BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE, HEFT 93

DETLEF LAUGWITZ

Beiträge zur affinen Flächentheorie mit Anwendungen auf die allgemein-metrische Differentialgeometrie

Mit 8 Figuren

Vorgelegt von Herrn Frank Löbell am 7. März 1958

MÜNCHEN 1959
VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG MÜNCHEN

Als Habilitationsschrift auf Empfehlung der Fakultät für Allgemeine Wissenschaften
der Technischen Hochschule München
gedruckt mit Unterstützung der Deutschen Forschungsgemeinschaft

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

WILHELM SÜSS ZUM GEDENKEN

INHALTSÜBERSICHT

EINLEITUNG

Systematische differentialgeometrische Untersuchungen zu den Geometrien des Erlanger Programms liegen bisher, außer für den klassischen, bewegungsinvarianten Fall, vor allem vor für die volle projektive Gruppe und für die Gruppe der inhaltstreuen Affinitäten (BLASCHKE [1]).[1] Hingegen hat die Gruppe der homogenen Affinitäten nur gelegentliches Interesse gefunden (SALKOWSKI [1], MAYER [1]), was vor allem darauf zurückzuführen sein dürfte, daß die Resultate dieser Geometrie nicht translationsinvariant sind und daher, wie es zunächst scheinen mag, keine unmittelbar anschauliche geometrische Bedeutung haben. Nun ist diese Gruppe der homogenen Affinitäten aber gerade die Automorphismengruppe eines Vektorraumes, und die Geometrie dieser Gruppe – die „zentralaffine" oder „radialaffine" Geometrie – kann daher auch aufgefaßt werden als Geometrie im Vektorraum. Vektorräume aber sind für die Geometrie von großer Bedeutung, weil sie als Tangentialräume differenzierbarer Mannigfaltigkeiten auftreten. Insbesondere erscheinen Hyperflächen im Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit als Eichflächen in der allgemein-metrischen Differentialgeometrie, u. a. der FINSLERschen und der CARTANschen Geometrie. Eine zentralaffine Differentialgeometrie der Hyperflächen muß also für diese Geometrien von Interesse sein.

Auch im Hinblick auf diese Anwendungen wird in der vorliegenden Arbeit die Differentialgeometrie der Hyperflächen in Vektorräumen aufgebaut, und zwar in einer von den früheren Darstellungen von SALKOWSKI und MAYER wesentlich verschiedenen Weise und ohne Dimensionsbeschränkungen (Kapitel II). Als grundlegend dafür erweisen sich die oskulierenden Quadriken der Hyperfläche, die wir in Kapitel I ausführlich behandeln. Obwohl spezielle oskulierende Quadriken seit DARBOUX und LIE in der Affingeometrie eine hervorragende Rolle spielen und W. HAACK [1] solche Quadriken in der affinen Liniengeometrie wesentlich benutzte, scheint bisher nicht bemerkt worden zu sein, daß sich die ganze Affingeometrie der Hyperflächen auf oskulierende Quadriken gründen läßt. Das gilt übrigens nicht nur für die zentralaffine Geometrie, sondern auch für die inhaltstreu-affine Geometrie, die uns hier nur am Rande interessiert; wir werden das in I, § 3 ausführen. In der zentralaffinen Geometrie führen die oskulierenden Quadriken mit festem Mittelpunkt O auf geometrischem Wege zu einer von der Hyperfläche erzeugten RIEMANNschen Metrik im Vektorraum, die in ganz anderem Zusammenhange von E. R. LORCH [1] gefunden worden ist und die die Anwendungsmöglichkeiten der zentralaffinen Geometrie erweitert. Neben der die Metrik erzeugenden „Eichfläche" E kann nun nämlich eine zweite Hyperfläche F (oder auch ein anderes geometrisches Gebilde, z. B. eine Kurve) als Untermannigfaltigkeit dieses RIEMANNschen Raumes betrachtet werden. Diese zentralaffine Differentialgeometrie der Flächenpaare bildet eine direkte Verallgemeinerung der elementaren Flächentheorie, die sich ergibt, wenn E die Einheitssphäre einer euklidischen Geometrie ist.

Neben Anwendungen auf die allgemein-metrische Differentialgeometrie (Kapitel III) behandeln wir in der vorliegenden Arbeit noch das Raumproblem mit den hier bereitgestellten Hilfsmitteln (Kapitel III, § 4).

---

[1] Zahlen in eckigen Klammern beziehen sich auf das Literaturverzeichnis am Ende der Arbeit.

