosinus der Neigung der Vibrationsrichtung gegenüber den ersten beiden Axen zu bilden und hier mit den Ausdruck für die Vibrationsgeschwindigkeit in einem betrachteten Punkte zu multiplicieren, um durch Summirung über das wirksame Stück der Wellenfläche die resultierenden Componenten in einem Bildpunkte zu finden, wollen jedoch nichtsdestoweniger zum Zwecke einer strengeren Begründung auch den Ausdruck für den 3. Cosinus geben.

Nach den Voraussetzungen, die wir über die Vibrationsrichtungen auf der Wellenfläche gemacht haben, sind diese durch die Schnittlinien der der xz Ebene parallelen Ebenenschaar mit der Wellenfläche gegeben. Legen wir nun durch ein Element dieser Schnittlinien und den Punkt o, o, f eine Ebene, so liegt nach der Stokes'schen Regel die von diesem Element herrührende Elementarschwingung des Punktes o, o, f in dieser Ebene und senkrecht zur Verbindungslinie des Elementes mit diesem Punkte, oder, was dasselbe ist, sie liegt in der Normale einer durch die genannte Verbindungslinie senkrecht zu jener ersten Ebene gelegten zweiten Ebene. Bezeichnen wir die Coordinaten dieser beiden Ebenen mit x_1, y_1, z_1 resp. x_2, y_2, z_2 sowie beliebige den Neigungscosinus ihrer Normalen gegenüber den Axen proportionale Grössen mit $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$, so gelten die Gleichungen: $\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 (z_1 - f) = 0$ und $\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 (z_2 - f) = 1$, wobei augenscheinlich dem Umstande bereits Rechnung getragen ist, dass die beiden Ebenen durch den Punkt o, o, f gehen sollen. Sie sollen aber weiter auch durch den Punkt x, y, z gehen und dies liefert zwei weitere Gleichungen, nämlich:

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 (z - f) = 0 \text{ und}$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 (z - f) = 0$$

Da nun ausserdem die erstere ein Linienelement der durch den Schnitt der Wellenfläche mit den Ebenen $y = \text{Const}$ gebildeten Curven enthalten und die zweite auf der ersten senkrecht stehen soll, so kommen nach den Regeln der analytischen Geometrie drei weitere Bedingungsgleichungen hinzu, nämlich:

$$\alpha_1 dx + \beta_1 dy + \gamma_1 dz = 0,$$

$$\alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1 = 0$$

und die durch Differentiation der Gleichung der Wellenfläche mit Berücksichtigung von $y = \text{Const}$ gewonnene:

$$r^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx + 2x dx \cdot \varepsilon + 2(z - f) dz = 0.$$

Indem wir nun zunächst $\frac{\partial \varepsilon}{\partial x}$ bilden, erhalten wir aus

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial x} = \frac{\partial \varepsilon}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{2x}{r^2} \left\{ \varepsilon_1 \left(\frac{r}{f} \right)^2 + 2 \varepsilon_2 \left(\frac{r}{f} \right)^4 + \dots \right\}$$

$$r^2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} dx = 2x dx \left\{ \varepsilon_1 \left(\frac{r}{f} \right)^2 + 2 \varepsilon_2 \left(\frac{r}{f} \right)^4 + \dots \right\}$$

und es geht demnach die differentiierte Gleichung der Wellenfläche mit Berücksichtigung von $\varepsilon + \varepsilon_1 \left(\frac{r}{f} \right)^2 + 2 \varepsilon_2 \left(\frac{r}{f} \right)^4 + \dots = 1 + \mu$ in $x dx (1 + \mu) + (z - f) dz = 0$ über. Um die gesuchten Cosinus möglichst einfach darzustellen, eliminieren wir aus dem Gleichungssystem:

$$\alpha_2 x_2 + \beta_2 y_2 + \gamma_2 (z_2 - f) = 0$$

$$\alpha_2 x + \beta_2 y + \gamma_2 (z - f) = 0$$

$$\alpha_2 \alpha_1 + \beta_2 \beta_1 + \gamma_2 \gamma_1 = 0$$

die Grössen $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ und erhalten

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 - f \\ x & y & z - f \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0 \text{ oder}$$

$$x_2 (y \gamma_1 - z - f \beta_1) + y_2 (z - f \alpha_1 - x \gamma_1) + z_2 (x \beta_1 - y \alpha_1) = 0.$$

Demnach sind die gesuchten Cosinus —

$$(y\gamma_1 - \overline{z-f}\beta_1)^2 + (\overline{z-f}\alpha_1 - x\gamma_1)^2 + (x\beta_1 - y\alpha_1)^2$$

abkürzungshalber R gesetzt —

$$\frac{y\gamma_1 - \overline{z-f}\beta_1}{\sqrt{R}}, \quad \frac{\overline{z-f}\alpha_1 - x\gamma_1}{\sqrt{R}}, \quad \frac{x\beta_1 - y\alpha_1}{\sqrt{R}}.$$

R selbst lässt sich in der Gestalt:

$$(x^2 + y^2 + \overline{z-f}^2) (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2) - (x\alpha_1 + y\beta_1 + \overline{z-f}\gamma_1)^2$$

oder wegen $x\alpha_1 + y\beta_1 + \overline{z-f}\gamma_1 = 0$ in der Form

$$R = (x^2 + y^2 + \overline{z-f}^2) (\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2)$$

schreiben. Es handelt sich jetzt noch darum, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ oder vielmehr ihre Verhältnisse durch die Coordinaten der Wellenfläche darzustellen. Wir eliminieren zu diesem Zwecke in ähnlicher Weise wie vorher die $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ aus dem Gleichungssystem:

$$\alpha_1 x_1 + \beta_1 y_1 + \gamma_1 (z_1 - f) = 0$$

$$\alpha_1 x + \beta_1 y + \gamma_1 (z - f) = 0$$

$$\alpha_1 dx + \gamma_1 dz = 0$$

und erhalten:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 - f \\ x & y & z - f \\ dx & 0 & dz \end{vmatrix} = 0,$$

oder mit Berücksichtigung der Gleichung $x dx (1 + \mu) + (z - f) dz = 0$ und nach Ausführung der Determinante:

$$x_1 (y x \overline{1 + \mu}) + y_1 (-x^2 \cdot \overline{1 + \mu} - \overline{z-f}^2) + \overline{z_1 - f} (y \cdot \overline{z-f}) = 0$$

Da in dieser nach x_1, y_1, z_1 linearen Gleichung die Coefficienten dieser drei Grössen den $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ proportional sein müssen, so können wir dieselben in die Ausdrücke:

$$\frac{y\gamma_1 - \overline{z-f}\beta_1}{\sqrt{R}}, \quad \frac{\overline{z-f}\alpha_1 - x\gamma_1}{\sqrt{R}}, \quad \frac{x\beta_1 - y\alpha_1}{\sqrt{R}}$$

an Stelle der $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ substituieren. Die gesuchten Cosinus bekommen dann die Gestalt:

$$\overline{z-f} \{ \overline{z-f^2 + y^2 + x^2(1+\mu)} \} : \sqrt{R}$$

$$\overline{z-f} \cdot y \cdot x \cdot \mu : \sqrt{R}$$

$$-x \{ \overline{z-f^2 + 1 + \mu(x^2 + y^2)} \} : \sqrt{R}$$

und mit Benutzung der Gleichung der Wellenfläche:

$$\overline{z-f} \{ f^2 + (1-\varepsilon)r^2 + x^2\mu \} : \sqrt{R}$$

$$\overline{z-f} \cdot y \cdot x \cdot \mu : \sqrt{R}$$

$$-x \{ f^2 + (1-\varepsilon + \mu)r^2 \} : \sqrt{R},$$

wobei \sqrt{R} selbst die Form:

$$\sqrt{f^2 + (1-\varepsilon)r^2} \sqrt{\{f^2 - y^2 + (1-\varepsilon)r^2 + x^2\mu\} \{f^2 + (1-\varepsilon)r^2 + x^2\mu\} + x^2y^2\mu(1+\mu)}$$

annimmt. — Würden wir an die Stelle dieser Ausdrücke die für die Kugel giltigen

$$\frac{z-f}{\sqrt{f^2 - y^2}}, \quad 0, \quad \frac{-x}{\sqrt{f^2 - y^2}}$$

setzen, so würden für Systeme von nicht allzugrossem Oeffnungswinkel nur Glieder von der Grössenordnung $\frac{\lambda}{f}$ und $\frac{4n\lambda}{f-z}$, also von der letzteren vernachlässigt werden.

Recapitulieren wir jetzt die Vernachlässigungen noch einmal, welche beim Uebergang von der Kugel zu unserer Wellenfläche eintreten müssen, um die in der Formel für die Lichtwirkung ausserhalb des Cosinus und der Faktoren $(1 + \cos \vartheta) \sin \eta$ auftretenden Ausdrücke durch solche wie bei der Kugelwelle ersetzen zu können. Dieselben waren bei der Darstellung der Amplitude von der Grössenordnung von $\frac{\lambda}{f}$ und $\left(\frac{f}{f-z} \cdot \frac{4n\lambda}{R}\right)^2$, bei dem Flächenelemente wiederum von der Grössenordnung des letzteren Ausdrucks und bei der Darstellung der Neigungscosinus der Verrückungen gegenüber den Axen von der Grössenordnung von $\frac{\lambda}{f}$ und $\frac{4n\lambda}{f-z}$. Vorausgesetzt war hierbei ferner noch die Beschränkung auf die Nachbarschaft der Fokalfpunkte der verschiedenen Zonen und geringe Longitudinalaberrationen. Ist für einen Fall die Vernachlässigung der bezüglichen Glieder gerechtfertigt, so können wir die von einem Flächenelement der Wellen-

fläche herrührenden der x und z Axe parallelen und hier allein in betracht kommenden Componenten der Vibrationsgeschwindigkeit in einem Bildpunkte nach der Formel von Stokes durch ¹⁾:

$$X = -\frac{f}{2\lambda d} \cdot \frac{r dr d\varphi}{f-z} \cdot \frac{\sqrt{f^2-y^2}}{f} \cdot \frac{f-z}{\sqrt{f^2-y^2}} \cdot A \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{d}{\lambda} \right) \text{ und}$$

$$Z = -\frac{f}{2\lambda d} \cdot \frac{r dr d\varphi}{f-z} \cdot \frac{\sqrt{f^2-y^2}}{f} \cdot \frac{x}{\sqrt{f^2-y^2}} \cdot A \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{d}{\lambda} \right) \text{ oder}$$

$$X = -\frac{A}{2d\lambda} \cdot r dr d\varphi \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{d}{\lambda} \right) \text{ und}$$

$$Z = -\frac{A}{2d\lambda} \cdot r dr \cdot d\varphi \cdot \frac{x}{f-z} \cdot \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{d}{\lambda} \right)$$

ausdrücken, wo d die Entfernung des betrachteten Punktes vom Flächenelemente bezeichnet.

Das für X gewonnene Resultat hat ein gewisses Interesse wegen seiner Einfachheit; es besagt, dass bei einer Kugelwelle — unter Voraussetzung der Beschränkung auf die dem Centrum der Welle benachbarten Punkte und der Anwendbarkeit der Stokes'schen Formeln mit Zugrundelegung des früher skizzierten dynamisch möglichen Polarisationszustandes — die von der Variabilität der Amplitude mit dem Orte, die von der Ersetzung des Wellenflächenelementes durch ein Element der Oeffnungsprojektion auf den Schirm und die von der Berücksichtigung der Neigung der Schwingungsrichtungen (der Elementarstrahlen) im Bildpunkte herrührenden Faktoren sich für die x Componente gegenseitig compensieren; $\frac{\sqrt{f^2-y^2}}{f}$ ist nämlich in dieser der erstere, $\frac{f}{f-z}$ der zweite und $\frac{f-z}{\sqrt{f^2-y^2}}$ der dritte Faktor. Diese Faktoren haben bei Voraussetzung eines geringen Oeffnungsverhältnisses sehr wenig von 1 verschiedene Werte, so dass sie z. B. für den gewöhnlichen Fernrohrtypus $\left(\frac{r}{f} = \frac{1}{30}\right)$ kaum in betracht kommen. Für photographische Objektive von grösserem Oeffnungsverhältniss (z. B. $\frac{2r}{f} = \frac{1}{4,3}$) beginnen die maximalen Abweichungen gegen-

1) Der variable Faktor von A ist bei der in der Formel von Stokes vorkommenden Differentiation als constant zu betrachten.

über 1 schon merklich zu werden und für mikroskopische Objektive endlich (bei einer Beanspruchung derselben auf Bilder, die in der Nähe der Fokalebene zustande kommen) können

$$\frac{\sqrt{f^2 - y^2}}{f} \quad \text{und} \quad \frac{f - z}{\sqrt{f^2 - y^2}}$$

zu kleinen Bruchteilen, und kann $\frac{f}{f - z}$ zu einem grösseren Multiplum der Einheit werden.

Bei der unter den obigen Voraussetzungen hier gegebenen Erweiterung der Grundformeln auf Systeme mit grossem Oeffnungswinkel tritt die Schwierigkeit auf, dass für eine bequeme analytische Entwicklung das betrachtete Gebiet in der Nähe des Wellenmittelpunktes immer mehr eingeengt werden muss; doch ist dies andererseits auch insofern in gewissem Masse statthaft, als mit wachsendem Oeffnungsverhältniss die Dimensionen der Beugungserscheinung zusammenschrumpfen.

Wir wenden uns nun zur weiteren Entwicklung der Componenten für die Vibrationsgeschwindigkeit, die unter den früher charakterisierten Vernachlässigungen die Formen:

$$X = - \frac{A}{2\lambda d} \cdot r \, dr \, d\varphi \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{d}{\lambda} \right) \quad \text{und}$$

$$Z = - \frac{A}{2\lambda d} r \, dr \cdot d\varphi \cdot \frac{x}{f - z} \cos 2\pi \left(\frac{t}{\Theta} - \frac{d}{\lambda} \right)$$

erhalten haben und jetzt über die ebene kreisförmige Begrenzung zu integrieren sind. d lässt sich als Entfernung eines Punktes x, y, z von einem Punkte ξ, η, ζ oder, wie wir lieber schreiben wollen, $\xi, \eta, f + \delta$ durch $(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \overline{f + \delta})^2$ ausdrücken oder mit Einführung der früheren Grössen $r, \varphi, \varrho, \chi$ durch

$$r^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \chi) + \varrho^2 + (f - z)^2 + 2\delta(f - z) + \delta^2.$$

Ersetzen wir hierin $f - z$ durch den aus der Gleichung der Wellenfläche $(f - z)^2 + \varepsilon r^2 = f^2$ genommenen Ausdruck, so ergibt sich:

$$d^2 = f^2 + (1 - \varepsilon) r^2 - 2r\varrho \cos(\varphi - \chi) + \varrho^2 + 2\delta \sqrt{f^2 - \varepsilon r^2} + \delta^2.$$

Wir wollen uns nun zunächst einmal orientieren, welche Werte oder vielmehr von welcher Grössenordnung δ Werte annehmen kann, falls

$f + \delta$ den ganzen Fokalbereich der verschiedenen Zonen umfasst.¹⁾ — Die Projektion einer Normale N auf die Symmetrieaxe hat augenscheinlich den Wert

$$\frac{r}{\frac{\partial z}{\partial r}} \text{ oder } - \text{ infolge der Relation } \frac{\partial z}{\partial r} = \frac{r}{f-z} (1 + \mu) - \frac{f-z}{1+\mu}.$$

Addieren wir hierzu z , so ist die Summe die Entfernung eines Fokulpunktes vom Scheitel der Welle und wir erhalten demnach

$$\delta = z + \frac{f-z}{1+\mu} - f = - \frac{(f-z)\mu}{1+\mu}.$$

Ist nun μ eine kleine Grösse, — und es soll dies bei uns immer der Fall sein — so ergibt sich aus früheren Formeln für die Grössenordnung von μ diejenige von δ zu $4n\lambda \cdot \frac{f^2}{R^2}$, also diejenige von $\left(\frac{r}{f}\right)^2 \delta$ zu $4n\lambda$.

Wir betrachten jetzt zunächst d , insofern es unter dem Cosinuszeichen vorkommt. Bevor wir dasselbe indess in eine Potenzreihe entwickeln, wollen wir eine kleine Transformation vornehmen, um den Giltigkeitsbereich der ersten Potenz zu erweitern. Zu diesem Zwecke schreiben wir d in der Form:

$$d = \sqrt{f^2 + 2\delta f + \delta^2 + (1-\varepsilon)r^2 - 2r\rho \cos(\varphi - \chi) + \rho^2 + 2\delta \{ \sqrt{f^2 - \varepsilon r^2} - f \}} \\ = (f+\delta) \sqrt{1 + (1-\varepsilon) \left(\frac{r}{f+\delta}\right)^2 - \frac{2r\rho}{(f+\delta)^2} \cos(\varphi - \chi) + \left(\frac{\rho}{f+\delta}\right)^2 + \frac{2\delta f}{(f+\delta)^2} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon \left(\frac{r}{f}\right)^2} - 1 \right\}}$$

Geben wir dem Wurzelinhalt die Gestalt $1 + \tau$, so ergibt sich für $\tau^2 < 1$ der Ausdruck: $1 - \frac{\tau}{2} - \frac{\tau^2}{8} - \dots$. Beschränken wir uns demnach auf die erste Potenz von τ , so vernachlässigen wir in dem Wurzel Ausdruck für kleine τ eine Grösse, die genügend genau durch $\frac{\tau^2}{8}$ dargestellt ist, und demnach in d im wesentlichen eine Grösse $(f + \delta) \frac{\tau^2}{8}$. Diese Grösse muss ein kleiner Bruchteil der Wellenlänge sein, falls das charak-

1) Damit soll nicht angedeutet sein, dass über diesen Bereich überhaupt nicht hinausgegangen werden soll; es hat jedoch kein grosses Interesse, dies in erheblichem Masse zu thun.

teristische der Erscheinung hinreichend genau wiedergegeben werden soll. Wir wollen diesen Bruchteil in der Weise festsetzen, dass das Quadrat jedes der 4 τ zusammensetzenden Glieder

$$(1 - \varepsilon) \left(\frac{r}{f}\right)^2, \frac{2r\varrho}{(f + \delta)^2} \cos(\varphi - \chi), \frac{\varrho^2}{(f + \delta)^2} \text{ und} \\ \frac{2\delta f}{(f + \delta)^2} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon \left(\frac{r}{f}\right)^2} - 1 \right\}$$

mit $\frac{f + \delta}{8}$ multipliciert kleiner als $10^{-3} \lambda$ sein soll.¹⁾ Da δ gegenüber f eine kleine Grösse sein soll, können wir diese Bedingung hinreichend auch in der Form:

$$\frac{f}{8} (1 - \varepsilon)^2 \left(\frac{r}{f}\right)^4 < 10^{-3} \lambda, \frac{f}{8} \left(\frac{2r\varrho}{f^2}\right)^2 < 10^{-3} \lambda$$

$$\frac{f}{8} \left(\frac{\varrho}{f}\right)^4 < 10^{-3} \lambda, \frac{f}{8} \left[\frac{2\delta}{f} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon \left(\frac{r}{f}\right)^2} - 1 \right\} \right]^2 < 10^{-3} \lambda$$

aufstellen.