Der uns interessierende Sachverhalt (Hyperfläche in einem Vektorraum) tritt auch in der Funktionalanalysis auf: Ein BANACH-Raum ist ein (i. a. unendlichdimensionaler, vollständiger) Vektorraum mit einer konvexen Eichhyperfläche. Viele Teile der vorliegenden Arbeit geben auch Beiträge zur Differentialgeometrie der BANACH-Räume. Es ist im Interesse der Kürze darauf verzichtet worden, dies jeweils im einzelnen auszuführen; diejenigen Abschnitte, die auch für unendlichdimensionale reelle Vektorräume gelten, sind durch einen Stern * gekennzeichnet, und wenn in einem Abschnitt nur einzelne Sätze auch für den unendlichdimensionalen Fall gelten, so sind diese Sätze in gleicher Weise hervorgehoben. Die Beweise gelten dann stets auch für unendlichdimensionale Räume, wobei lediglich die folgende Uminterpretation der Formeln vorzunehmen ist: Alle Differentiationen sind im Sinne der FRÉCHETschen verallgemeinerten Differentialrechnung zu verstehen, und die Formeln der Tensorrechnung sind in dem Sinne basisfrei aufzufassen, wie das in früheren Arbeiten (LAUGWITZ [1], [2]) ausführlich begründet worden ist. Übrigens kann diese Interpretation der Tensorrechnung auch im endlichdimensionalen Fall angewendet werden und bietet dann gegenüber der üblichen Auffassung den begrifflichen Vorteil eines basisfreien Rechnens mit Vektoren und Tensoren.[1]

---

[1] Herrn F. LÖBELL verdanke ich den Hinweis auf die bisher anscheinend unbemerkt gebliebene Tatsache, daß bereits GRASSMANN [1] im Besitz eines weitreichenden Differentialkalküls in Vektorräumen war und also als Vorläufer von GÂTEAUX, FRÉCHET u. a. in der Entwicklung der verallgemeinerten Differentialrechnung anzusehen ist.

KAPITEL I.

DIE OSKULIERENDEN QUADRIKEN EINER HYPERFLÄCHE

Unsere Betrachtungen beruhen wesentlich auf den eine Fläche in einem Punkte in zweiter Ordnung berührenden (oskulierenden) Quadriken. Wir untersuchen in diesem Kapitel solche Quadriken und beschäftigen uns besonders mit ihren Schnitten durch die zur Tangentialebene parallelen Hyperebenen. Dabei werden sich einige neue Beziehungen zur Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten ergeben.

Wir setzen hier stets voraus, daß die betrachteten Hyperflächen viermal stetig differenzierbar seien.

*§ 1. Die Definition der oskulierenden Quadriken einer Hyperfläche

Zu jedem Raumpunkte M, der nicht in der Tangentialhyperebene $T(P)$ der Fläche E im Punkte P gelegen ist, gibt es genau eine Quadrik $Q_M(P)$, welche M zum Mittelpunkt hat und E in P oskuliert. Dabei darf M auch ein Fernpunkt sein. Aus der Definition der zweiten Fundamentalform der bewegungsinvarianten Differentialgeometrie folgert man sofort, daß die Schnitte von $Q_M(P)$ mit zu $T(P)$ parallelen Hyperebenen homothetisch zur DUPINschen Inikatrix von E in P sind, weil in die zweite Fundamentalform nur die Ableitungen bis zur zweiten Differentiationsstufe eingehen.[1]

Eine für uns wichtige analytische Darstellung der oskulierenden Quadrik $Q_M(P)$ findet sich im wesentlichen bei DELENS [1]. Sie ergibt sich in folgender Weise. Man definiere eine reellwertige Funktion $F(Y)$ für alle $Y = M + a(X—M)$ im Innern eines Kegels mit Spitze M durch

$$F(Y) = F(M + a\cdot(X—M)) = a$$

für $a > 0$ und alle X auf der Fläche E, die in einer hinreichend kleinen Umgebung von P liegen. Dann gilt:

I. 1. 1.[2] *Die oskulierende Quadrik* $Q_M(P)$ *ist gegeben durch* $g_{ik}(P)(Y^i — M^i)(Y^k — M^k) = 1$ mit

$$g_{ik}(P) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(P)}{\partial X^i \partial X^k}.$$

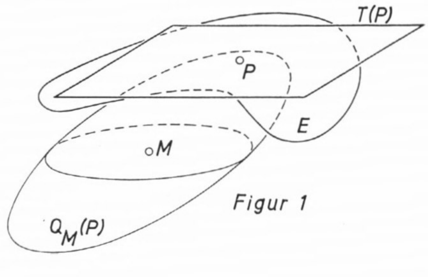
---

[1] Alle diese sehr einfach zu beweisenden Tatsachen sind bei SCHEFFERS [1] ausgeführt; die Verallgemeinerung auf beliebige Raumdimensionen ergibt sich ohne weiteres. – Übrigens hat bereits DUPIN [1] selbst seine Indikatrix über die zur Tangentialebene parallelen Schnitte eines oskulierenden Paraboloides eingeführt. Man vergleiche dazu auch KRUPPA [1].

[2] Sätze, Hilfssätze usw. werden in folgender Weise numeriert: II.3.5 bedeutet den fünften Satz in § 3 von Kapitel II.

Der Beweis läßt sich am einfachsten so führen, daß man $g_{ik}(P)$ derart bestimmt, daß

$$G(Y) = F^2(Y) - g_{ik}(P)(Y^i - M^i)(Y^k - M^k)$$



Figur 1

für $Y = P$ von möglichst hoher Ordnung verschwindet. Nach einfachen Umrechnungen mit Hilfe der EULERschen Homogenitätsrelationen ergibt sich die Beziehung

$$G(Y) = \left\{ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2(P)}{\partial X^i \partial X^k} - g_{ik}(P) \right\} (Y^i - M^i)(Y^k - M^k) + R,$$

wobei das Restglied R von mindestens dritter Ordnung in $Y - M$ ist. Soll also $G(Y)$ in $Y = P$ von zweiter Ordnung verschwinden, so erhält man als eindeutige Festlegung von (symmetrischen) $g_{ik}(P)$ tatsächlich die behauptete Beziehung.

Schneidet man E und $Q_M(P)$ mit einer p-dimensionalen Ebene H durch M und P ($2 \leqq p$), so erhält man aus der soeben bewiesenen Darstellung (I.1.1) der oskulierenden Quadrik:

I.1.2. *Die Quadrik $H \cap Q_M(P)$ hat den Mittelpunkt M und oskuliert die in E gelegene $(p-1)$-dimensionale Fläche $H \cap E$ im Punkte P.*

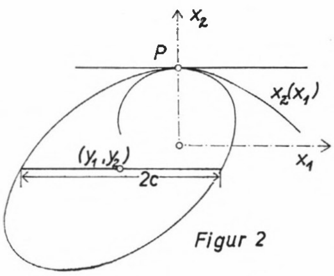
§ 2. Die ebenen Schnitte der oskulierenden Quadriken

Wir wollen in diesem Abschnitt die zur Tangentialebene parallelen Mittelpunktsschnitte der oskulierenden Quadriken genauer untersuchen. Über die lange bekannte Tatsache, daß ein solcher Schnitt homothetisch zur DUPINschen Indikatrix ist, hinaus wollen wir jetzt folgende schärfere Aussage beweisen:

***I.2.1.** *Sei ε eine zur Tangentialhyperebene $T(P)$ parallele Hyperebene und seien $Q_M(P)$, $Q_{M'}(P)$ oskulierende Quadriken, deren Mittelpunkte M, M' in ε liegen. Dann sind die Schnittfiguren q, q' von $Q_M(P), Q_{M'}(P)$ mit ε zueinander kongruent; q wird durch diejenige Translation von ε in q' übergeführt, welche M in M' überführt.*

Beweis. Wir wissen aus § 1 bereits, daß die beiden Schnittfiguren q, q' ähnlich und ähnlich gelegen sind. Daher wird der Beweis geführt sein, wenn gezeigt ist, daß die Schnittstrecken von q, q' mit der Geraden MM' zueinander kongruent sind. Diese Schnittstrecken dürfen auch imaginär sein; lediglich den Fall, daß MM' Asymptotenrichtung von q ist, müssen wir zunächst ausschließen und später gesondert behandeln. Es kommt also jetzt nur darauf an, diejenigen Kurven zweiter Ordnung zu betrachten, die in der Ebene PMM' liegen, die Schnittkurve dieser Ebene mit der Fläche im Punkte P oskulieren und M, M' als Mittelpunkte haben. Nach der Bemerkung I.1.2 werden diese Kegelschnitte nämlich gerade die Schnittkurven der Ebene PMM' mit den beiden Quadriken $Q_M(P)$ und $Q_{M'}(P)$ sein. Wir führen ein cartesisches Koordinatensystem (x_1, x_2) in dieser Ebene so ein, daß für die Schnittkurve der Ebene mit der Fläche eine Gleichung

$$x_2 = x_2(x_1)$$



Figur 2

besteht mit

(A) $$x_1(P) = 0,\ x_2(P) = 1,\ x_2'(0) = 0,\ x_2''(0) = -1.$$

Diese Annahme ist möglich, wenn die Schnittkurve in P nicht stationäre Krümmung hat, was ausgeschlossen ist, weil MM' nicht Asymptotenrichtung der DUPINschen Indikatrix sein sollte.

Sei nun eine Kurve zweiter Ordnung mit Mittelpunkt y_i gegeben durch

(1) $$g_{ik}(x_i - y_i)(x_k - y_k) = 1, \qquad g_{ik} = g_{ki}.$$ [1]

Differentiation dieser Gleichung nach x_1 ergibt

(2) $$0 = g_{11}(x_1 - y_1) + g_{12}(x_2 - y_2) + g_{12}(x_1 - y_1)x_2' + g_{22}x_2'(x_2 - y_2),$$

und wiederholte Differentiation

(3) $$0 = g_{11} + 2g_{12}x_2' + g_{12}x_2''(x_1 - y_1) + g_{22}x_2''(x_2 - y_2) + g_{22}(x_2')^2.$$