Was die erste derselben anbelangt, so kann sie infolge unserer früheren Festsetzung $(1 - \varepsilon) \left(\frac{r}{f}\right)^2 < \frac{2\lambda}{f}$ durch $\frac{\lambda}{2f} < 10^{-3}$ ersetzt werden und ist also für alle vorliegenden Constructionen von selbst erfüllt. — Die zweite beschränkt, da sie ϱ enthält, die Möglichkeit, bei der ersten Potenz stehen zu bleiben, auf Punkte innerhalb eines gewissen Abstandes von der Axe. Um diesen Abstand schätzen zu können, erinnern wir uns des früher bereits erwähnten Ausdrucks für den Radius des m 'ten dunklen Ringes in der Fokalebene eines dioptrisch vollkommen corrigierten Systemes. Substituieren wir denselben für ϱ , so können wir die zweite Ungleichung auf jeden Fall durch $\frac{\lambda^2 (0,22 + m)^2}{8f} < 10^{-3} \lambda$, oder $— \lambda$ gleich $0,55 \cdot 10^{-3}$ genommen — durch $\frac{(0,22 + m)^2}{16f} < 1$ ersetzen.

Die dritte Bedingung ist für $\varrho < 2R$ — und das soll uns genügen — auf Grund der zweiten erfüllt. Was schliesslich die vierte:

1) Damit ist selbstverständlich zugleich auch die Bedingung erfüllt, dass die Produkte je zweier dieser Grössen mit $\frac{f + \delta}{8}$ multipliciert $< 10^{-3} \lambda$ sind.

$$\frac{f}{8} \left\{ \frac{2\delta}{f} \left(\sqrt{1 - \varepsilon \frac{r^2}{f^2}} - 1 \right) \right\}^2 < 10^{-3} \lambda$$

anbetrifft, so können wir für mässige Oeffnungswinkel dieselbe hinreichend genau in die Form

$$\frac{f}{8} \cdot \left(\frac{\delta}{f} \cdot \varepsilon \frac{r^2}{f^2} \right)^2 < 10^{-3} \lambda$$

bringen. Um einen Einblick in dieselbe zu bekommen, benutzen wir für δ seinen oben geleiteten „mittleren Maximalwert“ $4 n \lambda \frac{f^2}{rR}$ und erhalten, da ε — ausser für sehr kleine Oeffnungswinkel — nach unseren Voraussetzungen sich wenig von 1 unterscheidet $\frac{2 n^2 \lambda^2}{f} < 10^{-3} \lambda$ oder $\frac{n^2}{f} < 1$. Diese Bedingung ergibt also entweder, wie die erste, einen Minimalwert für f , oder bei gegebenem f einen Maximalwert für die Neigung unserer Wellenfläche gegenüber der sich im Scheitel anschmiegenden Kugelfläche.

Nachdem so die Bedingungen für die Möglichkeit, alle übrigen Potenzen von τ ausser der ersten zu vernachlässigen, erörtert sind, können wir den Ausdruck von d in der Form:

$$f + \delta - \frac{(\varepsilon - 1) r^2}{2(f + \delta)} - \frac{r \varrho}{f + \delta} \cos(\varphi - \chi) + \frac{\varrho^2}{2(f + \delta)} + \frac{\delta f}{f + \delta} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon \frac{r^2}{f^2}} - 1 \right\}$$

schreiben. — Man kann fragen, ob in den für die Integration in betracht kommenden Gliedern

$$\frac{(\varepsilon - 1) r^2}{2(f + \delta)}, \quad \frac{r \varrho \cos(\varphi - \chi)}{f + \delta}, \quad \frac{\delta f}{f + \delta} \left\{ \sqrt{1 - \varepsilon \frac{r^2}{f^2}} - 1 \right\},$$

ohne die vorher gesteckten Grenzen der Genauigkeit zu verlassen, $f + \delta$ sich durch f ersetzen lässt. Es zeigt sich, dass dies für das erste Glied unter der Bedingung $\frac{\delta}{f} \leq 10^{-3}$ der Fall ist, während für die beiden anderen Glieder die Genauigkeit im Allgemeinen sehr darunter leiden würde. Dagegen ist es noch möglich, in dem letzten Gliede für ein nicht allzu grosses Oeffnungsverhältniss $\varepsilon = 1$ zu setzen. Um dies einzusehen, entwickeln wir dasselbe nach Potenzen von $\varepsilon - 1$ und erhalten

$$\frac{\delta f}{f + \delta} \sqrt{1 - \frac{r^2}{f^2}} \left\{ 1 + \frac{(1 - \varepsilon)}{2} \cdot \frac{r^2}{f^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{r^2}{f^2}} - \frac{1}{8} \frac{(1 - \varepsilon)^2}{\left(1 - \frac{r^2}{f^2}\right)^2} \left(\frac{r}{f}\right)^4 \dots \right\}$$

Da nun $\frac{(1 - \varepsilon)}{2} \left(\frac{r}{f}\right)^2 < \frac{\lambda}{f}$ war, so werden von dem Klammerinhalt bei mässiger Grösse von $\frac{r}{f}$ nur Glieder von der Grössenordnung $\frac{\lambda}{f}$, und demnach von d nur solche von der Grössenordnung $\frac{\delta \lambda}{f}$ vernachlässigt. Soll letzteres $< 10^{-3} \lambda$ sein, so kommen wir auf die obige Bedingung $\frac{\delta}{f} < 10^{-3}$, unter welcher in dem Ausdruck $\frac{(1 - \varepsilon)}{2} \frac{r^2}{f + \delta}$ an Stelle von $f + \delta$ f gesetzt werden konnte, zurück. Diese Bedingung mag daher statt finden.

Es erübrigt uns schliesslich noch, den Ausdruck $\sqrt{1 - \frac{r^2}{f^2}}$ nach Potenzen von $\frac{r}{f}$ zu entwickeln; dies gibt

$$1 - \frac{1}{2} \left(\frac{r}{f}\right)^2 - \frac{1}{8} \left(\frac{r}{f}\right)^4 - \frac{1}{16} \left(\frac{r}{f}\right)^6 - \dots$$

und werden wir die Glieder soweit zu berücksichtigen haben, als das Produkt eines solchen und δ unseren früher festgesetzten Betrag $10^{-3} \lambda$ überschreitet.

Wie man sieht, liegt hier die praktische Grenze für die Grösse des Oeffnungsverhältnisses. Man wird übrigens auch nur ungern höhere Glieder, als die Darstellung der Aberrationsverhältnisse erfordert, zu dem Zwecke hinzunehmen, die Betrachtung auf die grösseren δ 's entsprechenden Ebenen auszudehnen. Für $\delta = 0$ ist das Oeffnungsverhältniss am wenigsten beschränkt und kann für den Fall einer kugelförmigen Wellenfläche beliebig gross angenommen werden. Mit wachsendem (absoluten) Werte von δ nimmt dasselbe jedoch bei Festhaltung einer bestimmten Anzahl von Potenzgliedern rasch ab. Andererseits kann man sich bei dem gebräuchlichen Fernrohrtypus $\left(\frac{R}{f} = \frac{1}{30}\right)$ und bei 2 Aberrationsgliedern bereits auf das Glied $\frac{1}{2} \frac{r^2}{f^2}$ für die Fokalebene aller Zonen beschränken. Nehmen wir diese Beschränkung nicht an, wohl aber die, in dem Wurzel- ausdruck $\varepsilon = 1$ setzen zu können, so lautet nunmehr der Ausdruck für d :

$$d = f + \delta + \frac{e^2}{2(f + \delta)} - \frac{(\varepsilon - 1)r^2}{2(f + \delta)} - \frac{r\varrho}{f + \delta} \cos(\varphi - \chi) - \frac{\delta f}{f + \delta} \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{r}{f}\right)^2 + \frac{1}{8} \left(\frac{r}{f}\right)^4 + \dots \right\}$$

oder nach Potenzen von r geordnet:

$$d = f + \delta + \frac{e^2}{2(f + \delta)} - \frac{r\varrho}{f + \delta} \cos(\varphi - \chi) - \frac{1}{2} \frac{\delta f}{f + \delta} \cdot \left(\frac{r}{f}\right)^2 - \left(\frac{r}{f}\right)^4 \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta f}{f + \delta} + \frac{\varepsilon_1 f^2}{2(f + \delta)} \right\} - \left(\frac{r}{f}\right)^6 \left\{ \frac{1}{16} \frac{\delta f}{f + \delta} + \frac{\varepsilon_2 f^2}{2(f + \delta)} \right\} - \dots$$

Nachdem so d mit Rücksicht auf seine Stellung unter dem Cosinuszeichen oder mit anderen Worten auf die Phase discutiert worden ist, bleibt noch das ausserhalb stehende gewissermassen die Amplitudenverhältnisse der Oeffnungsprojektion mitbestimmende d übrig und es fragt sich, mit welcher Genauigkeit kann man dasselbe durch einen Mittelwert ersetzen.

Wenn man bedenkt, dass die grössten Variationen von d in der durch den betrachteten Bildpunkt und die Symmetrieaxe gelegten Ebene auftreten, so lassen sich leicht die Grenzwerte von d finden. Bezeichnen wir nämlich dieselben mit d_1 und d_2 , so ist offenbar

$$d_1^2 = (r + \varrho)^2 + (z - \overline{f + \delta})^2 \quad \text{und} \quad d_2^2 = (r - \varrho)^2 + (z - \overline{f + \delta})^2,$$

und es kann demnach das Verhältniss der halben Differenz der Grenzwerte zur Grösse selbst, nämlich $\frac{d_1 - d_2}{2d_0}$ mit genügender Genauigkeit durch $\frac{r\varrho}{f^2}$ dargestellt werden. Für diese Grösse aber lässt sich aus unserer früheren Bedingung $\frac{f}{8} \left(\frac{2r\varrho}{f^2}\right)^2 < 10^{-3} \lambda$ mit Zugrundelegung von $\lambda = 0,55 \cdot 10^{-3}$ leicht der Maximalwert $\frac{10^{-3} \sqrt{1,1}}{\sqrt{f}}$ finden. Wie man sieht, hängt derselbe nur von f ab und ist für einigermassen bedeutende f hinreichend klein, so dass wir in der That das variable d durch einen Mittelwert (d_0) ersetzen können.

Wir erhalten demnach für die die Vibrationsgeschwindigkeit in einem „Bildpunkte“ bestimmenden Componenten die Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
 -X &= \frac{A}{2d_0\lambda} \iint r dr d\varphi \cos 2\pi \left[\frac{t}{\Theta} - \frac{f+\delta}{\lambda} - \frac{\varrho^2}{2\lambda(f+\delta)} + \frac{r\varrho}{\lambda(f+\delta)} \cos(\varphi-\chi) \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{r}{f}\right)^2 \cdot \frac{1}{2\lambda} \cdot \frac{\delta f}{f+\delta} + \left(\frac{r}{f}\right)^4 \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta f}{\lambda(f+\delta)} + \varepsilon_1 \frac{f^2}{2\lambda(f+\delta)} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + \left(\frac{r}{f}\right)^6 \left\{ \frac{1}{16} \frac{\delta f}{\lambda(f+\delta)} + \varepsilon_2 \frac{f^2}{2\lambda(f+\delta)} \right\} + \dots \right] \\
 -Z &= \frac{A}{2d_0\lambda} \iint r dr d\varphi \cdot \frac{x}{f-z} \cos 2\pi \left[\frac{t}{\Theta} - \frac{f+\delta}{\lambda} + \dots \right]
 \end{aligned}$$

oder, indem wir $r = sR$ setzen und die Abkürzungen

$$\begin{aligned}
 \frac{2\pi R\varrho}{\lambda(f+\delta)} &= l, \quad \left(\frac{R}{f}\right)^2 \frac{\pi}{\lambda} \cdot \frac{\delta f}{f+\delta} = \frac{k_0}{2}, \quad \frac{\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{R}{f}\right)^4 \left\{ \frac{1}{4} \frac{\delta f}{f+\delta} + \varepsilon_1 \frac{f^2}{f+\delta} \right\} \\
 &= \frac{k_1}{4}, \quad \frac{\pi}{\lambda} \cdot \left(\frac{R}{f}\right)^6 \left\{ \frac{1}{8} \frac{\delta f}{f+\delta} + \varepsilon_2 \frac{f^2}{f+\delta} \right\} = \frac{k_2}{6}, \text{ etc. einführen,}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -X &= \frac{AR^2}{2d_0\lambda} \cdot \iint s ds d\varphi \cdot \cos \left[2\pi \left\{ \frac{t}{\Theta} - \frac{f+\delta}{\lambda} - \frac{\varrho^2}{2\lambda(f+\delta)} \right\} \right. \\
 &\quad \left. + ls \cos(\varphi-\chi) + \frac{k_0}{2} s^2 + \frac{k_1}{4} s^4 + \frac{k_2}{6} s^6 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

$$-Z = \frac{AR^2}{2d_0\lambda} \cdot \frac{R}{f} \iint s^2 ds \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon \left(\frac{R}{f}\right)^2 s^2}} \cos [2\pi \{ \dots \} + \dots]$$

Ersetzen wir in dem letzteren Integrale — und es ist dies auf Grund unserer früheren Voraussetzungen bei Vernachlässigung von Grössen von der Ordnung von $\frac{\lambda}{f}$ möglich —

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon \left(\frac{R}{f}\right)^2 s^2}} \text{ durch } \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{R}{f}\right)^2 s^2}}$$

und entwickeln die Wurzel in eine Potenzreihe nach s , so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 -Z &= \frac{AR^2}{2d_0\lambda} \cdot \frac{R}{f} \iint s^2 ds \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f}\right)^2 s^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{f}\right)^4 s^4 \right. \\
 &\quad \left. + \frac{5}{16} \left(\frac{R}{f}\right)^6 s^6 \dots \right\} \cdot \cos \left[2\pi \left\{ \frac{t}{\Theta} - \frac{f+\delta}{\lambda} - \frac{\varrho^2}{2\lambda(f+\delta)} + ls \cos(\varphi-\chi) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{k_0}{2} s^2 + \frac{k_1}{4} s^4 + \frac{k_2}{6} s^6 \dots \right\} \right].
 \end{aligned}$$

Um jetzt die Intensität in einem Punkte zu finden, haben wir den Mittelwert der kinetischen¹⁾ Energie pro Volumeinheit über das Zeitintervall Θ zu bilden. Dies gibt $J = \frac{1}{\Theta} \int_0^{\Theta} \frac{(X^2 + Z^2)}{2} dt$ oder nach Ausführung

der Integration nach t :

$$\frac{\pi^2}{4} \cdot \left(\frac{A R^2}{2 d_0 \lambda}\right)^2 \left\{ X_1^2 + X_2^2 + \left(\frac{R}{f}\right)^2 (Z_1^2 + Z_2^2) \right\},$$

wo X_1, X_2, Z_1, Z_2 die Bedeutung:

$$\left. \begin{array}{l} + X_1 \\ + X_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int \int s ds d\varphi \frac{\cos}{\sin} \left\{ l s \cos(\varphi - \chi) + \frac{k_0}{2} (s^2 - 1) + \frac{k_1}{4} (s^4 - 1) + \frac{k_2}{6} (s^6 - 1) \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} + Z_1 \\ + Z_2 \end{array} \right\} = \frac{1}{\pi} \int \int s^2 ds \cos \varphi \cdot d\varphi \cdot \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f}\right)^2 s^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{f}\right)^4 s^4 + \dots \right\} \frac{\cos}{\sin} \left\{ l s \cos(\varphi - \chi) + \dots \right\}$$

haben sollen.²⁾

Die Integration in den Integralen ist dabei nach φ von 0 bis 2π und nach s von 0 bis 1 zu erstrecken. Beziehen wir die Intensität S auf die im Centrum einer Kugelwelle vom Radius f und der Oeffnung R herrschende und vernachlässigen wir die kleinen aus der Abweichung des d_0 von f herrührenden Beträge, so können wir

$$J = X_1^2 + X_2^2 + \left(\frac{R}{f}\right)^2 (Z_1^2 + Z_2^2)$$

setzen. Sollen die letzteren Vernachlässigungen nicht geschehen, so müssen wir $X_1^2 + X_2^2 + \left(\frac{R}{f}\right)^2 (Z_1^2 + Z_2^2)$ noch mit $\left(\frac{f}{d_0}\right)^2$ multiplicieren.

1) Neuerdings hat man angefangen die Intensität als den Mittelwert der gesammten Energie zu definieren und ist dies ohne Zweifel rationeller. Vergl. Volkmann, Vort. über die Theorie des Lichtes 1891).

2) Die vorliegende Form, in der zu $\frac{k_0}{2} s^2, \frac{k_1}{4} s^4, \frac{k_2}{6} s^6$ noch $-\frac{k_0}{2}, -\frac{k_1}{4}, -\frac{k_2}{6}$ hinzugefügt worden sind, ist gewählt worden, weil dieselbe für die Rechnung günstig ist; für das Resultat ist die Addition natürlich ohne Einfluss (vergl. Struve loc. coll.).