Soll der Kegelschnitt die Kurve im Punkte P oskulieren, so müssen die Gleichungen (1), (2), (3) für die Werte (A) erfüllt sein. Daraus ergibt sich das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} g_{11}(y_1)^2 - 2g_{12}y_1(1 - y_2) + g_{22}(1 - y_2)^2 &= 1 \\ -g_{11}y_1 + g_{12}(1 - y_2) &= 0 \\ g_{11} + g_{12}y_1 - g_{22}(1 - y_2) &= 0, \end{aligned}$$

[1] In diesem und dem folgenden Abschnitt ist die Vermeidung von oberen Indizes aus bezeichnungstechnischen Gründen gelegentlich zweckmäßig. Die EINSTEINsche Summationskonvention soll aber auch hier gelten.

das nach den Unbekannten g_{ik} aufgelöst werden kann:

$$g_{11} = \frac{1}{1 - y_2}, \quad g_{12} = \frac{y_1}{(1 - y_2)^2}, \quad g_{22} = \frac{1}{(1 - y_2)^2}\left(1 + \frac{y_1^2}{1 - y_2}\right).$$

Wir interessieren uns für den zur x_1-Achse parallelen Durchmesser dieses Kegelschnittes; für seine Endpunkte muß also gelten (Abb. 2, S. 11)

$$b_1 = y_1 \pm c, \qquad b_2 = y_2,$$

und da für sie die Kegelschnittsgleichung erfüllt ist, folgt

$$c = (1 - y_2)^{1/2}.$$

Dieser Wert ist nur abhängig von der 2-Koordinate des Mittelpunktes des oskulierenden Kegelschnittes, also der gleiche für alle Kegelschnitte, deren Mittelpunkte auf einer Parallelen zur Kurventangente liegen. Dies enthält die Behauptung.

Allerdings ist noch der Fall nachzutragen, daß die Richtung MM' Asymptotenrichtung der Dupinschen Indikatrix ist. In diesem Fall könnte man oben die Normierung $x_2'' = -1$ nicht durchführen, sondern man hätte $x_2'' = 0$. Für die oskulierenden Kegelschnitte ergibt sich dann

$$g_{11} = g_{12} = 0, \; g_{22} = (1 - y_2)^{-2};$$

es handelt sich um die Geradenpaare:

$$x_2 = 1, \; x_2 = 2y_2 - 1.$$

In diesem Falle führt die Betrachtung der Ebene PMM' allein nicht weiter. Wir gehen daher anders vor. Sind alle ebenen Flächenschnitte im Punkte P von stationärer Tangente, so ist P ein Flachpunkt, und alle oskulierenden Quadriken sind Paare von parallelen Hyperebenen, deren eine stets die Tangentialebene selbst ist. In diesem Falle ist nichts zu beweisen. Gibt es aber eine Flächenrichtung, in der ein ebener Flächenschnitt nicht stationäre Tangente hat, so gilt das aus Stetigkeitsgründen auch für nahe benachbarte Richtungen. Wir wählen unter diesen zwei unabhängige Richtungen r_1, r_2 aus und legen die zweidimensionalen Ebenen durch P, M, r_1 und P, M', r_2. Diese schneiden sich in der Hyperebene ε, welche durch M, M' geht und parallel zur Tangentialebene ist, in genau einem Punkt M''. Wählt man die oskulierende Quadrik mit Mittelpunkt M'', so läßt sich auf die Paare M, M'' und M', M'' jeweils unser oben geführter Beweis anwenden und ergibt die Kongruenz der Schnitte von ε mit den drei Quadriken (Mittelpunkte M, M', M''). Damit ist alles bewiesen.

Bezeichnet man eine Affinität, welche eine Hyperebene punktweise fest läßt und jede zu ihr parallele Hyperebene in sich überführt, als eine Scherung, so kann man den eben bewiesenen Satz auch folgendermaßen formulieren:

***I.2.1'.** *Es sei S diejenige Scherung, welche die Tangentialhyperebene $T(P)$ punktweise fest läßt und den Punkt M in den Punkt M' überführt. Dann bildet S die oskulierende Quadrik mit Mittelpunkt M auf die oskulierende Quadrik mit Mittelpunkt M' ab.*

Aus dem Satz I.2.1 und seinem Beweis wollen wir noch einige Folgerungen ziehen. Zunächst soll eine Übersicht über die Gesamtheit der eine ebene Kurve in einem Punkt oskulierenden Kegelschnitte gewonnen werden; dabei kann von dem trivialen Fall abgesehen werden, daß es sich um einen Punkt verschwindender Krümmung handelt, weil in diesem Fall alle oskulierenden Kegelschnitte Paare von parallelen Geraden sind. Sei also die Basis der affinen Ebene so gewählt, daß $x_2(x_1) = x_2$ die Gleichung der gegebenen Kurve ist, und daß $x_1 = 0$ der betrachtete Kurvenpunkt sei, für den gelte

$$x_2(0) = 0,\ x_2'(0) = 0,\ x_2''(0) = -1.$$

Außerdem genügt es wegen I.2.1′, diejenigen oskulierenden Kegelschnitte zu bestimmen, deren Mittelpunkte auf der x_2-Achse liegen; die x_2-Koordinate des Mittelpunktes sei m. Dann folgt für den oskulierenden Kegelschnitt die Gleichung

$$\frac{x_1^2}{-m} + \frac{(x_2 - m)^2}{m^2} = 1.$$

(Dies ergibt sich durch Einsetzen der Koordinaten und der Ableitungen im Punkte P in die Gleichungen (1)–(3) des Beweises zu I.2.1.)

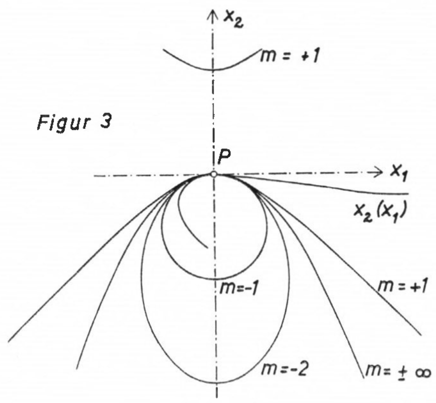
Für die oskulierende Parabel ($m = \pm\infty$) ergibt sich

$$x_1^2 + 2x_2 = 0.$$

Interessiert man sich für die zur x_1-Achse parallelen Durchmesser der oskulierenden Kegelschnitte, so folgt für ihre Endpunkte

$$x_1 = \pm(-m)^{1/2},\ \text{d. h.:}$$

Figur 3



Die Endpunkte der zur Tangente parallelen Durchmesser der oskulierenden Kegelschnitte liegen auf der Parabel

$$x_1^2 + x_2 = 0.$$

Man kann also sagen, daß der Ort der zur Tangente parallelen Durchmesser aus der oskulierenden Parabel durch die Affinität

$$x_1 \to \frac{x_1}{\sqrt{2}},\ x_2 \to x_2$$

hervorgeht. Den Fall höherer Raumdimensionen kann man wieder durch Betrachtung zweidimensionaler Schnitte auf diesen Fall reduzieren. Damit und mittels der Sätze I.2.1 und I.2.1′ ergibt sich:

I.2.2. *Zwei oskulierende Paraboloide einer Hyperfläche in einem Punkte P werden durch diejenige Scherung ineinander übergeführt, welche die Tangentialebene T(P) punktweise fest läßt und die Achsenrichtung des einen Paraboloids in die des anderen überführt.*

Damit ist der Satz I.2.1′ auch auf den Fall erweitert, daß der Mittelpunkt der oskulierenden Quadrik ein Fernpunkt ist.

I.2.3. *Es sei eine Gerade g durch den Flächenpunkt P gegeben, welche nicht in der Tangentialebene liege. Dann erfüllen die zu T(P) parallelen Mittelpunktsschnitte der oskulierenden Quadriken, deren Mittelpunkte auf g liegen, dasjenige Paraboloid mit der Achse g, welches aus dem oskulierenden Paraboloid mit der Achse g durch diejenige Affinität des Raumes hervorgeht, welche g punktweise fest läßt und in T(P) als Homothetie mit dem Verkürzungsverhältnis* $\sqrt{2}$ *wirkt.*

§ 3. Eine Anwendung in der Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten

Wir wollen in diesem Abschnitt ausdrücklich voraussetzen, daß der Raum von endlicher Dimension sei. Dann kann man eine Volumeneinheit festsetzen und solche Quadriken auszeichnen, denen das Inhaltsmaß 1 zukommt. Dabei wollen wir das Inhaltsmaß ganz allgemein für nicht-ausgeartete Quadriken mit im Endlichen gelegenem Mittelpunkt m_i definieren:

Definition. *Das absolute Inhaltsmaß einer Quadrik ist gleich dem Volumen des von irgendwelchen* n *konjugierten Halbmessern aufgespannten Parallelepipeds.*

Diese Definition wird sich als zweckmäßig erweisen. Das absolute Inhaltsmaß ist bis auf einen Faktor (Volumen der „Einheitskugel") mit dem gewöhnlichen Volumen identisch, falls letzteres existiert, was nur bei Ellipsoiden der Fall ist. Analytisch ergibt sich für das absolute Inhaltsmaß der Quadrik Q

$$g_{ik}(x_i - m_i)(x_k - m_k) = 1$$

der Ausdruck

$$|I(Q)| = |\det(g_{ik})|^{-1/2}.$$

Als Inhaltsmaß schlechthin bezeichnen wir

$$I(Q) = (\det(g_{ik}))^{-1/2},$$

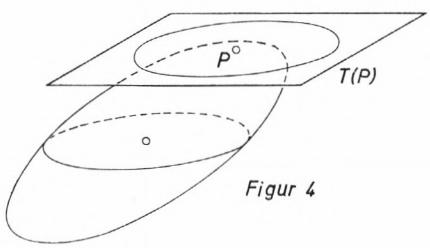
wobei das Vorzeichen unbestimmt bleiben kann. Das Inhaltsmaß kann auch imaginär sein. Es ist invariant gegenüber inhaltstreuen Affinitäten. Es ist wichtig, daß damit nicht nur für Ellipsoide, sondern für beliebige nicht-ausgeartete Quadriken ein Inhaltsmaß erklärt ist.