II. Entwicklung der Fundamentalformeln für grössere Abstände von der Symmetrieaxe der Welle.

Wir wollen die vier für X_1, X_2, Z_1, Z_2 erhaltenen Integrale zunächst nach φ integrieren. Schreiben wir dieselben in der Form:

$$\begin{aligned} X_1 = \frac{1}{\pi} \int \int s \, ds \, d\varphi & \left[\cos(l s \cos \overline{\varphi - \chi}) \cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - s^2) + \frac{k_1}{4} (1 - s^4) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_2}{6} (1 - s^6) \right\} + \sin(l s \cos \overline{\varphi - \chi}) \sin \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - s^2) + \frac{k_1}{4} (1 - s^4) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{k_2}{6} (1 - s^6) \right\} \right] \text{ etc.} \end{aligned}$$

und beachten die Relationen:

$$\cos(l s \cos \overline{\varphi - \chi}) = J_0(l s) - 2 J_2(l s) \cos 2(\varphi - \chi) + 2 J_4(l s) \cos 4(\varphi - \chi) - \dots$$

$$\sin(l s \cos \overline{\varphi - \chi}) = 2 J_1(l s) \cos(\varphi - \chi) - 2 J_3(l s) \cos 3(\varphi - \chi) + \dots,$$

worin $J_0, J_1, J_2 \dots$ die durch

$$\begin{aligned} J_n(l s) = \frac{(l s)^n}{2^n \Pi(n)} & \left\{ 1 - \frac{(l s)^2}{2 \cdot 2n + 2} + \frac{(l s)^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n + 2 \cdot 2n + 4} \right. \\ & \left. - \frac{(l s)^6}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2n + 2 \cdot 2n + 4 \cdot 2n + 6} + \dots \right\} \end{aligned}$$

definierten Bessel'schen Functionen bedeuten, so erhalten wir, da alle nach φ periodischen Glieder verschwinden, für X_1 und X_2

$$X_1 = 2 \int_0^1 s \, ds \, J_0(l s) \cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - s^2) + \frac{k_1}{4} (1 - s^4) + \frac{k_2}{6} (1 - s^6) \right\}$$

$$X_2 = -2 \int_0^1 s \, ds \, J_0(l s) \sin \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - s^2) + \frac{k_1}{4} (1 - s^4) + \frac{k_2}{6} (1 - s^6) \right\}$$

In der gleichen Weise müssen wir Z_1 und Z_2 behandeln. Da in diesen noch der Faktor $\cos \varphi$ hinzukommt, so bleibt von den obigen Reihen für $\cos(l s \cos \overline{\varphi - \chi})$ und $\sin(l s \cos \overline{\varphi - \chi})$ nur das mit $\cos \overline{\varphi - \chi}$ multiplizierte Glied übrig und es ergibt sich, wenn man $\cos \varphi \cdot \cos(\varphi - \chi)$ vermittelst der Relation $2 \cos \varphi \cdot \cos(\varphi - \chi) = \cos(2\varphi - \chi) + \cos \chi$ in einen periodischen und einen nicht periodischen Teil zerlegt, für Z_1 und Z_2 :

$$Z_1 = 2 \cos \chi \cdot \int_0^1 s^2 ds \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Rs}{f} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{Rs}{f} \right)^4 + \dots \right\} J_1(ls) \sin \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - s^2) + \frac{k_1}{4} (1 - s^4) + \frac{k_2}{6} (1 - s^6) + \dots \right\}$$

$$Z_2 = 2 \cos \chi \cdot \int_0^1 s^2 ds \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{Rs}{f} \right)^2 + \frac{3}{8} \left(\frac{Rs}{f} \right)^4 + \dots \right\} J_1(ls) \cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - s^2) + \dots \right\}$$

Die vorliegenden Integrale sind, wie man sieht, von dem Azimutalwinkel in einer Bildebene (χ) abhängig und zwar dem Cosinus desselben proportional. Da der Winkel, wie aus den einführenden Gleichungen $\xi = \rho \cos \chi$, $\eta = \rho \sin \chi$ erhellt, von einer zur x Axe parallelen Richtung aus gerechnet wird, so verschwinden die Z_1 und Z_2 für alle in der $y z$ Ebene liegenden Punkte und erreichen ihre Maximalwerte für die Punkte der $x z$ Ebene. Hat das optische System einen kleinen Oeffnungswinkel, so sind jedoch die Beiträge von Z_1 und Z_2 zur Intensität sehr gering, da die Integrale in Z_1 und Z_2 im allgemeinen von der Grössenordnung von X_1 und X_2 sind, und ihre Quadrate im Intensitätsausdruck mit $\left(\frac{R}{f}\right)^2$ multipliciert sind.

Was zweitens die Integration nach s anbelangt, so liegt es nahe, zum Zwecke derselben die in den Integralen vorkommenden Cosinus- und Sinusglieder nach Potenzen von s zu entwickeln. Wir thun dies mit Hilfe des Taylor'schen Lehrsatzes und erhalten z. B. für den Cosinus, wenn wir noch

$$\frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma^2) + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma^3) = \mu$$

setzen:

$$\cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma^2) + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma^3) \right\} = \cos \mu$$

$$= \left| \cos \mu \right|_{\sigma=0} + \left| \frac{\partial \cos \mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{\sigma}{1} + \left| \frac{\partial^2 \cos \mu}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2} + \left| \frac{\partial^3 \cos \mu}{\partial \sigma^3} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{\sigma^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^n \cos \mu}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=0} \frac{\sigma^n}{\Pi(n)},$$

wobei der Abkürzung halber $\Pi(n)$ für $1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n$ gesetzt ist.

Demnach wird X_1 zu:

$$2 \int_0^1 s \, ds \, J_0(l s) \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^n \cos \mu}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=0} \frac{s^{2n}}{\Pi(n)}$$

oder, falls eine gliedweise Integration gestattet ist¹⁾,

$$2 \sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{\partial^n \cos \mu}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{1}{\Pi(n)} \cdot \int_0^1 s^{2n+1} \cdot ds \cdot J_0(l s) \dots$$

Das in diesem Ausdrucke vorkommende Integral $\int s^{2n+1} ds J_0(l s)$ lässt sich leicht mittelst partieller Integration finden. Bekanntlich ist:

$$\int_0^w w^r J_{r-1}(w) \, dw = w^r J_r(w) \text{ und demnach}$$

$$\int_0^s s^r J_{r-1}(l s) \, ds = \frac{1}{l} s^r \cdot J_r(l s),$$

wo r eine beliebige ganze positive Zahl bedeuten mag. Mit Benutzung hiervon ergibt sich:

$$\int_0^s s^{2n+1} ds \cdot J_0(l s) = \frac{s^{2n+1} J_1(l s)}{l} - \frac{2n}{l} \int_0^s s^{2n} J_1(l s) ds$$

$$\int_0^s s^{2n} J_1(l s) ds = \frac{s^{2n} J_2(l s)}{l} - \frac{2n-2}{l} \int_0^s s^{2n-1} J_2(l s) ds$$

$$\int_0^s s^{2n-1} J_2(l s) ds = \frac{s^{2n-1} J_3(l s)}{l} - \frac{2n-4}{l} \int_0^s s^{2n-2} J_3(l s) ds \text{ etc.}$$

und demnach:

$$\int_0^s s^{2n+1} J_0(l s) ds = s^{2n+1} \frac{J_1(l s)}{l} - 2n \cdot s^{2n} \cdot \frac{J_2(l s)}{l^2}$$

$$+ 2n \cdot \overline{2n-2} \cdot s^{2n-1} \frac{J_3(l s)}{l^3} - 2n \cdot \overline{2n-2} \cdot \overline{2n-4} s^{2n-2} \cdot \frac{J_4(l s)}{l^4} + \dots$$

1) Es mag dies hier nicht untersucht werden, da wir sogleich einen direkten Weg zur Darstellung der Intensitätscomponenten zeigen werden.

Setzen wir diesen Wert, nachdem wir $s = 1$ genommen haben, in den obigen Ausdruck für X_1 ein, so wird derselbe zu:

$$2 \frac{J_1(l)}{l} \sum_0^{\infty} \left\{ \left| \frac{\partial^n \cos \mu}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{1}{\Pi(n)} \right\} - 2^2 \frac{J_2(l)}{l^2} \sum_0^{\infty} \left\{ \left| \frac{\partial^n \cos \mu}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{n}{\Pi(n)} \right\} \\ + 2^3 \frac{J_3(l)}{l^3} \sum_0^{\infty} \left\{ \left| \frac{\partial^n \cos \mu}{\partial \sigma^n} \right|_{\sigma=1} \cdot \frac{n \cdot \overline{n-1}}{\Pi(n)} \right\} - \dots$$

Die hierin vorkommenden Summen lassen sich nun, wie ein Blick auf unsere frühere Entwicklung für

$$\cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma^2) + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma^3) \right\}$$

lehrt, ausführen und zwar sind dieselben der Reihe nach:

$$\left| \cos \mu \right|_{\sigma=1}, \quad \left| \frac{\partial \cos \mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=1}, \quad \left| \frac{\partial^2 \cos \mu}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma=1} \text{ etc. } \dots$$

Wenden wir demnach das Zeichen D^n an, um zu bezeichnen, dass nach einer n maligen Differentiation nach σ $\sigma = 1$ zu setzen ist, so erhalten wir für die Komponente X_1 :

$$X_1 = 2 \frac{J_1(l)}{l} D^0 \cos \mu - 2^2 \frac{J_2(l)}{l^2} D^1 \cos \mu + 2^3 \frac{J_3(l)}{l^3} D^2 \cos \mu \\ - 2^4 \cdot \frac{J_4(l)}{l^4} D^3 \cos \mu + \dots$$

In ähnlicher Weise könnten wir auch die übrigen Komponenten erhalten; die überraschend einfache Form des Resultates scheint indess bereits einen noch direkteren Weg anzudeuten und diesem wollen wir uns jetzt zuwenden.

Wir werden dabei auch die Komponente X_1 noch einmal behandeln. Der Weg besteht darin, auf X_1 direkt die Methode der partiellen Integration anzuwenden, wobei wir wiederum die Gleichung

$$\int_0^s s^r J_{r-1}(ls) ds = \frac{s^r}{l} \cdot J_r(ls)$$

oder vielmehr die durch die Substitution $\sigma = s^2$ aus derselben entstandene

$$\int_0^{\sigma} \sigma^{\frac{r-1}{2}} J_r(l\sqrt{\sigma}) d\sigma = 2 \frac{\sigma^{\frac{r}{2}} J_r(l\sqrt{\sigma})}{l}$$

benutzen werden.

Substituieren wir in die Ausdrücke X_1, X_2, Z_1, Z_2 ebenfalls σ für s^2 , so erhalten dieselben die Formen:

$$X_1 = \int_0^1 J_0(l\sqrt{\sigma}) \cos \mu \cdot d\sigma$$

$$X_2 = - \int_0^1 J_0(l\sqrt{\sigma}) \sin \mu d\sigma$$

$$Z_1 = \cos \chi \int_0^1 \sqrt{\sigma} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f}\right)^2 \sigma + \frac{3}{8} \left(\frac{R}{f}\right)^4 \sigma^2 + \dots \right\} J_1(l\sqrt{\sigma}) \sin \mu d\sigma$$

$$Z_2 = \cos \chi \int_0^1 \sqrt{\sigma} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f}\right)^2 \sigma + \dots \right\} J_1(l\sqrt{\sigma}) \cos \mu d\sigma$$

Es ergibt sich nun:

$$\int_0^{\sigma} J_0(l\sqrt{\sigma}) \cos \mu d\sigma$$

$$= \cos \mu \cdot 2 \sqrt{\sigma} \cdot \frac{J_1(l\sqrt{\sigma})}{l} - \frac{2}{l} \int_0^{\sigma} \sqrt{\sigma} \cdot J_1(l\sqrt{\sigma}) \frac{\partial \cos \mu}{\partial \sigma} d\sigma$$

$$\int_0^{\sigma} \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \frac{\partial \cos \mu}{\partial \sigma} d\sigma = \frac{\partial \cos \mu}{\partial \sigma} 2 \sigma \frac{J_2(l\sqrt{\sigma})}{l} - \frac{2}{l} \int_0^{\sigma} \sigma J_2(l\sqrt{\sigma}) \frac{\partial^2 \cos \mu}{\partial \sigma^2} d\sigma$$

$$\int_0^{\sigma} \sigma J_2(l\sqrt{\sigma}) \frac{\partial^2 \cos \mu}{\partial \sigma^2} d\sigma = \frac{\partial^2 \cos \mu}{\partial \sigma^2} \cdot 2 \sigma^{\frac{3}{2}} \frac{J_3(l\sqrt{\sigma})}{l} - \frac{2}{l} \int_0^{\sigma} \sigma^{\frac{3}{2}} J_3(l\sqrt{\sigma}) \frac{\partial^3 \cos \mu}{\partial \sigma^3} d\sigma$$

etc. und demnach mit Einführung der Grenze $\sigma = 1$ und mit Anwendung unseres Symbolen D^n :

$$X_1 = 2 \frac{J_1(l)}{l} D^0 \cos \mu - 2^2 \frac{J_2(l)}{l^2} D^1 \cos \mu + 2^3 \frac{J_3(l)}{l^3} D^2 \cos \mu - \dots$$

also unser früherer Ausdruck.

Da die angeführte Operation die Eigenschaften des Cosinus nicht

beanspruchte, sondern vielmehr an Stelle des Cosinus jede andere Function gesetzt werden kann, so erhält man für X_2 :

$$X_2 = 2 \frac{J_1(l)}{l} D^0 \sin \mu - 2^2 \frac{J_2(l)}{l^2} D^1 \sin \mu + 2^3 \frac{J_3(l)}{l^3} D^2 \sin \mu - \dots$$

Wir wenden uns jetzt zu einer analogen Entwicklung der Functionen Z_1 und Z_2 und schreiben zu diesem Zwecke dieselben in den Formen

$$Z_1 = Z_1' \cos \chi + Z_1'' \cos \chi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f}\right)^2 + Z_1''' \cos \chi \frac{3}{8} \left(\frac{R}{f}\right)^4 + \dots$$

$$Z_2 = Z_2' \cos \chi + Z_2'' \cos \chi \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{R}{f}\right)^2 + Z_2''' \cos \chi \cdot \frac{3}{8} \left(\frac{R}{f}\right)^4 + \dots, \text{ wo}$$

$$Z_1' = \int_0^1 \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \sin \mu d\sigma, \quad Z_2' = \int_0^1 \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \cos \mu d\sigma$$

$$Z_1'' = \int_0^1 \sigma \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \sin \mu d\sigma, \quad Z_2'' = \int_0^1 \sigma \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \cos \mu d\sigma$$

$$Z_1''' = \int_0^1 \sigma^2 \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \sin \mu d\sigma, \quad Z_2''' = \int_0^1 \sigma^2 \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) \cos \mu d\sigma \text{ etc.}$$

Betrachten wir nun die Function

$$\int_0^{\sigma} \sqrt{\sigma} J_1(l\sqrt{\sigma}) f(\sigma) d\sigma,$$

so können wir in analoger Weise wie oben dieselbe durch partielle Integration in eine nach Bessel'schen Functionen fortschreitende Reihe von der Gestalt:

$$2\sigma \frac{J_2(l\sqrt{\sigma})}{l} f(\sigma) - 2^2 \sigma^{\frac{3}{2}} \frac{J_3(l\sqrt{\sigma})}{l^2} f'(\sigma) + 2^3 \sigma^2 \frac{J_4(l\sqrt{\sigma})}{l^3} f''(\sigma) - \dots$$

entwickeln. Setzen wir hierin $\sigma = 1$ und $f(\sigma)$ der Reihe nach $= \sin \mu$, $\sigma \sin \mu$, $\sigma^2 \sin \mu$ etc. resp. $\cos \mu$, $\sigma \cos \mu$, $\sigma^2 \cos \mu$ etc., so erhalten wir:

$$Z_1' = 2 \frac{J_2(l)}{l} D^0 \sin \mu - 2^2 \frac{J_3(l)}{l^2} D^1 \sin \mu + 2^3 \frac{J_4(l)}{l^3} D^2 \sin \mu - \dots$$

$$Z_1'' = 2 \frac{J_2(l)}{l} D^0 (\sigma \sin \mu) - 2^2 \frac{J_3(l)}{l^2} D^1 (\sigma \sin \mu) + 2^3 \frac{J_4(l)}{l^3} D^2 (\sigma \sin \mu) - \dots$$

$$Z_2' = 2 \frac{J_2(l)}{l} D^0 \cos \mu - 2^2 \frac{J_3(l)}{l^2} D^1 \cos \mu + 2^3 \frac{J_4(l)}{l^3} D^2 \cos \mu - \dots$$

$$Z_2'' = 2 \frac{J_2(l)}{l} D^0 (\sigma \cos \mu) - 2^2 \frac{J_3(l)}{l^2} D^1 (\sigma \cos \mu) + 2^3 \frac{J_4(l)}{l^3} D^2 (\sigma \cos \mu) - \dots$$

Die Frage nach der Convergenz der Reihen für die X und Z erledigt sich leicht in folgender Weise.

$$\text{Da } J_n(l) = \frac{l^n}{2^n \Pi(n)} \left\{ 1 - \frac{l^2}{2 \cdot 2n + 2} + \frac{l^4}{2 \cdot 4 \cdot 2n + 2 \cdot 2n + 4} - \dots \right\} \text{ ist,}$$

so kann man für jedes reelle l von einem gewissen n an $\frac{2^n J_n(l)}{l^n}$ durch $\frac{1}{\Pi(n)} (1 - \delta_n)$ ersetzen, wo δ_n einen Bruch bedeutet, der mit wachsendem n sich der Grenze 0 nähert. Betrachte ich nun allgemein die Reihe:

$$F(l) = 2 \frac{J_1(l)}{l} f(\sigma)_{\sigma=0} - 2^2 \frac{J_2(l)}{l^2} D^1 f(\sigma) + 2^3 \frac{J_3(l)}{l^3} D^2 f(\sigma) - \dots,$$

so kann ich die Glieder derselben von jener bestimmten Stelle n an nach dem obigen durch

$$\pm \left\{ \frac{(1 - \delta^n)}{\Pi(n)} D^{n-1} f(\sigma) - \frac{(1 - \delta_{n+1})}{\Pi(n+1)} D^n f(\sigma) + \frac{(1 + \delta_{n+2})}{\Pi(n+2)} D^{n+1} f(\sigma) - \dots \right\}$$

ersetzen. Dieser Ausdruck convergiert sicher, falls die Reihe der Moduln der Glieder

$$\frac{1}{\Pi(n)} D^{n-1} f(\sigma), \frac{1}{\Pi(n+1)} D^n f(\sigma), \frac{1}{\Pi(n+2)} D^{n+1} f(\sigma) \dots$$

convergiert. Nehme ich nun den Punkt 1 zum Ausgangspunkt einer Potenzreihe, so kann ich die Function $f(1 + \sigma)$ solange in eine convergente Potenzreihe nach σ :

$$D^0 f(\sigma) + D^1 f(\sigma) \cdot \frac{\sigma}{1} + D^2 f(\sigma) \cdot \frac{\sigma^2}{1 \cdot 2} + \dots$$

entwickeln, als $f(1 + \sigma)$ eindeutig, endlich und stetig bleibt. Falls dies der Fall ist, convergiert aber auch die Reihe der Modulglieder; demnach convergiert unser obiger Ausdruck solange, als $f(1 + \sigma)$ eindeutig, endlich und stetig bleibt. Da dies für alle von uns betrachteten Functionen $\cos \mu, \sigma \cos \mu, \sigma^2 \cos \mu \dots, \sin \mu, \sigma \sin \mu, \sigma^2 \sin \mu \dots$ für endliche Werte

des Argumentes der Fall ist, convergieren die von uns gegebenen Reihen von einem bestimmten Gliede an für jedes l .

Was weiter die Berechnung der Reihen anbelangt, so handelt es sich, da für die Bessel'schen Functionen — wenn auch nicht voll genügende — Tafeln vorhanden sind, jetzt um die explicite Darstellung der mehrfachen Differentialquotienten. Man sieht nun zunächst ohne weiteres, dass die in $Z_1'', Z_1'''\dots$ und $Z_2'', Z_2'''\dots$ neu auftretenden Coefficienten sich auf die in X_1, X_2 oder Z_1', Z_2' vorkommenden reducieren lassen. Nach bekannten Regeln ergibt sich nämlich, wenn man den Ausdruck

$$\frac{n(n-1)(n-2)\dots n-m-1}{1\cdot 2\cdot 3\dots m}$$

mit n_m bezeichnet,

$$D^n(\sigma \sin \mu) = D^n \sin \mu + n_1 D^{n-1} \sin \mu$$

$$D^n(\sigma^2 \sin \mu) = D^n \sin \mu + 2 \cdot n_1 D^{n-1} \sin \mu + 2 \cdot 1 n_2 D^{n-2} \sin \mu \text{ etc.}$$

und die analoge Formelserie, in der der Cosinus an die Stelle des Sinus gesetzt ist.¹⁾

Wir haben uns deshalb nur mit der Darstellung von $D^n \cos \mu$ und $D^n \sin \mu$ zu beschäftigen und werden natürlicher Weise die Hilfsmittel hierzu zum Teil der Theorie der höheren Differentialquotienten entnehmen. Speciell benutzen wir folgenden Satz: Es sei eine beliebige Function von σ $h = h(\sigma)$ gegeben und von dieser eine Function $F(h) = f(\sigma)$; alsdann besteht zwischen dem n ten Differentialquotienten von f nach σ ($f^{(n)}(\sigma)$) und der Reihe der Differentialquotienten von F nach h eine lineare Gleichung von der Form:

$$f^{(n)}(\sigma) = \frac{W_1}{1} \cdot F'(h) + \frac{W_2}{\Pi(2)} \cdot F''(h) + \dots + \frac{W_n}{\Pi(n)} F^n(h),$$

worin die W Functionen bedeuten, die nur von h abhängen und in der Gestalt:

$$W_m = \left| \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \left\{ h(\sigma + \tau) - h(\sigma) \right\}^m \right|_{\tau=0}$$

1) Wollen wir eine successive Reduktion der $D(\sigma^k \cos \mu)$ resp. $D(\sigma^k \sin \mu)$, nämlich auf $D(\sigma^{k-1} \cos \mu)$ und $D(\sigma^{k-1} \sin \mu)$, so ist auch dies leicht bewirkt, indem:

$$D^n(\sigma^k \sin \mu) = D^n(\sigma^{k-1} \sin \mu) + n_1 D^{n-1}(\sigma^{k-1} \sin \mu)$$

$$D^n(\sigma^k \cos \mu) = D^n(\sigma^{k-1} \cos \mu) + n_1 D^{n-1}(\sigma^{k-1} \cos \mu).$$

oder auch

$$m_0 \frac{\partial^n \cdot h^m}{\partial \sigma^n} - m_1 h \cdot \frac{\partial^n \cdot h^{m-1}}{\partial \sigma^n} + m_2 h^2 \frac{\partial^n h^{m-2}}{\partial \sigma^n} - \dots$$

dargestellt werden können.¹⁾

Setzen wir in dieser Formel für h

$$\mu = (1 - \sigma) \frac{k_0}{2} + (1 - \sigma^2) \frac{k_1}{4} + (1 - \sigma^3) \frac{k_2}{6}$$

und für $F' e^{i\mu} = \cos \mu + i \sin \mu$, so erhalten wir:

$$\frac{\partial^n e^{i\mu}}{\partial \sigma^n} = e^{i\mu} \left\{ \frac{W_1}{1} \cdot i + \frac{W_2}{\Pi(2)} i^2 + \frac{W_3}{\Pi(3)} i^3 + \dots + \frac{W_n}{\Pi(n)} i^n \right\}$$

oder bei Einführung des Wertes $\sigma = 1$

$$D^n (\cos \mu + i \sin \mu) = \frac{W_1}{1} \cdot i + \frac{W_2}{\Pi(2)} i^2 + \dots + \frac{W_n}{\Pi(n)} i^n.$$

Dabei kann W_m nach der zweiten Darstellung (zweite Zeile dieser Seite) durch $D^n (\mu^m)$ ausgedrückt werden. Wir erhalten also schliesslich durch Trennung des Reellen vom Imaginären die Reihen:

$$D^n \cos \mu = - \frac{D^n (\mu^2)}{\Pi(2)} + \frac{D^n (\mu^4)}{\Pi(4)} - \frac{D^n (\mu^6)}{\Pi(6)} + \dots$$

$$D^n \sin \mu = \frac{D^n (\mu)}{\Pi(1)} - \frac{D^n (\mu^3)}{\Pi(3)} + \frac{D^n (\mu^5)}{\Pi(5)} - \dots,$$

welche, wie aus der Entstehung hervorgeht, bei μ^{n-1} oder μ^n abbrechen sind.

Obwohl mit diesen Formeln die Berechnung von $D^n \cos \mu$ und $D^n \sin \mu$ bereits ziemlich einfach ist, so ist dennoch der Wunsch nach einer vollständig expliciten Darstellung noch berechtigt. Da es sich nun in den vorliegenden Formeln um die Differentiation von Potenzen einer Function handelt, so kann man auf jedes der Glieder $D^n (\mu^k)$ den obigen allgemeinen Satz noch einmal anwenden; man kommt aber unmittelbar zu der schliesslichen Darstellung, falls man nur für W_m die erste Form benutzt. Thun wir dies, so erhalten wir für W_m den Ausdruck:

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \cdot \left\{ \mu(\sigma + \tau) - \mu(\sigma) \right\}^m \right|_{\substack{\tau=0 \\ \sigma=1}}$$

1) Vergl. z. B. Schlömilch, Compendium der höheren Analysis, Bd. II, pag. 5.

Da nun $\mu(\sigma)$ für $\sigma = 1$ verschwindet, so erhält $\mu(\sigma + \tau) - \mu(\sigma)$ für den gleichen Wert $\sigma = 1$ die Form:

$$\frac{k_0}{2}(1 - \overline{1 + \tau}) + \frac{k_1}{4}(1 - \overline{1 + \tau^2}) + \frac{k_2}{6}(1 - \overline{1 + \tau^3})$$

oder nach Potenzen von τ geordnet:

$$- \tau \left\{ \frac{k_0 + k_1 + k_2}{2} + \tau \left(\frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{2} \right) + \tau^2 \frac{k_2}{6} \right\}$$

Führen wir jetzt an Stelle von k_0, k_1, k_2 drei neue Grössen ein, die durch die Gleichungen

$$\frac{k_0 + k_1 + k_2}{2} = a, \quad \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{2} = b, \quad \frac{k_2}{6} = c$$

definiert sind, so geht der Ausdruck für W_m in

$$(-1)^m \left| \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \left\{ \tau (a + b \tau + c \tau^2) \right\}^m \right|_{\tau=0}$$

über. Differentiieren wir diese Form nach der Regel für ein Produkt, in dem wir τ^m als den einen, $(a + b \tau + c \tau^2)^m$ als den anderen Faktor betrachten, so verschwinden in der entstandenen Summe alle anderen Glieder ausser demjenigen, bei welchem die Differentiation an τ^m gerade m mal ausgeführt wird; diejenigen nämlich, bei welchen sie weniger als m mal ausgeführt wird, behalten eine positive Potenz von τ übrig und verschwinden deshalb mit τ , da der andere Faktor endlich bleibt; für diejenigen aber, bei welchen sie mehr als m mal ausgeführt wird, ist natürlich der erste Faktor auch ohne einen speciellen Wert für τ gleich Null. W_m lässt sich infolge dessen in der Form:

$$(-1)^m n_m \Pi(m) \left| \frac{\partial^{n-m} (a + b \tau + c \tau^2)^m}{\partial \tau^{n-m}} \right|_{\tau=0}$$

schreiben.

Wir wollen nun zunächst einmal den Specialfall $c = 0$, also $k_2 = 0$ behandeln, in dem also nur ein Aberrationsglied, das der 4. Potenz der Oeffnung proportional ist, vorkommt. Entwickeln wir $(a + b \tau)^m$ nach der binomischen Regel, so ist das Glied, welches hier allein in betracht kommt, da alle übrigen verschwinden, dasjenige, welches τ^{n-m} enthält, also $m_{n-m} a^{2m-n} \cdot (b \tau)^{n-m}$. Wir erhalten also für den $n - m$ ten Diffe-

rentialquotienten desselben $m_{n-m} a^{2m-n} b^{n-m} \cdot \Pi(n-m)$ und demnach für W_m : $(-1)^m n_m \Pi(m) \Pi(n-m) m_{n-m} a^{2m-n} \cdot b^{n-m}$. Diese Form lässt sich noch etwas vereinfachen; da nämlich $n_m = \frac{\Pi(n)}{\Pi(m) \Pi(n-m)}$ und entsprechend $m_{n-m} = \frac{\Pi(m)}{\Pi(n-m) \Pi(2m-n)}$ ist, so ergibt sich für $\frac{W_m}{\Pi(m)}$:

$$(-1)^m \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m) \Pi(2m-n)} \cdot a^{2m-n} b^{n-m}.$$

Da wir nun weiter den Vorzeichenwechsel in den Reihen $D^n \cos \mu$ und $D^n \sin \mu$ durch $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}$ darstellen können, so erhalten wir:

$$D^n \cos \mu = \sum (-1)^{\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}} \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-m) \Pi(2m-n)} \cdot a^{2m-n} b^{n-m}$$

und für $D^n \sin \mu$ den gleichen Ausdruck. Die Summenzeichen beziehen sich dabei in der Darstellung von $D^n \cos \mu$ auf die geraden m bis zu $n-1$ resp. n und in der Darstellung von $D^n \sin \mu$ auf die ungeraden m bis zu $m=n-1$ resp. n . — Was den Anfangswert von m für die beiden Reihen anbetrifft, so ersieht man aus der Gleichung:

$$W_m = (-1)^m \left| \frac{\partial^n}{\partial \tau^n} \left\{ (a + b \tau) \tau \right\}^m \right|_{\tau=0}$$

unmittelbar, dass jedes m den Ungleichungen $n-m \geq 0$ und $n-2m \leq 0$ oder der damit identischen $m \leq n \leq 2m$ genügen muss, da sonst die entsprechenden Glieder verschwinden. Wir müssen demnach auf Grund der Thatsache, dass in $D^n \cos \mu$ nur gerade, in $D^n \sin \mu$ nur ungerade m vorkommen, die vier Fälle, dass n eine Zahl von der Form $4p$, $4p+1$, $4p+2$, $4p+3$ ist, trennen und erhalten folgende Uebersicht:

Form von n .	$D^n \cos \mu$		$D^n \sin \mu$	
	Anfangswert,	Endwert von m .	Anfangswert,	Endwert von m
$4p$	$\frac{n}{2}$	n	$\frac{n+2}{2}$	$n-1$
$4p+1$	$\frac{n+3}{2}$	$n-1$	$\frac{n+1}{2}$	n
$4p+2$	$\frac{n+2}{2}$	n	$\frac{n}{2}$	$n-1$
$4p+3$	$\frac{n+1}{2}$	$n-1$	$\frac{n+3}{2}$	n

Nehmen wir z. B. $n = 5$, so sind die Anfangs- und Endwerte für m in $D^5 \cos \mu$ resp. $D^5 \sin \mu$ hiernach 4,4 resp. 3,5. Wir haben also

$$\begin{aligned} D^5 \cos \mu &= \frac{\Pi(5)}{\Pi(1)\Pi(3)} a^3 b = 20 a^3 b \text{ und } D^5 \sin \mu \\ &= + \frac{\Pi(5)}{\Pi(2)\Pi(1)} a b^2 - \frac{\Pi(5)}{\Pi(5)} a^5 = 60 a b^2 - a^5. \end{aligned}$$

Es ergibt sich auf diese Weise folgende Tabelle:

$$D^0 \cos \mu = 1$$

$$D^1 \cos \mu = 0$$

$$D^2 \cos \mu = -a^2$$

$$D^3 \cos \mu = -6 a b$$

$$D^4 \cos \mu = -12 b^2 + a^4$$

$$D^5 \cos \mu = 20 a^3 b$$

$$D^6 \cos \mu = \frac{\Pi(6)}{\Pi(2)\Pi(2)} \cdot a^2 b^2 - a^6$$

$$D^7 \cos \mu = \frac{\Pi(7)}{\Pi(3)\Pi(1)} \cdot b^3 a - \frac{\Pi(7)}{\Pi(5)} b a^5$$

$$D^8 \cos \mu = \frac{\Pi(8)}{\Pi(4)\Pi(0)} \cdot b^4 - \frac{\Pi(8)}{\Pi(2)\Pi(4)} b^2 a^4 + \frac{\Pi(8)}{\Pi(0)\Pi(8)} a^8 \text{ etc.}^1)$$

$$D^0 \sin \mu = 0$$

$$D^1 \sin \mu = -a$$

$$D^2 \sin \mu = -2 b$$

$$D^3 \sin \mu = +a^3$$

$$D^4 \sin \mu = +12 a^2 b$$

$$D^5 \sin \mu = 60 a b^2 - a^5$$

$$D^6 \sin \mu = \frac{\Pi(6)}{\Pi(3)\Pi(0)} b^3 - \frac{\Pi(6)}{\Pi(1)\Pi(4)} a^4 b$$

$$D^7 \sin \mu = -\frac{\Pi(7)}{\Pi(2)\Pi(3)} b^2 a^3 + a^7$$

$$D^8 \sin \mu = -\frac{\Pi(8)}{\Pi(3)\Pi(2)} b^3 a^2 + \frac{\Pi(8)}{\Pi(1)\Pi(6)} b a^6 \text{ etc.}$$

1) $\Pi(0)$ soll gleich 1 sein.

Nach Erledigung dieses Specialfalles, der wegen eines späteren Beispiels etwas ausführlich dargestellt ist, wenden wir uns jetzt wieder der allgemeineren Formel für W_m zu. Es war

$$\frac{W_m}{\Pi(m)} = (-1)^m n_m \left| \frac{\partial^{n-m}}{\partial \tau^{n-m}} \left\{ a + b \tau + c \tau^2 \right\}^m \right|_{\tau=0}$$

und es handelt sich jetzt darum W_m explicite durch a, b, c auszudrücken. Wir zerlegen zu dem Zwecke $a + b \tau + c \tau^2$ in zwei Faktoren $\alpha + \beta \tau$ und $\gamma + \delta \tau$, so dass also die Beziehungen $\alpha \gamma = a$, $\beta \gamma + \delta \alpha = b$, $\beta \delta = c$ gelten.

Es ist nun zunächst klar, dass für alle Werte von m , für die $n - m > 2m$ ist, W_m verschwindet; demnach tritt zu der Beziehung $n - m \geq 0$ die weitere $n - 3m \leq 0$ hinzu. Entwickle ich nun unter Benutzung der für die mehrfache Differentiation eines Produktes geltenden Regel

$$\frac{\partial^{n-m}}{\partial \tau^{n-m}} \cdot \left\{ (\alpha + \beta \tau) (\gamma + \delta \tau) \right\}^m$$

in eine Reihe von Gliedern, so erhalte ich:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{n-m}}{\partial \tau^{n-m}} \cdot \left\{ (\alpha + \beta \tau) (\gamma + \delta \tau) \right\}^m \\ &= (\alpha + \beta \tau)^m \frac{\partial^{n-m} (\gamma + \delta \tau)^m}{\partial \tau^{n-m}} + (n-m)_1 \frac{\partial (\alpha + \beta \tau)^m}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial^{n-m-1} (\gamma + \delta \tau)^m}{\partial \tau^{n-m-1}} \\ &+ (n-m)_2 \frac{\partial^2 (\alpha + \beta \tau)^m}{\partial \tau^2} \cdot \frac{\partial^{n-m-2} (\gamma + \delta \tau)^m}{\partial \tau^{n-m-2}} + \dots + \frac{\partial^{n-m} (\alpha + \beta \tau)^m}{\partial \tau^{n-m}} \cdot (\gamma + \delta \tau)^m \\ &= \sum (n-m)_k \frac{\partial^k (\alpha + \beta \tau)^m}{\partial \tau^k} \cdot \frac{\partial^{n-m-k} (\gamma + \delta \tau)^m}{\partial \tau^{n-m-k}}. \end{aligned}$$

In dieser Summe hätte sich die Zahl k eigentlich über alle ganzen positiven Zahlen von 0 bis $n - m$ zu erstrecken, es ist indessen leicht zu sehen, dass eine Reihe von Gliedern wegfällt. Es sind dies nämlich alle diejenigen, für welche entweder $n - m - k$ oder k grösser als m ist. Wir können demnach für k die Bedingungen $n - 2m - k \leq 0$ und $k \leq m$ festsetzen. Führen wir jetzt in derselben Weise wie früher (pag. 48 und 49) die Differentiationen an

$$\frac{\partial^k (\alpha + \beta \tau)^m}{\partial \tau^k} \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{n-m-k}}{\partial \tau^{n-m-k}} (\gamma + \delta \tau)^m$$

aus, so erhalten wir $\tau = 0$ gesetzt für den ersteren Ausdruck:

$$\frac{\Pi(m)}{\Pi(m-k)} \cdot \alpha^{m-k} \beta^k, \text{ für den zweiten } \frac{\Pi(m)}{\Pi(2m-n+k)} \cdot \gamma^{2m-n+k} \delta^{n-m-k}$$

und demnach für ihr Produkt:

$$\frac{\Pi(m) \cdot \Pi(m)}{\Pi(m-k) \Pi(2m-n+k)} \cdot \alpha^{m-k} \beta^k \gamma^{2m-n+k} \delta^{n-m-k}.$$

Hiermit ergibt sich:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial^{n-m}}{\partial \tau^{n-m}} \left\{ (\alpha + \beta \tau) (\gamma + \delta \tau) \right\}^m \right|_{\tau=0} \\ &= \sum \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(k) \Pi(n-m-k)} \cdot \frac{\Pi(m) \cdot \Pi(m)}{\Pi(2m-n+k) \Pi(m-k)} \alpha^{m-k} \beta^k \gamma^{2m-n+k} \delta^{n-m-k}, \end{aligned}$$

worin die Summe über alle Werte k von $n - 2m$ bis m zu erstrecken ist.