Die Ergebnisse aus § 2 ermöglichen uns nun eine direkte geometrische Einführung einer bei inhaltstreuen Affinitäten invarianten Metrik in einer Hyperfläche $x^i(u^\alpha)$. Dazu betrachten wir alle die Hyperfläche in einem ihrer Punkte, P, oskulierenden Quadriken vom absoluten Inhaltsmaß 1. Weil Scherungen inhaltstreue Affinitäten sind, erfüllen die Mittelpunkte dieser Quadriken nach Satz 1.2.1′ zwei zur Tangentialebene $T(P)$ parallele Hyperebenen H_1, H_2, von denen je eine in jedem der beiden von $T(P)$ erzeugten Halbräumen liegt und die von $T(P)$ gleichen Abstand haben. (Diese Abstandsgleichheit ist ein affiner Begriff, weil Gleichheit paralleler Vektoren ein affiner Begriff ist.) Die Schnitte der oskulierenden Quadriken, deren Mittelpunkte in H_1 liegen, mit der Hyperebene H_1 sind untereinander nach I. 2.1 translativ kongruent und liefern also in $T(P)$ alle dieselbe Figur, wenn sie so parallelverschoben werden, daß ihr Mittelpunkt nach P fällt. Es sei[1]

$$g_{\alpha\beta}(P)\,\xi^\alpha\,\xi^\beta = 1$$

diese Mittelpunktsquadrik in $T(P)$. Geht man statt von H_1 von H_2 aus, so erhält man die Quadrik

$$-g_{\alpha\beta}(P)\,\xi^\alpha\,\xi^\beta = 1.$$



Figur 4

Die Maßbestimmung

$$ds^2 = \pm\, g_{\alpha\beta}(P)\,du^\alpha\,du^\beta$$

(das Vorzeichen mag unbestimmt bleiben) in der Hyperfläche ist ihrer Konstruktion nach invariant unter den inhaltstreuen Affinitäten. Wir wollen jetzt einen expliziten Ausdruck für diese Metrik herleiten, der auch einen Vergleich mit einer seit langem bekannten Maßbestimmung erlaubt.

Zunächst wollen wir eine Quadrik Q und auf ihr einen Punkt P annehmen und das Koordinatensystem so gewählt denken, daß o der Mittelpunkt von Q ist, daß P die Koordinaten $(0, \ldots, 0, z)$ hat, und daß die Tangentialebene $T(P)$ parallel zur Koordinatenebene $x_n = 0$ ist. Das Volumen des von den Basisvektoren aufgespannten Parallelepipeds sei 1. Q ist nun gegeben durch

$$g_{ik}\,x_i\,x_k = 1,$$

---

[1] Kleine griechische Indizes stehen hier und im folgenden stets für die Parameter einer Hyperfläche und laufen also von 1 bis $n-1$, während lateinische Indizes die Zahlen 1 bis n durchlaufen.

und aus der Bedingung, daß P auf Q liegt, ergibt sich

$$g_{nn}\, z^2 = 1.$$

Differentiation der Gleichung der Quadrik nach x_α ergibt

$$0 = g_{ik}\, x_i\, \delta_{k\alpha} = g_{i\alpha}\, x_i,$$

also für $(x_i) = P$:

$$g_{n\alpha} = 0,$$

so daß wir erhalten

$$g_{nn}\, x_n^2 = 1 - g_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta$$

oder als explizite Gleichung der Quadrik Q

$$x_n = (1 - g_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta)^{1/2} \,/\, g_{nn}{}^{1/2}.$$

Denkt man sich die Quadrik in der Umgebung des Punktes P auf die x_α als Flächenparameter bezogen, so ergibt sich für die Tangentenvektoren

$$\mathfrak{x}_\gamma = (0, \ldots, 1, \ldots, 0, -g_{\alpha\gamma}\, x_\alpha \,/\, g_{nn}\, x_n)$$

und für den „Normalvektor" in der durch die Basis bestimmten euklidischen Metrik

$$\mathfrak{N} = \pm\, (0, \ldots, 0, 1)$$

(Diesen hier unkonsequenterweise auftretenden Vektor $\mathfrak{N}$ benötigen wir nur, weil er in der Blaschkeschen Definition vorkommt, die wir später mit unserer Definition vergleichen wollen.) Für die zweiten Ableitungen ergibt sich

$$\mathfrak{x}_{\alpha\beta} = \frac{+1}{g_{nn}\, x_n}\, (0, \ldots, 0, -g_{\alpha\beta}) + R.$$