Es ist von vorneherein klar, dass die W und damit die Ausdrücke für $D^n \cos \mu$ und $D^n \sin \mu$ nach a, b, c rational sind, andererseits aber sind mindestens einige der Werte $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in bezug auf dieselben Grössen a, b, c irrational. Wir haben es demnach mit einer scheinbaren Irrationalität der W zu thun und stellen uns die Aufgabe, diese zu beseitigen. Betrachten wir zu diesem Zwecke zunächst den in der obigen Summe vorkommenden Faktor $\alpha^{m-k} \beta^k \gamma^{2m-n+k} \delta^{n-m-k}$, so können wir demselben die Form

$$(\alpha \gamma)^m \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{n-m-k}, \text{ oder, da } \alpha \gamma = a, a^m \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{n-m-k}$$

geben. Aus Gründen der Symmetrie der Faktoren $\alpha + \beta \tau$ und $\gamma + \delta \tau$ und wie auch direkt leicht einzusehen ist, wenn man in das unter dem Summenzeichen stehende Glied an Stelle von k $n - m - k$ substituiert, müssen ferner in jener Summe je zwei gleich weit von den Enden abstehende Glieder den gleichen vor den Potenzen von $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ stehenden Faktor besitzen. Nehme ich demnach je zwei solche Glieder zusammen, so erhalte ich:

$$\begin{aligned} & \sum \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(k) \Pi(n-m-k)} \cdot \frac{\Pi(m) \Pi(m)}{\Pi(2m-n+k) \Pi(m-k)} a^m \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{n-m-k} \right. \\ & \quad \left. + \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-m+k} \right\} \end{aligned}$$

und hierin ist die Summe in bezug auf k nur über die Reihe der Werte

von $n - 2m$ bis $\frac{n-m}{2}$ zu erstrecken. — Der Inhalt der Klammer ist, wie man sieht, eine rationale symmetrische Funktion der Grössen $\frac{\alpha}{\beta}$ und $\frac{\gamma}{\delta}$; da nun diese die Wurzeln der algebraischen Gleichung $a - b\tau + c\tau^2 = 0$ sind, andererseits aber nach einem bekannten Satze der Algebra jede rationale und symmetrische Funktion der Wurzeln einer Gleichung sich rational durch die Coefficienten dieser Gleichung ausdrücken lässt, so haben wir hier nur die Theorie der symmetrischen Funktionen anzuwenden, um zu einer in a, b, c rationalen Darstellung der W zu gelangen. Schreiben wir zu diesem Zwecke den Ausdruck

$$\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^k \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{n-m-k} + \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^k \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{n-m-k}$$

in der Form

$$\left(\frac{\beta\delta}{\alpha\gamma}\right)^{n-m-k} \left\{ \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{2k-n+m} + \left(\frac{\delta}{\gamma}\right)^{2k-n+m} \right\}$$

oder wegen $\beta\delta = c, \alpha\gamma = a, \left(\frac{c}{a}\right)^{n-m-k} \left\{ \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-m-2k} + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{n-m-2k} \right\}$,

so handelt es sich nur noch darum, die Summe der $n - m - 2k$ ten Potenzen der Wurzeln der quadratischen Gleichung $a - b\tau + c\tau^2 = 0$ darzustellen. Es ergibt sich, wenn wir zur Abkürzung $n - m - 2k = \bar{n}$ setzen,

$$\begin{aligned} \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\bar{n}} + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\bar{n}} &= \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\bar{n}} + \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{\bar{n}} \\ &= \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}} - \bar{n} \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}-2} \cdot \frac{a}{c} + \frac{\bar{n}(\bar{n}-3)}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}-4} \left(\frac{a}{c}\right)^2 + \dots \\ &+ (-1)^\mu \frac{\bar{n}(\bar{n}-\mu-1)(\bar{n}-\mu-2)\dots(\bar{n}-2\mu+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots \mu} \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}-2\mu} \cdot \left(\frac{a}{c}\right)^\mu + \dots \end{aligned}$$

wobei der letzte Wert von μ die grösste in $\frac{n-m-2k}{2}$ enthaltene Zahl ist.

Setzen wir den gefundenen Ausdruck in die obige Summe ein, so erhalten wir

$$\left| \frac{\partial^{n-m} \{a + b\tau + c\tau^2\}^m}{\partial \tau^{n-m}} \right|_{\tau=0}$$

$$= \sum_{k=n-2m}^{\frac{n-m}{2}} \frac{\Pi(n-m)}{\Pi(k)\Pi(n-m-k)} \cdot \frac{\Pi(m) \cdot \Pi(m)}{\Pi(2m-n+k)\Pi(m-k)} \cdot a^m \left(\frac{c}{a}\right)^{n-m-k} \\ \left\{ \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}} - \bar{n} \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}-2} \frac{a}{c} + \frac{\bar{n}(\bar{n}-3)}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{c}\right)^{\bar{n}-4} \left(\frac{a}{c}\right)^2 - \dots \right\},$$

worin die Summe, wie hier noch einmal erwähnt werden mag, sich über alle positiven ganzzahligen Werte von k erstreckt, die der Ungleichung:

$$n - 2m \leq k \leq \frac{n-m}{2}.$$

genügen und worin der Klammerinhalt mit demjenigen Werte von μ abzubrechen hat, welcher der grössten in $\frac{n-m-2k}{2}$ enthaltenen ganzen Zahl gleich ist.

Wir können jetzt die Ausdrücke für $D^n \cos \mu$ und $D^n \sin \mu$ fertig hinschreiben; dieselben lauten:

$$D^n \cos \mu = \sum (-1)^{\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}} \frac{W_m}{\Pi(m)} \\ = \sum (-1)^{\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}} n_m \left| \frac{\partial^{n-m}}{\partial \tau^{n-m}} \{a + b\tau + c\tau^2\}^m \right|_{\tau=0} \quad \text{und} \\ D^n \sin \mu = \sum (-1)^{\frac{n(m-1)}{1 \cdot 2}} \frac{W_m}{\Pi(m)} \\ = \sum (-1)^{\frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}} n_m \left| \frac{\partial^{n-m}}{\partial \tau^{n-m}} \{a + b\tau + c\tau^2\}^m \right|_{\tau=0}$$

und erstreckt sich die Summe in $D^n \cos \mu$ auf alle geraden, die in $D^n \sin \mu$ auf alle ungeraden der Ungleichheit $m \leq n \leq 3m$ genügenden Zahlen. Wir wollen bezüglich der Anwendung dieser Formeln zwei Beispiele geben, nämlich die Bildung von $D^7 \cos \mu$ und $D^4 \sin \mu$. Was zunächst den letzteren Ausdruck anbetrifft, so kommt wegen $m \leq 4 \leq 3m$ und weil m ungerade sein muss, für dasselbe nur der Wert 3 in Betracht. Setzen wir nun die Werte für n und m in die Ungleichung für k , nämlich $n - 2m \leq k \leq \frac{n-m}{2}$ ein, so ergibt sich $-2 \leq k \leq \frac{1}{2}$ und es kann demnach k , da es eine positive Zahl sein muss, nur den Wert 0 annehmen. Wir erhalten also:

$$D^4 \sin \mu = \frac{\Pi(4)}{\Pi(3)\Pi(1)} \cdot \frac{\Pi(1)}{\Pi(0)\Pi(1)} \cdot \frac{\Pi(3)\Pi(3)}{\Pi(2)\Pi(3)} a^3 \left(\frac{c}{a}\right)^1 \left(\frac{b}{c}\right)^1 = 12 a^2 b.$$

Nehmen wir weiter $D^7 \cos \mu$. Die Ungleichung $m \leq 7 \leq 3m$ liefert die Möglichkeit, dass $m = 4$ oder 6 ist. Für $m = 4$ ergeben sich dann die zugehörigen k aus $-1 \leq k \leq \frac{3}{2}$ zu 0 und 1 , für $m = 6$ aus $-5 \leq k \leq \frac{1}{2}$ zu 0 . Demnach erhält man nach Ausführung der Rechnung

$$D^7 \cos \mu = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 (a b^3 + 3 a^2 b c) - 7 \cdot 6 a^5 b.$$

In dieser Weise lässt sich folgende Tabelle berechnen.

$$D^0 \cos \mu = 1$$

$$D^1 \cos \mu = 0$$

$$D^2 \cos \mu = -a^2$$

$$D^3 \cos \mu = -6 a b$$

$$D^4 \cos \mu = a^4 - 12 b^2 - 24 a c$$

$$D^5 \cos \mu = 20 a^3 b - 120 b c$$

$$D^6 \cos \mu = a^6 + 180 a^2 b^2 + 120 a^3 c - 360 c^2$$

$$D^7 \cos \mu = 840 a b^3 + 2520 a^2 b c - 42 a^5 b \text{ etc.}$$

$$D^0 \sin \mu = 0$$

$$D^1 \sin \mu = -a$$

$$D^2 \sin \mu = -2 b$$

$$D^3 \sin \mu = a^3 - 6 c$$

$$D^4 \sin \mu = 12 a^2 b$$

$$D^5 \sin \mu = -a^5 + 60 a b^2 + 60 a^2 c$$

$$D^6 \sin \mu = 720 c b + 120 b^3 - 30 a^4 b.$$

Obwohl die hier gegebene Darstellung der Differentialquotienten nicht zu compliciert und wegen ihres independenten Charakters von Wichtigkeit ist, dürfte es doch von Interesse sein, auch andere Darstellungen z. B. solche recursiver Natur kennen zu lernen. Um zu diesen auf möglichst einfachem Wege zu gelangen, führen wir in

$$\mu = \frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma^2) + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma^3)$$

an Stelle der k unsere Grössen a, b, c ein. Dieselben waren durch die Gleichungen

$$\frac{k_0 + k_1 + k_2}{2} = a, \quad \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{2} = b, \quad \frac{k_2}{6} = c$$

definiert und man erhält nach a, b, c geordnet:

$$\mu = (1 - \sigma) a - (1 - \sigma)^2 b + (1 - \sigma)^3 c.$$

Führe ich nun in dem n ten Differentialquotienten $\frac{\partial^n e^{i\mu}}{\partial \sigma^n}$ eine Differentiation aus, so ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n e^{i\mu}}{\partial \sigma^n} &= \frac{\partial^{n-1}}{\partial \sigma^{n-1}} \left\{ (-a i + 2 b i (1 - \sigma) - 3 c i (1 - \sigma)^2) e^{i\mu} \right\}. \\ &= -a i \frac{\partial^{n-1} e^{i\mu}}{\partial \sigma^{n-1}} + 2 b i \frac{\partial^{n-1} (e^{i\mu} (1 - \sigma))}{\partial \sigma^{n-1}} - 3 c i \frac{\partial^{n-1} ((1 - \sigma)^2 e^{i\mu})}{\partial \sigma^{n-1}}, \end{aligned}$$

oder, falls ich in jedem der zwei letzten Glieder die Regel für die mehrfache Differentiation eines Produktes anwende und darauf $\sigma = 1$ setze:

$$D^n e^{i\mu} = -i a D^{n-1} e^{i\mu} - 2 \cdot 1 i b (n-1)_1 D^{n-2} e^{i\mu} - 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot i c (n-1)_2 D^{n-3} e^{i\mu}$$

Diese Formel gibt durch Trennung des Imaginären und Reellen unmittelbar die Recursionsformeln:

$$D^n \cos \mu = a D^{n-1} \sin \mu + (n-1) 2 b D^{n-2} \sin \mu + 3 c (n-1)(n-2) D^{n-3} \sin \mu$$

$$D^n \sin \mu = -a D^{n-1} \cos \mu - (n-1) 2 b D^{n-2} \cos \mu - 3 c (n-1)(n-2) D^{n-3} \cos \mu$$

Es bedarf keines Wortes, dass man daraus $D^n \cos \mu$ durch lauter Differentialquotienten des Cosinus darstellen kann, doch ist dies unübersichtlich und hat keinen Nutzen.

Eine weitere und zwar sehr einfache Beziehung zwischen benachbarten Differentialquotienten ergibt sich durch Differentiation von $D^n e^{i\mu}$ nach a, b, c ; man erhält nämlich dadurch:

$$\frac{\partial D^n e^{i\mu}}{\partial a} = D^n \left\{ i (1 - \sigma) e^{i\mu} \right\}$$

$$\frac{\partial D^n e^{i\mu}}{\partial b} = - D^n \left\{ i (1 - \sigma)^2 e^{i\mu} \right\}$$

$$\frac{\partial D^n e^{i\mu}}{\partial c} = + D^n \left\{ i (1 - \sigma)^3 e^{i\mu} \right\}$$

oder wiederum mit Benutzung der Regel für die mehrfache Differentiation eines Produktes:

$$\frac{\partial D^n e^{i\mu}}{\partial a} = -i n_1 D^{n-1} e^{i\mu}$$

$$\frac{\partial D^n e^{i\mu}}{\partial b} = -2 \cdot 1 \cdot i n_2 D^{n-2} e^{i\mu}$$

$$\frac{\partial D^n e^{i\mu}}{\partial c} = -3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot i n_3 D^{n-3} e^{i\mu}$$

Durch Trennung des Reellen und Imaginären fliessen hieraus die Formeln:

$$\frac{\partial D^n \cos \mu}{\partial a} = n D^{n-1} \sin \mu, \quad \frac{\partial D^n \sin \mu}{\partial a} = -n D^{n-1} \cos \mu$$

$$\frac{\partial D^n \cos \mu}{\partial b} = n(n-1) D^{n-2} \sin \mu, \quad \frac{\partial D^n \sin \mu}{\partial b} = -n(n-1) D^{n-2} \cos \mu$$

$$\frac{\partial D^n \cos \mu}{\partial c} = n(n-1)(n-2) D^{n-3} \sin \mu, \quad \frac{\partial D^n \sin \mu}{\partial c} = -n(n-1)(n-2) D^{n-3} \cos \mu$$

Dieselben sind für die Bildung von $D^n \frac{\cos}{\sin} \mu$ ausserordentlich bequem. Nehmen wir z. B. an, es handelt sich um die Bildung von $D^6 \cos \mu$; $D^5 \sin \mu$, $D^4 \sin \mu$, $D^3 \sin \mu$ haben die Werte

$$-a^5 + 60 a b^2 + 60 a^2 c, \quad 12 a^2 b, \quad a^3 - 6 c.$$

Durch Integration dieser nach a resp. b resp. c und Multiplication mit 6 resp. $6 \cdot 5$ resp. $6 \cdot 5 \cdot 4$ ergeben sich die Grössen

$$-a^6 + 180 a^2 b^2 + 120 a^2 c, \quad 180 a^2 b^2, \quad 120 a^3 c - 360 c^2.$$

Da nun die $D^n \frac{\cos}{\sin} \mu$ von a, b, c unabhängige Grössen nicht enthalten können, — sie sind sogar homogen, falls man a, b, c der Reihe nach die erste resp. zweite resp. dritte Dimension zulegt — so ergibt sich für $D^6 \cos \mu$

$$-a^6 + 180 a^2 b^2 + 120 a^3 c - 360 c^2.$$

Wenn wir früher gesagt hatten, dass für die Möglichkeit unserer Darstellung die Anzahl der Aberrationsglieder völlig gleichgiltig sei, so dürfte dies aus dem vorangegangenen einleuchtend sein. Praktisch würde am meisten die independente Darstellung von $D^n \cos \mu$ und $D^n \sin \mu$ durch die Grössen a, b, c Weitläufigkeiten besitzen, doch besteht keinerlei principielle Schwierigkeit, dasselbe Verfahren bei Anwesenheit von beliebig vielen der Grössen a, b, c etc. zu benutzen.

III. Entwicklung der Fundamentalformeln für Punkte in der Nähe der Symmetrieaxe.

Wir wenden uns jetzt zu einer zweiten Entwicklung der Functionen X und Z . Um zu der ersten zu gelangen, hatten wir bei der partiellen Integration die mit einer passenden Potenz von s oder σ multiplicierte Bessel'sche Function integriert und infolge dessen als Coefficienten Differentialquotienten erhalten. Dies Verhältniss kann man aber auch umkehren und damit ergibt sich eine zweite Darstellung. Betrachten wir zunächst X_1 und $-X_2$, so besaßen diese die Form

$$\int_0^1 J_0(l\sqrt{\sigma}) \frac{\cos \mu}{\sin \mu} d\sigma.$$

Wir nehmen allgemein

$$\int_0^\sigma J_0(l\sqrt{\sigma}) f(\sigma) d\sigma$$

und benutzen bei der partiellen Integration die Formel:

$$\frac{\partial (w^{-r} J_r(w))}{\partial w} = -w^{-r} J_{r+1}(w),$$

oder vielmehr die aus dieser durch die Substitution $w = l\sqrt{\sigma}$ hervorgehende:

$$\frac{\partial \left(\sigma^{-\frac{r}{2}} J_r(l\sqrt{\sigma}) \right)}{\partial \sigma} = -\frac{l}{2} \sigma^{-\frac{r+1}{2}} J_{r+1}(l\sqrt{\sigma}).$$

Es ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int_0^\sigma J_0(l\sqrt{\sigma}) f(\sigma) d\sigma &= J_0(l\sqrt{\sigma}) \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma + \frac{l}{2} \int_0^\sigma \sigma^{-\frac{1}{2}} J_1(l\sqrt{\sigma}) d\sigma \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma, \\ \int_0^\sigma \sigma^{-\frac{1}{2}} J_1(l\sqrt{\sigma}) d\sigma \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma &= \sigma^{-\frac{1}{2}} J_1(l\sqrt{\sigma}) \int_0^\sigma \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma^2 \\ &+ \frac{l}{2} \int_0^\sigma \sigma^{-1} J_2(l\sqrt{\sigma}) \int_0^\sigma \int_0^\sigma f(\sigma) d\sigma^2 \dots, \end{aligned}$$

also

$$\int_0^{\sigma} J_0(lV\sigma) f(\sigma) d\sigma = J_0(lV\sigma) \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma + \frac{l}{2} \sigma^{-\frac{1}{2}} J_1(lV\sigma) \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma^2$$

$$+ \frac{l^2}{2^2} \sigma^{-1} J_2(lV\sigma) \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma^3 + \dots \quad \text{und für } \sigma = 1$$

$$\int_0^1 J_0(lV\sigma) f(\sigma) d\sigma = J_0(l) \int_0^1 f(\sigma) d\sigma + \frac{l}{2} J_1(l) \int_0^1 \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma^2$$

$$+ \frac{l^2}{2^2} J_2(l) \int_0^1 \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma^3 + \dots$$

Führen wir hier eine analoge Bezeichnung wie früher ein, nämlich das Symbol S^n mit der Bedeutung, dass nach der n fachen Integration einer Funktion zwischen 0 und σ $\sigma = 1$ gesetzt werden soll, so ergibt sich für X_1 und X_2 :

$$X_1 = J_0(l) S^1 \cos \mu + \frac{l}{2} J_1(l) S^2 \cos \mu + \frac{l^2}{2^2} J_2(l) S^3 \cos \mu + \dots$$

$$X_2 = J_0(l) S^1 \sin \mu + \frac{l}{2} J_1(l) S^2 \sin \mu + \frac{l^2}{2^2} J_2(l) S^3 \sin \mu + \dots$$

Was zweitens die Z anbelangt, so haben dieselben die Gestalt:

$$\int_0^1 V\sigma J_1(lV\sigma) g(\sigma) d\sigma,$$

wo $g(\sigma)$ eine der Funktionen $\sin \mu$, $\sigma \sin \mu$, $\sigma^2 \sin \mu$ etc. resp. $\cos \mu$, $\sigma \cos \mu$, $\sigma^2 \cos \mu$ etc. bedeutet. Setze ich nun in den obigen Formeln an Stelle von

$$\int_0^{\sigma} f(\sigma) d\sigma \quad \sigma g(\sigma),$$

1) Dass bei der partiellen Integration der Punkt $\sigma = 0$ keine Schwierigkeit macht, folgt daraus, dass $\sigma^{-\frac{n}{2}} J_n(lV\sigma)$ für abnehmende σ sich der Grenze $\frac{l^n}{2^n \Pi(n)}$ nähert, also endlich bleibt.

so erhalte ich unmittelbar:

$$\int_0^{\sigma} V\sigma J_1(lV\sigma) g(\sigma) d\sigma = \sigma^{-\frac{1}{2}} J_1(lV\sigma) \int_0^{\sigma} \sigma g(\sigma) d\sigma$$

$$+ \frac{l}{2} \sigma^{-1} J_2(lV\sigma) \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} \sigma g(\sigma) d\sigma^2 + \frac{l^2}{2^2} \sigma^{-\frac{3}{2}} J_3(lV\sigma) \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} \int_0^{\sigma} \sigma g(\sigma) d\sigma^3 + \dots$$

Demnach ergeben sich mit Benutzung des Symbolen S die Formeln:

$$Z_1' = J_1(l) S^1(\sigma \sin \mu) + \frac{l}{2} J_2(l) S^2(\sigma \sin \mu) + \frac{l^2}{2^2} J_3(l) S^3(\sigma \sin \mu) + \dots$$

$$Z_1'' = J_1(l) S^1(\sigma^2 \sin \mu) + \frac{l}{2} J_2(l) S^2(\sigma^2 \sin \mu) + \frac{l^2}{2^2} J_3(l) S^3(\sigma^2 \sin \mu) + \dots$$

etc. und

$$Z_2' = J_1(l) S^1(\sigma \cos \mu) + \frac{l}{2} J_2(l) S^2(\sigma \cos \mu) + \frac{l^2}{2^2} J_3(l) S^3(\sigma \cos \mu) + \dots$$

$$Z_2'' = J_1(l) S^1(\sigma^2 \cos \mu) + \frac{l}{2} J_2(l) S^2(\sigma^2 \cos \mu) + \frac{l^2}{2^2} J_3(l) S^3(\sigma^2 \cos \mu) + \dots$$

etc.

Was die Convergenz dieser Reihen anbetrifft, so lässt dieselbe sich unmittelbar einsehen. Da nämlich die mehrfachen Integrale offenbar kleiner sind als diejenigen, in denen man den Cosinus oder Sinus durch die Einheit ersetzt hat, so sind $S^n(\sigma^k \cos \mu)$ und $S^n(\sigma^k \sin \mu)$ kleiner als $\frac{1}{k+1} \cdot \frac{1}{k+2} \cdots \frac{1}{k+n}$. Nimmt man hierzu die weitere Thatsache, dass die absoluten Beträge der Bessel'schen Funktionen für reelle Argumente niemals die Einheit überschreiten, so ist die Convergenz für jeden reellen endlichen Wert von l klar.

Es ist nun zunächst wieder leicht einzusehen, dass $S^n(\sigma^k \cos \mu)$ und $S^n(\sigma^k \sin \mu)$ sich linear durch eine Reihe von $k+1$ Gliedern von der Form $S^m(\cos \mu)$ resp. $S^m(\sin \mu)$ darstellen lassen. Durch partielle Integration ergibt sich nämlich:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma^k f(\sigma) d\sigma^n = \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma d\sigma^{n-1} \int_0^\sigma \sigma^k f(\sigma) d\sigma \\
& = \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma d\sigma^{n-1} \left\{ \sigma \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma - \int_0^\sigma \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma^2 \right\} \\
& = \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma d\sigma^{n-1} \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma - \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma^{n+1}.
\end{aligned}$$

Um in derselben Weise σ vor das erste Integralzeichen zu bringen, bedarf es einer $n - 1$ maligen Wiederholung der eben ausgeführten Operation, von denen jede ein Glied

$$\int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma^{n+1}$$

liefert; demnach erhalten wir:

$$\int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma^k f(\sigma) d\sigma^n = \sigma \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma^n - n \int_0^\sigma \dots \int_0^\sigma \sigma^{k-1} f(\sigma) d\sigma^{n+1}$$

oder für $\sigma = 1$ bei Anwendung des Symbolen J

$$S^n(\sigma^k f(\sigma)) = S^n(\sigma^{k-1} f(\sigma)) - n S^{n+1}(\sigma^{k-1} f(\sigma)).$$

Würden wir $S^n(\sigma^k f(\sigma))$ durch Glieder von der Form $S^m(\sigma^{k-2} f(\sigma))$ ersetzen wollen, so haben wir die eben gefundene Formel nur auf die beiden rechts stehenden Glieder noch einmal anzuwenden, um die Formel:

$$S^n(\sigma f(\sigma)) = S^n(\sigma^{k-2} f(\sigma)) - 2n S^{n+1}(\sigma^{k-2} f(\sigma)) + n(n+1) S^{n+2}(\sigma^{k-2} f(\sigma))$$

zu erhalten. Allgemein ergibt sich:

$$\begin{aligned}
S^n(\sigma^k f(\sigma)) &= S^n f(\sigma) + (-n)_1 k S^{n+1} f(\sigma) + (-n)_2 k \cdot k - 1 S^{n+2} f(\sigma) \\
&+ \dots + (-n)_m k (\cdot k - 1) \dots (k - \overline{m - 1} \cdot) S^{n+m} f(\sigma) + \dots \quad 1)
\end{aligned}$$

1) Das Zeichen $(-n)_m$ ist in vollständiger Analogie zu der früher gebrauchten Bezeichnung n_m für den Ausdruck $\frac{-n(-n-1)(-n-2)\dots(-n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot m}$ benutzt.

Um diese Formel zu beweisen, werden wir zeigen, dass, wenn sie für k gilt, sie auch vermöge der Gleichung

$$S^n (\sigma^{k+1} f(\sigma)) = S^n (\sigma^k f(\sigma)) - n S^{n+1} (\sigma^k f(\sigma))$$

für $k + 1$ besteht. Bilden wir nämlich die rechte Seite dieser Gleichung unter Anwendung der in Frage stehenden Relation, und greifen wir hierbei diejenigen Glieder heraus, in denen $S^{n+m} f(\sigma)$ als Faktor vorkommt, so erhalten wir:

$$\begin{aligned} & (-n)_m k \cdot (k-1) \dots (k - \overline{m-1}) S^{n+m} f(\sigma) \\ & - n (-\overline{n+1})_{m-1} k \cdot (k-1) \dots (k - \overline{m-2}) S^{n+m} f(\sigma). \end{aligned}$$

Die Summe dieser beiden Glieder ergibt sich zu:

$$\begin{aligned} & (-n)_m (k+1) \cdot k \dots (k+1 - \overline{m-1}) S^{n+m} f(\sigma) \left\{ \frac{k - \overline{m-1}}{k+1} \right. \\ & \left. - n \frac{(-\overline{n+1})_{m-1}}{(-n)_m (k+1)} \right\}, \end{aligned}$$

oder, da, wie leicht abzuleiten,

$$(-r)_\mu = (-1)^\mu \frac{\Pi(r-1+\mu)}{\Pi(r-1)\Pi(\mu)}, \quad \text{also} \quad \frac{(-\overline{n+1})_{m-1}}{(-n)_m} = -\frac{m}{n}$$

ist, zu

$$(-n)_m (k+1) k \dots (k+1 - \overline{m-1}) S^{n+m} f(\sigma).$$

Dies aber ist das allgemeine Glied von $S^n (\sigma^{k+1} f(\sigma))$. Die fragliche Relation besteht also allgemein, falls sie für irgend ein k gilt; da sie für $k = 1$ oder $k = 2$ oben bewiesen wurde, so ist sie demnach allgemein richtig.

Setzen wir für $f(\sigma)$ $\cos \mu$ oder $\sin \mu$; so haben wir uns demnach nur noch um die n fachen Integrale dieser beiden Grössen zwischen den Grenzen 0 und σ zu kümmern.

Wir wollen nun zunächst Reduktionen dieser Integrale auf einfachere Formen suchen und dies in zweierlei Weise thun, nämlich diese n fachen Integrale entweder auf Differentialquotienten des einfachen Integrals der gleichen Funktion nach a, b, c zurückführen, oder dieselben durch ein einfaches Integral einer anderen Funktion ausdrücken. Ersteres wird dann hauptsächlich von Nutzen sein, wenn das

Integral entweder ganz ausgeführt werden, oder in einer Form dargestellt werden kann, in der die Differentialquotienten ohne Schwierigkeit sich bilden lassen; letzteres muss im entgegengesetzten Falle geschehen. Ausserdem können wir auch noch das n fache Integral linear durch eine von der Ordnung des höchsten Aberrationsgliedes abhängige Zahl von 1, 2, 3 .. fachen Integralen der gleichen Funktion darstellen.

Was nun zunächst die erstere Reduktion anbetrifft, so ergeben sich für die Differentialquotienten von $S^n(e^{i\mu})$ nach a, b, c die folgenden Werte:

$$\frac{\partial S^n(e^{i\mu})}{\partial a} = + i S^n \left\{ (1 - \sigma) e^{i\mu} \right\},$$

$$\frac{\partial S^n(e^{i\mu})}{\partial b} = - i S^n \left\{ (1 - \sigma)^2 e^{i\mu} \right\},$$

$$\frac{\partial S^n(e^{i\mu})}{\partial c} = + i S^n \left\{ (1 - \sigma)^3 e^{i\mu} \right\}.$$

Integrieren wir nun in jedem der rechts stehenden Ausdrücke einmal partiell, indem wir $1 - \sigma$ als den einen und $e^{i\mu}$ resp. $(1 - \sigma) e^{i\mu}$ resp. $(1 - \sigma)^2 e^{i\mu}$ als den anderen Faktor betrachten, so ergibt sich z. B. für den ersten Ausdruck:

$$i S^{n-1} \left\{ (1 - \sigma) \int_0^\sigma e^{i\mu} + \int_0^\sigma \int_0^\sigma e^{i\mu} \right\} = i S^{n-1} \left\{ (1 - \sigma) \int_0^\sigma e^{i\mu} \right\} + i S^{n+1}(e^{i\mu}).$$

Indem wir in ähnlicher Weise den ersten Teil hiervon behandeln, erhalten wir schliesslich:

$$i(1 - \sigma) S^n e^{i\mu} + n i S^{n+1}(e^{i\mu}) \text{ oder } n i S^{n+1}(e^{i\mu}).$$

Ebenso ergibt sich:

$$\frac{\partial S^n(e^{i\mu})}{\partial b} = - i n S^{n+1} \left\{ (1 - \sigma) e^{i\mu} \right\} \text{ und}$$

$$\frac{\partial S^n(e^{i\mu})}{\partial c} = + i n S^{n+1} \left\{ (1 - \sigma)^2 e^{i\mu} \right\}.$$

Diese beiden letzteren Ausdrücke können schliesslich durch eine nochmalige resp. eine zweimalige ähnliche Behandlung in die Formen:

$$- i(n + 1) n S^{n+2} e^{i\mu} \text{ und } i n(n + 1)(n + 2) S^{n+3} e^{i\mu}$$

gebracht werden. Trennen wir jetzt in denselben sowie in den Differentialquotienten von $S^n(e^{i\mu})$ nach a, b, c die reellen von den imaginären Bestandteilen, so ergibt sich das Reduktionssystem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S^n \cos \mu}{\partial a} &= \Pi(1)(-n)_1 S^{n+1} \sin \mu, & \frac{\partial S^n \sin \mu}{\partial a} &= -\Pi(1)(-n)_1 S^{n+1} \cos \mu \\ \frac{\partial S^n \cos \mu}{\partial b} &= \Pi(2)(-n)_2 S^{n+2} \sin \mu, & \frac{\partial S^n \sin \mu}{\partial b} &= -\Pi(2)(-n)_2 S^{n+2} \cos \mu \\ \frac{\partial S^n \cos \mu}{\partial c} &= \Pi(3)(-n)_3 S^{n+3} \sin \mu, & \frac{\partial S^n \sin \mu}{\partial c} &= -\Pi(3)(-n)_3 S^{n+3} \cos \mu. \end{aligned}$$

Dasselbe stimmt mit dem früher für die mehrfachen Differentialquotienten gegebenem vollständig überein, falls an Stelle von $n - n$ gesetzt wird; es hat vor jenem den Vorteil voraus, die mehrfachen Integrale durch Differentiationen einfacherer zu geben, während jenes umgekehrt die mehrfachen Differentialquotienten durch Integrationen einfacherer ergab. Ein Beispiel für seine Benutzung mag später folgen.

Eine weitere Reduktionsformel ergibt sich durch Betrachtung des Integrales

$$\int_0^1 (1 - \sigma)^n e^{i\mu} d\sigma.$$

Integrieren wir dasselbe partiell, indem wir $(1 - \sigma)^n$ als den einen, $e^{i\mu}$ als den anderen Faktor betrachten, so ergibt sich der Reihe nach:

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - \sigma)^n e^{i\mu} d\sigma &= n \int_0^1 (1 - \sigma)^{n-1} \int_0^\sigma e^{i\mu} d\sigma^2 \\ &= n(n-1) \int_0^1 (1 - \sigma)^{n-2} \int_0^\sigma \int_0^\sigma e^{i\mu} d\sigma \\ &= n(n-1)(n-2) \int_0^1 (1 - \sigma)^{n-3} \int_0^\sigma \int_0^\sigma \int_0^\sigma e^{i\mu} d\sigma \end{aligned}$$

schliesslich
$$\int_0^1 (1 - \sigma)^n e^{i\mu} d\sigma = \Pi(n) S^{n+1}(e^{i\mu})$$

und es sind demnach

$$S^n \cos \mu \text{ resp. } S^n \sin \mu \text{ durch } \frac{1}{\Pi(n-1)} \int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \cos \mu d\sigma$$

$$\text{resp. } \frac{1}{\Pi(n-1)} \int_0^1 (1-\sigma)^{n-1} \sin \mu d\sigma$$

darstellbar, oder auch, indem man σ durch $1-\sigma$ ersetzt, durch

$$\frac{1}{\Pi(n-1)} \int_0^1 \sigma^{n-1} \cos(a\sigma - b\sigma^2 + c\sigma^3) \text{ und}$$

$$\frac{1}{\Pi(n-1)} \int_0^1 \sigma^{n-1} \sin(a\sigma - b\sigma^2 + c\sigma^3).$$

Wie man ohne weiteres sieht, lassen sich die vorigen Reduktionsformeln aus diesen in äusserst einfacher Weise ableiten. Um nun diese Integrale auszuwerten, werden wir am einfachsten die vorkommenden Cosinus und Sinus nach Potenzen von σ entwickeln und dann integrieren. Dies liefert:

$$S^{n+1} \cos \mu = \frac{1}{\Pi(n)} \left\{ \frac{1}{n+1} + \left| \frac{\partial \cos(a\sigma - b\sigma^2 + c\sigma^3)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \cdot \frac{1}{1 \cdot (n+2)} \right.$$

$$\left. + \left| \frac{\partial^2 \cos(a\sigma - b\sigma^2 + c\sigma^3)}{d\sigma^2} \right|_{\sigma=0} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot (n+3)} + \dots \right\} \text{ und}$$

$$S^{n+1} \sin \mu = \frac{1}{\Pi(n)} \left\{ \frac{1}{n+1} + \left| \frac{\partial \sin(a\sigma - b\sigma^2 + c\sigma^3)}{d\sigma} \right|_{\sigma=0} \frac{1}{1 \cdot (n+2)} + \dots \right\}$$

oder mit Einführung unseres früheren Symbolen D^m , welches bedeutete, dass nach einer m maligen Differentiation nach σ $\sigma = 1$ gesetzt werden sollte,

$$\Pi(n) S^{n+1} \cos \mu = \frac{1}{n+1} - \frac{D^1 \cos \mu}{1} \cdot \frac{1}{n+2}$$

$$+ \frac{D^2 \cos \mu}{1 \cdot 2} \frac{1}{n+3} - \frac{D^3 \cos \mu}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n+4} + \dots$$

$$\Pi(n) S^{n+1} \sin \mu = - \frac{D^1 \sin \mu}{1} \frac{1}{n+2}$$

$$+ \frac{D^2 \sin \mu}{1 \cdot 2} \frac{1}{n+3} - \frac{D^3 \sin \mu}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n+4} + \dots$$

Da die hier vorkommenden Differentialquotienten bereits früher betrachtet worden sind, so können wir die Berechnung von $S^{n+1} \cos \mu$ und $S^{n+1} \sin \mu$ als erledigt ansehen.

Eine dritte Reduktion der n fachen Integrale auf einfachere ergibt sich, wenn wir die Ausdrücke:

$$\sigma^n \cos (a \sigma - b \sigma^2 + c \sigma^3) \text{ resp. } \sigma^n \sin (a \sigma - b \sigma^2 + c \sigma^3)$$

nach σ differentiieren und die entstehenden Formen

$$n \sigma^{n-1} \cos (a \sigma - b \sigma^2 + c \sigma^3) - \sigma^n (a - 2 b \sigma + 3 c \sigma^2) \sin (a \sigma - b \sigma^2 + c \sigma^3),$$

$$n \sigma^{n-1} \sin (\quad \quad \quad) + \sigma^n (a - 2 b \sigma + 3 c \sigma^2) \cos (\quad \quad \quad)$$

gliedweise zwischen den Grenzen 0 und 1 integrieren. Wir erhalten:

$$\begin{aligned} \cos (a - b + c) &= n \int_0^1 \sigma^{n-1} \cos (a \sigma - b \sigma^2 + c \sigma^3) - a \int_0^1 \sigma^n \sin (\dot{\cdot}) d \sigma \\ &+ 2 b \int_0^1 \sigma^{n+1} \sin (\dot{\cdot}) d \sigma - 3 c \int_0^1 \sigma^{n+2} \sin (\dot{\cdot}) d \sigma \text{ und} \\ \sin (a - b + c) &= n \int_0^1 \sigma^{n-1} \sin (\dot{\cdot}) d \sigma + a \int_0^1 \sigma^n \cos (\dot{\cdot}) d \sigma - 2 b \int_0^1 \sigma^{n+1} \cos (\dot{\cdot}) d \sigma \\ &+ 3 c \int_0^1 \sigma^{n+2} \cos (\dot{\cdot}) d \sigma, \end{aligned}$$

oder, indem wir von den Beziehungen

$$\Pi (r) S^{r+1} \frac{\cos}{\sin} \mu = \int_0^1 \sigma^r \frac{\cos}{\sin} (a \sigma - b \sigma^2 + c \sigma^3) d \sigma$$

Gebrauch machen:

$$\cos (a - b + c) = \Pi (n) S^n \cos \mu - a \Pi (n) S^{n+1} \sin \mu$$

$$+ 2 b \Pi (n + 1) S^{n+2} \sin \mu - 3 c \Pi (n + 2) S^{n+3} \sin \mu$$

$$\sin (a - b + c) = \Pi (n) S^n \sin \mu + a \Pi (n) S^{n+1} \cos \mu$$

$$- 2 b \Pi (n + 1) S^{n+2} \cos \mu + 3 c \Pi (n + 2) S^{n+3} \cos \mu$$

Im Falle $n = 0$ müssen diese Gleichungen durch

$$\cos (a - b + c) - 1 = - a S^1 \sin \mu + 2 b S^2 \sin \mu - 3 \cdot 2 c S^3 \sin \mu$$

$$\sin (a - b + c) = + a S^1 \cos \mu - 2 b S^2 \cos \mu + 3 \cdot 2 c S^3 \cos \mu$$

ersetzt werden.

Wie man sieht, haben wir mit diesen Gleichungen die Möglichkeit gewonnen, die mehrfachen Integrale für den Fall der beiden ersten Aberrationsglieder linear durch das ein- und zweifache Integral auszudrücken. Wächst die Ordnung des höchsten Aberrationsgliedes um k , so wächst damit im allgemeinen die Anzahl der zu dieser Darstellung nötigen Integrale um $2k$. Bequem werden diese Formeln deshalb nur bei dem ersten oder den beiden ersten Aberrationsgliedern sein.