Dabei bezeichnet R eine Größe, die im Punkte P verschwindet. Für die zweite Fundamentalform dieser euklidischen Geometrie ergibt sich im Punkte P

$$L_{\alpha\beta} = (\mathfrak{N}, \mathfrak{x}_{\alpha\beta}) = \pm \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{nn}}}.$$

Nun wollen wir von der Annahme Gebrauch machen, das absolute Inhaltsmaß unserer Quadrik Q sei 1; dann ist also

$$1 = g_{nn}\, |\det(g_{\alpha\beta})|,$$

mithin

$$\det(L_{\alpha\beta}) = \pm \det(g_{\alpha\beta}) \cdot g_{nn}{}^{-(n-1)/2} = \frac{\pm 1}{g_{nn}^{\frac{n+1}{2}}}$$

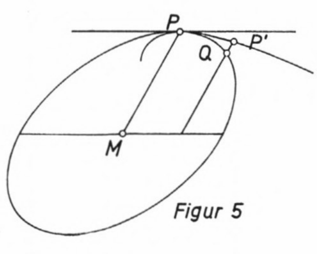
oder

$$g_{\alpha\beta} = \pm L_{\alpha\beta} \cdot \sqrt{g_{nn}} = \frac{\pm L_{\alpha\beta}}{|\det(L_{\alpha\beta})|^{1/n+1}}.$$

Damit haben wir erhalten: $g_{\alpha\beta}$ *ist identisch mit der quadratischen Fundamentalform der Flächentheorie der inhaltstreuen Affinitäten von* BLASCHKE [1] *und* BERWALD [2]. Dies haben wir allerdings zunächst nur für den Fall sehr spezieller Flächen, der Quadriken, hergeleitet. Ohne neue Rechnung kann man nun aber einsehen, daß dasselbe für ganz beliebige Flächen gilt. Dazu wählen wir eine oskulierende Quadrik, deren Mittelpunkt auf der Flächennormalen liegt und die das absolute Inhaltsmaß 1 hat. Da in die zweite Fundamentalform nur die Ableitungen bis zur zweiten Differentiationsstufe eingehen, hat die Fläche in P die gleiche zweite Fundamentalform wie die betrachtete Quadrik, so daß sich mittels Satz I.2.1′ sofort ergibt:

I. 3. 1. *Es sei E eine Hyperfläche im affinen Raum mit Inhaltsmaß. Dann erhält man in der Fläche eine bei inhaltstreuen Affinitäten invariante Riemannsche Metrik, wenn man als Indikatrix im Flächenpunkte P den zur Tangentialebene parallelen Mittelpunktschnitt irgendeiner in P oskulierenden Quadrik vom absoluten Inhaltsmaß 1 wählt. Diese Maßbestimmung stimmt mit der von* BLASCHKE [1] *und* BERWALD [2] *auf formalem Wege erhaltenen überein.*

Abgesehen von der geometrischen Deutung, die die früher nur aus Invarianzüberlegungen formal postulierte Metrik damit erhält, haben wir damit für den Aufbau der Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten auch gewisse methodische Vorteile gewonnen: der Aufbau läßt sich hier determinantenfrei durchführen, und es brauchen keine der Affingeometrie fremden Hilfsmittel (wie der Normalvektor) herangezogen zu werden. Auf eine ausführliche Durchführung dieses Aufbaus der Flächentheorie unter den inhaltstreuen Affinitäten kann in dieser Arbeit, deren Hauptgegenstand die Geometrie der homogenen Affinitäten bildet, nicht eingegangen werden. Um zu sehen, daß ein solcher Aufbau möglich ist, wird es aber auch genügen, wenn wir zeigen, daß nicht nur die quadratische, sondern auch die kubische Fundamentalform der BLASCHKE-BERWALDschen Geometrie sich aus den oskulierenden Quadriken bestimmen läßt. Dies soll jetzt noch durchgeführt werden.



Figur 5

Es seien P ein Flächenpunkt, M der Mittelpunkt irgendeiner fürs folgende festgehaltenen Quadrik vom absoluten Inhaltsmaß 1, P' ein zu P infinitesimal benachbarter Flächenpunkt und Q der zu P benachbarte Schnittpunkt der Quadrik mit der Parallelen zu PM durch P'. Dann können wir als Maß der Abweichung der Fläche von der oskulierenden Quadrik die folgende Größe μ betrachten:

$$\mu = \frac{QP'}{MP}.$$

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit wählen wir das Koordinatensystem so, daß M sein Nullpunkt ist, daß P die Koordinaten $(0, \ldots, 0, 1)$ hat, und daß die Tangentialhyperebene in P parallel ist zu der von den ersten $n - 1$ Basisvektoren aufgespannten Hyperebene. Dann gilt mit den früheren Formeln hier

$$g_{nn} = 1, \; g_{n\beta} = 0$$

und (weil das absolute Inhaltsmaß der Quadrik gleich 1 ist)

$$\left|\det(g_{\alpha\beta})\right| = 1.$$

Beziehen wir die Fläche in der Umgebung von P wieder auf die Parameter $x_1, \ldots, x_{n-1}$, stellen wir sie also dar in der Form