Nachdem so die allgemeinen Formeln für die vorliegende Art der Darstellung, die nach Produkten aus Potenzen mit positiven Exponenten und Bessel'schen Funktionen fortschreitet — und naturgemäss besonders zur Berechnung der Intensität für kleine l verwandt werden wird, — gewonnen sind, wollen wir uns wiederum dem Specialfalle $c = 0$ zuwenden, in dem also nur das der vierten Potenz der Oeffnung proportionale Aberrationsglied vorhanden ist. — Nach der eben gegebenen Formel ist es möglich, die sämmtlichen in den X und Z vorkommenden Coefficienten linear durch die Integrale

$$\int_0^1 \sin(a\sigma - b\sigma^2) d\sigma \quad \text{und} \quad \int_0^1 \cos(a\sigma - b\sigma^2) d\sigma$$

auszudrücken; wir werden jedoch, um dies möglichst einfach zu thun, von der Benutzung dieses Weges absehen und uns der Differentialgleichungen

$$\frac{\partial S^n \cos \mu}{\partial a} = -n S^{n+1} \sin \mu \quad \text{und} \quad \frac{\partial S^n \sin \mu}{\partial a} = +n S^{n+1} \cos \mu,$$

oder vielmehr der mit diesen aequivalenten

$$\frac{\partial S^n (e^{i\mu})}{\partial a} = i n S^{n+1} (e^{i\mu})$$

bedienen. Man sieht nun zunächst, dass man auf Grund derselben $S^{n+1} e^{i\mu}$ durch einen n fachen Differentialquotienten von $S^1 (e^{i\mu})$ nach a ausdrücken kann. Differentiieren wir zu diesem Zwecke von den Relationen

$$\frac{\partial S^n e^{i\mu}}{\partial a} = i n S^{n+1} e^{i\mu}$$

$$\frac{\partial S^{n-1} e^{i\mu}}{\partial a} = i (n - 1) S^n e^{i\mu}$$

$$\frac{\partial S^{n-2} e^{i\mu}}{\partial a} = i(n-2) S^{n-1} e^{i\mu}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\frac{\partial S^1 e^{i\mu}}{\partial a} = i \cdot 1 \cdot S^2 e^{i\mu},$$

die zweite 1 mal, die dritte 2 mal etc. nach a und multiplicieren die rechten und linken Seiten der entstehenden Gleichungen mit einander, so erhalten wir

$$\frac{\partial^n S^1 e^{i\mu}}{\partial a^n} = i^n \Pi(n) S^{n+1} e^{i\mu}.$$

Nun kann weiter $S^1 e^{i\mu}$ in der Form

$$\int_0^1 e^{i(a\sigma - b\sigma^2)} d\sigma$$

oder vermöge der Substitution $\frac{a}{2} - b\sigma = \tau\sqrt{b}$ durch

$$= \frac{ia^2}{e^{4b}} \int_{\frac{a}{2\sqrt{b}} - \sqrt{b}}^{\frac{a}{2\sqrt{b}}} e^{-i\tau^2} d\tau$$

dargestellt werden.

Um diese Funktion n mal nach a zu differentieren, wollen wir zunächst die allgemeine Regel für die n fache Differentiation eines bestimmten Integrales geben.¹⁾ Das bestimmte Integral sei

$$W = \int_a^\beta f(x, \nu) dx,$$

worin x die Integrationsvariable, ν ein Parameter und α und β die von ν abhängigen Grenzen bedeuten mögen. Es handle sich um die n malige

1) Es mag hier bemerkt werden, dass eine von Schlömilch in seinem Compendium der höheren Analysis (3. Auflage Bd. I pag. 425 gegebene Formel unrichtig ist. — Der Irrtum liegt darin, dass Glieder als identisch betrachtet (und gegeneinander gehoben) sind, in denen einerseits zunächst Differentiationen und dann Einführung von Grenzen und in denen andererseits zunächst Einführung der Grenzen und dann Differentiationen zu geschehen hatten. Die folgende Ableitung lässt erkennen, welche Glieder gemeint sind.

Differentiation nach ν . Differentiieren wir zunächst einmal, so ergibt sich, falls die nötige Bedingung

$$\lim_{\Delta \nu = 0} \left\{ \Delta \nu \int_a^\beta f_v''(x, \nu + \varepsilon \Delta \nu) dx \right\} = 0 \quad (0 < \varepsilon < 1)$$

erfüllt ist, — und wir wollen diese sowohl wie die analogen im weiteren Verlauf der Untersuchung in Frage kommenden Bedingungen als erfüllt ansehen —:

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = \int_a^\beta \frac{\partial f(x, \nu)}{\partial \nu} dx + f(\beta, \nu) \frac{\partial \beta}{\partial \nu} - f(\alpha, \nu) \frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$$

oder, wie wir im Interesse einer einheitlichen Bezeichnung schreiben wollen,

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = \int_a^\beta \frac{\partial f(x, \nu)}{\partial \nu} dx + \left| f(x, \nu) \right|_\beta \frac{\partial \beta}{\partial \nu} - \left| f(x, \nu) \right|_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \nu}$$

Differentiieren wir jetzt ein zweites Mal und machen wir die für unseren Zweck genügende Annahme, dass α und β nur linear von ν abhängen, so ergibt sich:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W}{\partial \nu^2} &= \int_a^\beta \frac{\partial^2 f(x, \nu)}{\partial \nu^2} dx + \left| \frac{\partial f(x, \nu)}{\partial \nu} \right|_\beta \frac{\partial \beta}{\partial \nu} - \left| \frac{\partial f(x, \nu)}{\partial \nu} \right|_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial \nu} \left| f(x, \nu) \right|_\beta \frac{\partial \beta}{\partial \nu} - \frac{\partial}{\partial \nu} \cdot \left| f(x, \nu) \right|_\alpha \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \end{aligned}$$

Die Weiterführung der Betrachtung liefert die allgemeine Formel:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n W}{\partial \nu^n} &= \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \cdot \left\{ \left| \frac{\partial^{n-1} f(x, \nu)}{\partial \nu^{n-1}} \right|_\beta + \frac{\partial}{\partial \nu} \left| \frac{\partial^{n-2} f(x, \nu)}{\partial \nu^{n-2}} \right|_\beta + \dots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \nu^{n-1}} \cdot \left| f(x, \nu) \right|_\beta \right\} \\ &\quad - \frac{\partial \alpha}{\partial \nu} \cdot \left\{ \left| \frac{\partial^{n-1} f(x, \nu)}{\partial \nu^{n-1}} \right|_\alpha + \frac{\partial}{\partial \nu} \left| \frac{\partial^{n-2} f(x, \nu)}{\partial \nu^{n-2}} \right|_\alpha + \dots + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \nu^{n-1}} \left| f(x, \nu) \right|_\alpha \right\} \end{aligned}$$

Wenden wir jetzt diese Formel auf unser Beispiel an, so ergibt sich

$$-V\bar{b} \frac{\partial^n (S^1 e^{ik})}{\partial a^n} = \frac{\partial^n e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a^n} \int_{\frac{a}{2V\bar{b}}}^{\frac{a}{2V\bar{b}} - V\bar{b}} e^{-i\tau^2} d\tau$$

und 47) gebrauchte Formel für die Differentiation der zusammengesetzten Funktionen für den Specialfall, dass $h = a^2$ ist und erhalten: ¹⁾

$$\frac{\partial^m F(a^2)}{\partial a^m} = (2a)^m F^{(m)}(a^2) + \frac{m(m-1)}{1} (2a)^{m-2} F^{(m-1)}(a^2) \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} (2a)^{m-4} F^{(m-2)}(a^2) + \dots, \text{ oder,}$$

$$F(a^2) = e^{\frac{ia^2}{4b}} \text{ gesetzt,}$$

$$\frac{\partial^m e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a^m} = e^{\frac{ia^2}{4b}} \left(\frac{ia}{2b}\right)^m \left\{ 1 + \frac{m(m-1)b}{1 \cdot ia^2} + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{ia^2}\right)^2 + \dots \right\}$$

Für $m = 1, 2, 3, 4$ ergibt sich daraus:

$$e^{-\frac{ia^2}{4b}} \frac{\partial e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a} = \frac{ia}{2b}$$

$$e^{-\frac{ia^2}{4b}} \frac{\partial^2 e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a^2} = \left(\frac{ia}{2b}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{2 \cdot 1 \cdot b}{1 \cdot ia^2} \right\}$$

$$e^{-\frac{ia^2}{4b}} \frac{\partial^3 e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a^3} = \left(\frac{ia}{2b}\right)^3 \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 2 \cdot b}{1 \cdot ia^2} \right\}$$

$$e^{-\frac{ia^2}{4b}} \frac{\partial^4 e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a^4} = \left(\frac{ia}{2b}\right)^4 \left\{ 1 + \frac{4 \cdot 3 \cdot b}{1 \cdot ia^2} + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2} \left(\frac{b}{ia^2}\right)^2 \right\}$$

und demnach für $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3, \Sigma_4$:

$$\Sigma_1 = e^{i(a-b)} - 1$$

$$\Sigma_2 = (e^{i(a-b)} - 1) \frac{ia}{2b} + i e^{i(a-b)}$$

$$\Sigma_3 = (e^{i(a-b)} - 1) \left(\frac{ia}{2b}\right)^2 \left\{ 1 + \frac{2 \cdot 1 \cdot b}{1 \cdot ia^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial a} \left\{ (e^{i(a-b)} - 1) \frac{ia}{2b} \right\} + i^2 e^{i(a-b)}$$

$$\Sigma_4 = (e^{i(a-b)} - 1) \left(\frac{ia}{2b}\right)^3 \left\{ 1 + \frac{3 \cdot 2 \cdot b}{1 \cdot ia^2} \right\} + \frac{\partial}{\partial a} \left\{ (e^{i(a-b)} - 1) \left(\frac{ia}{2b}\right)^2 \left(1 + \frac{2 \cdot 1 \cdot b}{1 \cdot ia^2} \right) \right\} \\ + \frac{\partial^2}{\partial a^2} \left\{ (e^{i(a-b)} - 1) \frac{ia}{2b} \right\} + i^3 e^{i(a-b)} \text{ etc.}$$

1) Vergl. Schlömilch, Comp. Bd. II, pag. 6.

Entwickeln wir diese letzteren Ausdrücke und setzen dieselben in die Gleichung

$$S^{n+1}(e^{i\mu}) = e^{-\frac{ia^2}{4b}} \frac{\partial^n e^{\frac{ia^2}{4b}}}{\partial a^n} S^1(e^{i\mu}) - \frac{\Sigma_n}{2b \Pi(n) i^n},$$

so erhalten wir durch Trennung der reellen und imaginären Bestandteile folgende Tabelle:

$$S^2(\cos \mu) = \frac{a}{2b} S^1(\cos \mu) - \frac{\sin(a-b)}{2b}$$

$$S^2(\sin \mu) = \frac{a}{2b} S^1(\sin \mu) + \frac{\cos(a-b) - 1}{2b}$$

$$S^3(\cos \mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2b}\right)^2 S^1(\cos \mu) + \frac{1}{4b} S^1(\sin \mu) - \frac{\sin(a-b)}{4b} \left\{1 + \frac{a}{2b}\right\}$$

$$S^3(\sin \mu) = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{2b}\right)^2 S^1(\sin \mu) - \frac{1}{4b} S^1(\cos \mu) + \frac{\cos(a-b)}{4b} \left\{1 + \frac{a}{2b}\right\} - \frac{a}{8b^2}$$

$$S^4(\cos \mu) = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2b}\right)^3 S^1(\cos \mu) + \frac{a}{8b^2} S^1(\sin \mu) - \frac{\sin(a-b)}{12b} \left\{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{a}{2b} + 1\right\} \\ + \frac{\cos(a-b) - 1}{12b^2}$$

$$S^4(\sin \mu) = \frac{1}{6} \left(\frac{a}{2b}\right)^3 S^1(\sin \mu) - \frac{a}{8b^2} S^1(\cos \mu) + \frac{\cos(a-b)}{12b} \left\{\left(\frac{a}{2b}\right)^2 + \frac{a}{2b} + 1\right\} \\ + \frac{\sin(a-b)}{12b^2} - \frac{1}{12b} \left(\frac{a}{2b}\right)^2 \text{ etc.}$$

Die Kenntniss der Coefficienten der vorliegenden Entwicklung ist hiermit für den Specialfall $c = 0$ auf die Ermittlung der Integrale $S^1(\cos \mu)$ und $S^1(\sin \mu)$ zurückgeführt. Diese selbst sind den sogenannten Fresnel'schen Integralen äquivalent und also, da für diese Tafeln existieren,¹⁾ als bekannt anzusehen. Bei Vorhandensein der beiden ersten Aberrationsglieder würde analog die Kenntniss der Integrale

$$\int_{\sin}^{\cos} (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 + \gamma \sigma^3) d\sigma \quad \text{und}$$

1) Fresnel, Memoire sur la diffraction de la lumière 1818, Oeuvres complètes. I p. 319. Gilbert, Recherches analytiques sur la diffraction de la lumière. Mem. couronn. de l'Acad. de Bruxelles, XXXI 1862. Lindstedt, Zur Theorie der Fresnel'schen Integrale, Wied. Ann. 17. 1882.

$$\int \sigma \frac{\cos}{\sin} (\alpha \sigma + \beta \sigma^2 + \gamma \sigma^3) d\sigma,$$

oder, da das Argument der periodischen Funktion durch eine Substitution auf die Form $\alpha' \sigma' + \gamma' \sigma'^3$ gebracht werden kann, die Kenntniss der Integrale

$$\int \frac{\cos}{\sin} (\alpha \sigma + \beta \sigma^3) d\sigma \quad \text{und} \quad \int \frac{\cos}{\sin} (\alpha \sigma + \beta \sigma^3) \sigma d\sigma$$

erforderlich sein. Da diese ausser der Grenze noch einen Parameter enthalten, also von zwei Argumenten abhängen, so ist es nicht praktisch Tabellen für dieselben anzulegen; man wird vielmehr, da diese Argumente nur von der Gestalt und den Dimensionen des wirksamen Theiles der Wellenfläche oder anders ausgedrückt von den Constructionselementen eines Systemes abhängen, für jeden einzelnen Fall die Werte derselben berechnen. Uebrigens ist das erste der Integrale mit dem von Airy bei Gelegenheit der Theorie des Regenbogens berechneten identisch und also infolge dieser und zum Teil einer Arbeit von Stokes¹⁾ als bekannt anzusehen. —

Wir wollen jetzt noch eine dritte Entwicklung unserer X und Z geben, deren Benutzung allerdings vor der vorausgegangenen keine Vorzüge hat, ausser insofern, als hierzu die Kenntniss der Werte der Besselschen Funktionen nicht notwendig ist. Um die vorkommenden Coefficienten mit den bereits gegebenen in einfacher Weise zu verbinden, wollen wir eine für alle Elementarstrahlen identische und demnach für das Intensitätsresultat gleichgiltige Phasenveränderung vornehmen, nämlich die Argumente der Cosinus und Sinus um $\frac{k_0}{2} + \frac{k_1}{4} + \frac{k_2}{6}$ vermindern. Wir kommen damit auf unsere ursprünglichen Ausdrücke

$$\begin{aligned} X_1 \\ X_2 \end{aligned} = \int_0^1 J_0(l\sqrt{\sigma}) \frac{\cos}{\sin} \left(\frac{k_0}{2} \sigma + \frac{k_1}{4} \sigma^2 + \frac{k_2}{6} \sigma^3 \right) d\sigma \quad \text{und}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{(m)} \\ Z_2^{(m)} \end{aligned} = \int_0^1 J_1(l\sqrt{\sigma}) \cdot \sqrt{\sigma} \cdot \sigma^{m-1} \frac{\sin}{\cos} \left(\frac{k_0}{2} \sigma + \frac{k_1}{4} \sigma^2 + \frac{k_2}{6} \sigma^3 \right) d\sigma \quad \text{zurück.}$$

1) Airy, loc. coll.; Stokes, On the numerical calculation of a class of definite Integrals and infinite Series. Trans. of the Cambr. Phil. Soc. Vol. IV, Part I oder Math. and Phys. Papers Vol. II pag. 329.

Setzen wir nun in diese die für $J_0(l\sqrt{\sigma})$ und $J_1(l\sqrt{\sigma})$ geltenden Potenzreihen:

$$J_0(l\sqrt{\sigma}) = 1 - \frac{l^2 \sigma}{2 \cdot 2} + \frac{l^4 \sigma^2}{2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 4} - \frac{l^6 \sigma^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(l^2 \sigma)^n}{2^{2n} (\Pi(n))^2}$$

$$J_1(l\sqrt{\sigma}) = \frac{l\sqrt{\sigma}}{2} \left\{ 1 - \frac{l^2 \sigma}{2 \cdot 4} + \frac{l^4 \sigma^2}{2 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6} - \frac{l^6 \sigma^3}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} \dots \right\}$$

$$= \frac{l\sqrt{\sigma}}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(l^2 \sigma)^n}{2^{2n} \Pi(n) \cdot \Pi(n+1)},$$

so ergibt sich bei gliedweiser Integration (diese ist hier gestattet):

$$\begin{aligned} X_1 \\ X_2 \end{aligned} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l^{2n}}{2^{2n} (\Pi(n))^2} \int_0^1 \sigma^n d\sigma \cos \left(\frac{k_0}{2} \sigma + \frac{k_1}{4} \sigma^2 + \frac{k_2}{6} \sigma^3 \right)$$

$$\begin{aligned} Z_1^{(m)} \\ Z_2^{(m)} \end{aligned} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l^{2n+1}}{2^{2n+1} \Pi(n) \cdot \Pi(n+1)} \int_0^1 \sigma^{m+n} \frac{\sin \left(\frac{k_0}{2} \sigma + \frac{k_1}{4} \sigma^2 + \frac{k_2}{6} \sigma^3 \right)}{\cos \left(\frac{k_0}{2} \sigma + \frac{k_1}{4} \sigma^2 + \frac{k_2}{6} \sigma^3 \right)} d\sigma$$

Da weiter nach einer früheren Formel (pag. 65)

$$\int_0^1 (1 - \sigma)^n e^{i\mu} d\sigma = \Pi(n) S^{n+1}(e^{i\mu}),$$

also auch

$$\int_0^1 \sigma^n e^{i(a\sigma - b\sigma^2 + c\sigma^3)} d\sigma = \Pi(n) S^{n+1} e^{i\mu}$$

ist, so erhalte ich:

$$X_1 \\ X_2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l^{2n}}{2^{2n} \Pi(n)} S^{n+1} \cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma)^2 + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma)^3 \right\}$$

$$\begin{aligned} Z_1^{(m)} \\ Z_2^{(m)} \end{aligned} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l^{2n+1} \Pi(n+m)}{2^{2n+1} \Pi(n) \Pi(n+1)} S^{n+m+1} \frac{\sin \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma)^2 + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma)^3 \right\}}{\cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1 - \sigma) + \frac{k_1}{4} (1 - \sigma)^2 + \frac{k_2}{6} (1 - \sigma)^3 \right\}}$$

Wie man sieht, hat man bloss an Stelle von a, b, c in unseren früheren Formeln $\frac{k_0}{2}, -\frac{k_1}{4}, \frac{k_2}{6}$ zu substituieren, um zu den Ausdrücken für S^{n+1} in der vorliegenden Entwicklung zu gelangen.¹⁾

1) Diese Substitution kann unter bestimmten Umständen eine Identität sein. Da nämlich a, b, c in der Weise von k_0, k_1, k_2 abhängen, dass $a = \frac{k_0 + k_1 + k_2}{2}, b = \frac{k_1 + 2k_2}{4}, c = \frac{k_2}{6}$, so

IV. Allgemeinere Feststellungen über die betrachtete Lichtwirkung.

Obwohl auch jetzt die numerische Rechnung bisweilen noch ziemlich weitläufig ist, wollen wir uns doch mit diesen drei Entwicklungen begnügen und uns den ausgezeichneten Werten der Intensität zuwenden. — Die X und Z und demnach auch die Intensität hängen ersichtlich von den Grössen l, k_0, k_1, k_2 oder l, a, b, c ab. Da diese ihrerseits Funktionen der Oeffnung, der Brennweite, der Entfernung eines Bildpunktes von der Axe und von der Fokal-Ebene der Centralstrahlen und schliesslich der Aberrationsglieder sind, so lassen sich infolge dieser Mannigfaltigkeit in sehr verschiedenen Richtungen Untersuchungen bezüglich ausgezeichneter Werte der Intensität machen; es ist jedoch andererseits zu bedenken, dass infolge des rein physikalischen Charakters des Problem es eine Reihe von Eigentümlichkeiten kein hervorragenderes Interesse haben.

Was speciell die Frage nach den Maximis und Minimis der Intensität betrifft, so können wir zunächst einmal nach der Lage derselben für einen bestimmten Typus und eine gegebene Bildebene fragen und erhalten für die Bestimmung die Gleichung

$$\frac{\partial J}{\partial l} = 0, \text{ oder wegen } J = X_1^2 + X_2^2 + \left(\frac{R}{f}\right)^2 (Z_1^2 + Z_2^2)$$

$$X_1 \frac{\partial X_1}{\partial l} + X_2 \frac{\partial X_2}{\partial l} + \left(\frac{R}{f}\right)^2 \left\{ Z_1 \frac{\partial Z_1}{\partial l} + Z_2 \frac{\partial Z_2}{\partial l} \right\} = 0.$$

Benutzen wir weiter für die Bildung der hierin vorkommenden Differentialquotienten die bekannten Relationen

braucht für die Identität von a, b, c mit $\frac{k_0}{2}, -\frac{k_1}{4}, \frac{k_2}{6}$ nur die einzige Bedingung $k_1 + k_2 = 0$ erfüllt zu sein. Dies besagt, wenn wir auf die Bedeutung von k_1 und k_2 zurückgehen, im wesentlichen, dass $4 \left(\frac{R}{f}\right)^4 \varepsilon_1 + 6 \left(\frac{R}{f}\right)^6 \varepsilon_2 = 0$ sein muss, oder dass für die Randpunkte des benutzten Teiles der Wellenfläche unsere frühere Grösse $\mu = 0$ sein muss; da aber diese für die Neigung der vorausgesetzten Wellenfläche gegenüber der Schmiegunskugel im Symmetriepunkte bestimmend war und mit dieser sich annullierte, so liefert die obige Substitution für die S^{n+1} das nämliche Resultat, falls die von dem Bildpunkte der Centralstrahlen nach dem Rande der Oeffnung gezogenen Radien auf der Wellenfläche senkrecht stehen.

$$\frac{\partial}{\partial l} (l^{-\nu} J_\nu) = -l^{-\nu} J_{\nu+1} \quad \text{und}$$

$$\frac{\partial}{\partial l} (l^{+\nu} J_\nu) = l^{+\nu} J_{\nu-1},$$

so erhalten wir (aus den Gleichungen pag. 43, 44 und 59) für

$$\frac{\partial X_1}{\partial l} \quad \text{und} \quad \frac{\partial X_2}{\partial l}$$

die einfachen Ausdrücke:

$$\frac{\partial X_1}{\partial l} = -2 \frac{J_2(l)}{l} D^0 \cos \mu + 2^2 \frac{J_3(l)}{l^2} D^1 \cos \mu - 2^3 \frac{J_4(l)}{l^3} D^2 \cos \mu$$

$$\frac{\partial X_2}{\partial l} = -J_1(l) S^1 \left(\frac{\cos \mu}{\sin \mu} \right) + \frac{l J_0(l)}{2} S^2 \left(\frac{\cos \mu}{\sin \mu} \right) + \frac{l^2 J_1(l)}{2^2} S^3 \left(\frac{\cos \mu}{\sin \mu} \right) + \dots$$

während aus der dritten Entwicklung (pag. 184) sich für diese Größen die Formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n l^{2n-1}}{2^{2n-1} \Gamma(n-1)} S^{n+1} \cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1-\sigma) + \frac{k_1}{4} (1-\sigma)^2 + \frac{k_2}{6} (1-\sigma)^3 \right\}$$

ergeben. Um für die Differentialquotienten der Z Componenten ebenfalls einfache Ausdrücke zu bekommen, müssen wir die bezüglichen Ausdrücke pag. 44, 45 in der durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial l} = l \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{f}{l} \right) + \frac{f}{l}$$

angedeuteten Weise, und die pag. 60 nach dem Schema

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial (fl)}{\partial l} - \frac{f}{l}$$

behandeln. Es ergibt sich für die Glieder der Z :

$$\frac{\partial Z_1^{(m)}}{\partial l} = -2 \frac{J_3(l)}{l} D^0 \left(\sigma^{m-1} \frac{\sin \mu}{\cos \mu} \right) + 2^2 \frac{J_4(l)}{l^2} D^1 \left(\sigma^{m-1} \frac{\sin \mu}{\cos \mu} \right) - \dots + \frac{1}{l} \cdot \frac{Z_1^{(m)}}{Z_2^{(m)}}$$

und

$$\frac{\partial Z_1^{(m)}}{\partial l} = J_0(l) S^1\left(\sigma^m \frac{\sin \mu}{\cos \mu}\right) + \frac{l}{2} J_1(l) S^2\left(\sigma^m \frac{\sin \mu}{\cos \mu}\right) + \dots - \frac{Z_1^{(m)}}{l}$$

$$\frac{\partial Z_2^{(m)}}{\partial l}$$

Für die 3. Entwicklung erhalten wir durch gliedweise Differentiation:

$$\frac{\partial Z_1^{(m)}}{\partial l} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1) l^{2n} \Pi(n+m)}{2^{2n+1} \cdot \Pi(n) \cdot \Pi(n+1)} S^{m+m+1} \frac{\sin \left\{ \frac{k_0}{2} (1-\sigma) + \frac{k_1}{4} (1-\sigma)^2 + \frac{k_2}{6} (1-\sigma)^3 \right\}}{\cos \left\{ \frac{k_0}{2} (1-\sigma) + \frac{k_1}{4} (1-\sigma)^2 + \frac{k_2}{6} (1-\sigma)^3 \right\}}$$

Allgemeinere Schlüsse aus diesen Formeln zu ziehen, dürfte bei der Complicirtheit der vorkommenden Ausdrücke ziemlich schwierig sein; dieselben haben indess die Bedeutung, bei der Durchrechnung die Orte der Maxima und Minima mit unvergleichlich grösserer Schärfe zu liefern, als dies die Berechnung des Intensitätsausdruckes thun kann. Eine Begründung dieser Bemerkung ist überflüssig.

Wir könnten nun weiter die Frage stellen, wo liegen bei gegebener Gestalt und Grösse der Wellenfläche, falls ich die Bildebene (δ oder im wesentlichen k_0) nicht als fest voraussetze, die Punkte kleinster und grösster Intensität, mit anderen Worten, wo liegen die Stellen grösster und kleinster Concentration der Energie im Raume. Zur Beantwortung derselben hätten wir aus den Gleichungen

$$\frac{\partial J}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial \delta} = 0$$

oder mit hinreichender Näherung

$$\frac{\partial J}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial k_0} = 0$$

ρ und δ zu berechnen; es bedarf indess kaum der Andeutung, dass selbst für die einfachsten Verhältnisse eine allgemeinere Bestimmung dieser Werte die grössten Schwierigkeiten hat und auch hier nur eine weitgehende numerische Durchführung des Problemes die erforderlichen Aufschlüsse gewähren wird.

Ganz ähnlich steht es mit der Frage nach der Pointierungsebene

und dem Auflösungsvermögen bei vorgegebener Construction. Was die erstere anbelangt, so ist zunächst zu bemerken, dass eine präzise Formulierung der Eigenschaften dieser Einstellungsebene von vorneherein überhaupt nicht gegeben werden kann, und dass andererseits, falls wir auch willkürlich eine Definition festsetzen würden, wir doch nur auf dem Wege numerischer Rechnung eine Lagebestimmung erhalten dürften. Falsch würde es auf jeden Fall sein, die relative Grösse des centralen Lichtscheibchens¹⁾ als Charakteristikum für die Einstellungsebene zu benutzen, da die Grösse und vor allem die Intensität der folgenden Ringe unbedingt mit berücksichtigt werden muss. Aus diesem Grunde haben die leicht aufzustellenden Bedingungen für das Minimum des centralen Scheibchens

$$\frac{\partial J}{\partial l} = 0, \quad \frac{\partial^2 J}{\partial l \partial \delta} = 0$$

keine besondere Bedeutung. Da weiter die Lichtverteilung in der „Einstellungsebene“ im wesentlichen das Auflösungsvermögen bedingt, so sind auch alle Fragen, die mit diesem zusammenhängen, nur durch numerische Rechnung und eine Art subjektiver Beurteilung zu erledigen.

Von allgemeineren Feststellungen sind dagegen zwei ohne weiteres möglich. Die erstere derselben ist negativer Natur und besagt, dass in unserem allgemeinen Falle, also bei Vorhandensein von Aberrationen und Ausdehnung der Betrachtung auf Bildpunkte ausserhalb der Fokalebene der Centralstrahlen eine Proportionalität zwischen den „Dimensionen“ der Beugungserscheinung und der Wellenlänge *ceteris paribus* nicht mehr besteht. Die genannte Proportionalität erklärt sich bei dem Typus der Fraunhofer'schen Beugungserscheinungen, wo also k_0, k_1, k_2 etc. = 0 sind, bekanntlich daraus, dass nur noch das Verhältniss $\frac{\varrho}{\lambda}$ in den Formeln vorkommt. In unserem Falle ist, wie man sieht, dies nicht mehr richtig; λ tritt auch ausser in Verbindung mit ϱ auf.

Die zweite allgemeinere Feststellung bezieht sich auf die Möglichkeit des gleichen Charakters der Lichtwirkungen²⁾ zweier Wellenflächen. Denken

1) Unter dem centralen Lichtscheibchen wollen wir den Bereich bis zum ersten Minimum verstehen, obwohl dieser unter Umständen sehr wenig Bedeutung haben kann.

2) Die Lichtwirkung soll bloss durch Amplitude und Phase, oder erstere allein charakterisiert sein.

wir uns nämlich zwei Wellenflächen, so ergeben sich für dieselben aus den Grundformeln gleiche Lichtwirkungen offenbar dann, falls 1) k_0, k_1, k_2 für beide Flächen gleiche Werte haben, 2) das gleiche für den Faktor von ρ in l und 3) den Faktor vor den Doppelintegralen pag. 37 der Fall ist. Es müssen also die Grössen

$$\frac{R^2}{(f+\delta)\lambda}, \frac{R}{\lambda(f+\delta)}, \frac{\delta f}{\lambda(f+\delta)} \left(\frac{R}{f}\right)^2, \frac{1}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^4 \left(\frac{1}{4} \frac{\delta f}{f+\delta} + \varepsilon_1 \frac{f^2}{f+\delta}\right), \text{ etc.}$$

in beiden Fällen dieselben sein. Man erhält daraus ohne weiteres, dass auch $R_1 \frac{\delta}{f}$, und λf identisch sein müssen. Was $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ anbetrifft, so lässt sich für jede derselben natürlich ebenfalls eine Relation angeben; der Uebersichtlichkeit halber wollen wir uns indess auf den Fall beschränken, wo mit hinreichender Genauigkeit

$$\frac{k_1}{4} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^4 \varepsilon_1 f, \quad \frac{k_2}{6} = \frac{\pi}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^6 \varepsilon_2 f \dots$$

gesetzt werden kann, was nach unseren früheren Ausführungen für kleinere Oeffnungswinkel,¹⁾ z. B. solche wie beim üblichen Fernrohrtypus, hinreichend erfüllt ist. Es muss demnach $\frac{\varepsilon_1}{f^2}, \frac{\varepsilon_2}{f^4} \dots$ ebenfalls gleich sein. —

Die Bedingungen unter denen zwei Instrumente in den zur optischen Axe senkrechten Ebenen gleiche Lichtwirkungen ergeben, können wir demnach in zwei Arten zerlegen, nämlich einerseits solche, die von der Construction des Instrumentes abhängen, und andererseits solche, die sich auf die Art der Zuordnung der zur optischen Axe senkrechten Ebenen beziehen. Die Bedingungen der ersten Art besagen, dass bei gleicher linearer Grösse der Oeffnung die Brennweiten sich umgekehrt wie die Wellenlängen der benutzten Lichtart verhalten müssen, und dass die Aberrationsconstanten $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \dots$ den Quadraten der ersten, zweiten, .. Potenz der Brennweite proportional sein müssen. Die Bedingung der zweiten Art ordnet die Bildebenen in der Weise zu, dass sich je zwei entsprechen, die der Brennweite proportionale Entfernungen von den Fokalebene der Centralstrahlen haben. — Stellen wir speciell noch die Forderung gleicher Wellenlänge,

1) Für grössere Oeffnungswinkel treten nur unbedeutende Modificationen ein.

also gleicher physiologischer Wirkung, so fallen die beiden Fälle zusammen. — Die oben gestellte Bedingung vollständiger Gleichheit der Schwingung nach Amplitude und Phase ist offenbar sehr eng; begnügen wir uns deshalb einmal mit der Proportionalität der Amplitude unter Wahrung der „Dimensionen“ der Beugungserscheinung. Es fällt dann die erste Bedingung, nämlich die der Konstanz des Ausdruckes $\frac{R^2}{(f + \delta)\lambda}$ hinweg und die übrigen fordern, indem wir uns wiederum auf den obigen Fall, dass δ gegenüber f vernachlässigt werden kann, beschränken, die Gleichheit der Ausdrücke $\delta \left(\frac{R}{f}\right)$, $\delta \lambda$, $\varepsilon_1 f$, $\varepsilon_2 f \dots$. Ohne diese Bedingung im allgemeinen Falle zu betrachten, wollen wir sofort λ als gleich auffassen und erhalten dann den Satz: Zwei Objektive liefern für die gleiche Lichtart der Phase nach gleiche, der Amplitude nach proportionale Lichtwirkungen, falls 1) das Oeffnungsverhältniss dasselbe ist, 2) sämtliche Aberrationsconstanten den Brennweiten umgekehrt proportional sind und 3) je zwei Bildebenen in gleicher Entfernung von der Fokalebene der Centralstrahlen sich correspondieren sollen. In diesem Falle herrscht also auch für die Lichtwirkung in einer durch die Axe gehenden Ebene Proportionalität und die Zuordnung kann demnach sozusagen verzerzungsfrei geschehen, mit anderen Worten, die Dimensionen der Beugungserscheinung sind hier im (in betracht kommenden) Raume gewahrt.

Wir können nun noch weiter gehen und nur eine Proportionalität der Dimensionen zweier Beugungserscheinungen nebst Proportionalität der Intensitäten in den Punkten je zweier zugeordneter zur Axe senkrechter Ebenen¹⁾ fordern. Es wäre dann offenbar nur die Gleichheit der Ausdrücke

$$\frac{\delta}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^2, \frac{f}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^4 \varepsilon_1, \frac{f}{\lambda} \left(\frac{R}{f}\right)^6 \varepsilon_2 \dots$$

oder für gleiche Wellenlängen die von

$$\delta \left(\frac{R}{f}\right)^2, f \left(\frac{R}{f}\right)^4 \varepsilon_1 \dots$$

nötig, d. h. es müssten solche Ebenen als correspondierend betrachtet werden, deren Entfernungen vom Fokalfunkte der Centralstrahlen den

1) Nebst gleicher Phase.

Quadraten der Oeffnungswinkel umgekehrt proportional sind, und ausserdem noch Proportionalität der Aberrationsconstanten zu gewissen Constructionselementen bestehen.

Um die gegebenen drei Fälle, von denen der erste der speciellste, der dritte der allgemeinste ist, noch einmal anschaulich zu machen, können wir sagen, dass im ersten vollkommene Gleichheit der (mechanisch gemessenen) Intensität herrscht, dass im zweiten dies durch eine (natürlich relativ gleiche) Veränderung der Amplitude in der ursprünglichen Wellenfläche und dass im dritten dies durch diese letztere Operation und einen geometrischen Vergrösserungs- oder Verkleinerungsprocess erreicht werden kann.

Wenn die bisherige Discussion die Gleichheit der k^s sowohl nach Grösse wie Vorzeichen zur Grundlage hatte, so ist andererseits jedoch auch unmittelbar einzusehen, dass für die Erzielung gleicher Lichtwirkungen, sofern man nur die Intensität berücksichtigt, eine Gleichheit dem Vorzeichen nach gar nicht erforderlich ist. Untersuchen wir deshalb einmal den Fall entgegengesetzter Vorzeichen der k^s und beschränken wir uns dabei der Uebersichtlichkeit halber gerade wie bisher auf kleine Oeffnungswinkel. — Wie man sieht, müssen dann sowohl δ wie die ε^s für die verglichenen Fälle entgegengesetztes Vorzeichen haben. Nehmen wir dies an, so gelten alle vorigen Betrachtungen. Das entgegengesetzte Vorzeichen von δ besagt, dass von den zwei verglichenen Lichtwirkungen die eine innerhalb, die andere ausserhalb der betreffenden Fokalweite der Centralstrahlen liegt, das entgegengesetzte Vorzeichen der ε^s , dass die Wellenflächen sich insofern unterscheiden, als allen nach vorn (im Sinne der Lichtbewegung) durchgebogenen Partien der einen nach hinten durchgebogene der anderen entsprechen und umgekehrt, wobei die Verbiegung von der Schmiegunungskugelfläche ihren Ausgangspunkt nehmen soll. Für den Specialfall, dass beide Objektive gleiche Brennweite und Oeffnung haben, können wir auch sagen, dass entgegengesetzten Aberrationen der Intensität nach gleiche Lichtwirkungen entsprechen, falls man nur den Sinn der Durchwanderung der Bildebenen verschieden nimmt. Von den früher beschriebenen Typen (p. 18) ist also nur die Hälfte zu untersuchen, was in anbetracht der weitläufigen numerischen Rechnung ein grosser Gewinn ist.

Hiermit wollen wir schliessen, eine numerische Rechnung soll in dem vorliegenden Aufsatz nicht gegeben werden, weil dieselbe einerseits nur dann einen Wert hätte, falls sie bis zu einer beträchtlichen Ausdehnung durchgeführt würde, und weil andererseits der Umfang dieser Abhandlung in diesem Falle noch erheblich vermehrt würde; wohl aber soll diese numerische Untersuchung in allernächster Zeit erfolgen.

Jena, Februar 1893.