$$x_n = x_n(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

so hat die oskulierende Quadrik in der Umgebung von P die n-Komponente

$$q_n = (1 - g_{\alpha\beta}\, x_\alpha\, x_\beta)^{1/2}.$$

Für den Punkt P' mit den Parameterwerten $x_\beta = dx_\beta$ ergibt sich

$$\mu = \frac{QP'}{MP} = x_n(dx_\beta) - q_n(dx_\beta) = x_n(0) - q_n(0) + \left(\frac{\partial x_n}{\partial x_\beta} - \frac{\partial q_n}{\partial x_\beta}\right) dx_\beta +$$

$$+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 x_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \frac{\partial^2 q_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}\right) dx_\alpha\, dx_\beta + \frac{1}{6}\left(\frac{\partial^3 x_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma} - \frac{\partial^3 q_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\right) dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma + (4),$$

wobei (4) von mindestens vierter Ordnung in dx_β ist. Wegen der Oskulation stimmen x_n und q_n an der Stelle P bis einschließlich ihrer zweiten Ableitungen überein. Außerdem berechnet man direkt, daß die dritten Ableitungen von q_n an der Stelle P verschwinden. Es bleibt daher nur

$$\mu = \frac{1}{6}\,\frac{\partial^3 x_n(P)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial x_\gamma}\, dx_\alpha\, dx_\beta\, dx_\gamma + (4).$$

Um zu einem Ausdruck zu gelangen, der die Unabhängigkeit von der speziellen Wahl der oskulierenden Quadrik zeigt, berechnen wir die kovariante Ableitung $x_{n\alpha;\beta;\gamma}$:

$$x_{n\alpha;\beta;\gamma} = x_{n\alpha\beta\gamma} - \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\gamma \end{Bmatrix} x_{n\varrho\beta} - \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} x_{n\varrho\gamma} - \begin{Bmatrix} \varrho \\ \beta\gamma \end{Bmatrix} x_{n\varrho\alpha}.$$

(Dabei bezeichnen griechische Indizes die gewöhnliche Ableitung, nach einem Semikolon die kovariante Ableitung, und die Christoffelsymbole sind bezüglich der Metrik der inhaltstreu-affinen Geometrie zu nehmen.) Da in unseren speziellen Koordinaten

$$x_{n\alpha\beta}(P) = q_{n\alpha\beta}(P) = g_{\alpha\beta}(P),$$

folgt

$$x_{n\alpha;\beta;\gamma} = x_{n\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} + \frac{\partial g_{\alpha\gamma}}{\partial u_\beta} + \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial u_\alpha}\right)$$

oder schließlich

$$\mu = \frac{1}{6}\left(x_{n\alpha;\beta;\gamma}\, dx^\alpha\, dx^\beta\, dx^\gamma + \frac{3}{2}\, d(g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta)\right) + (4)$$

Blaschke [1] und Berwald [2] haben als Koeffizienten der kubischen Fundamentalform eingeführt:

$$A_{\alpha\beta\gamma} = \frac{\det(\mathfrak{x}_{\alpha;\beta;\gamma}, \mathfrak{x}_1, \ldots, \mathfrak{x}_{n-1})}{|\det(g_{\alpha\beta})|^{1/2}}.$$

In unseren speziellen Koordinaten ergibt das:

$$A_{\alpha\beta\gamma} = x_{n\alpha;\beta;\gamma}$$

weil $x^i_\alpha = \delta^i_\alpha$ und $|\det(g_{\alpha\beta})| = 1$. Wir haben also

$$A_{\alpha\beta\gamma}\, dx^\alpha\, dx^\beta\, dx^\gamma = 6\mu - \frac{3}{2}\, d(ds^2) + (4).$$

Dies ist die gewünschte geometrische Deutung der kubischen Fundamentalform.

Da nach einem Radonschen Satze alle Differentialinvarianten der inhaltstreu-affinen Flächentheorie Funktionen der beiden Fundamentalformen allein sind, kann man also diese ganze Flächentheorie auf die oskulierenden Quadriken vom absoluten Inhaltsmaß 1 begründen. Es mag von Interesse sein, zu zeigen, wie in einem speziellen Falle die geometrische Deutung einer solchen Invariante direkt mit Hilfe der oskulierenden Quadriken angegeben werden kann. Wir führen dies durch für den sogenannten „Affinabstand" $A(T(P); M)$ eines Punktes M von der Tangentialhyperebene $T(P)$ der Fläche im Punkte P. Wir setzen

$$A(T(P); M) = 0 \text{ für } M \in T(P);$$
$$A(T(P); M) = |I(Q_M(P))|^{2/n+1} \quad \text{sonst.}$$

In der Tat ist diese Funktion A gleich 1 für diejenigen Punkte M, die als Mittelpunkte einer oskulierenden Quadrik $Q_M(P)$ vom absoluten Inhaltsmaß 1 auftreten, und nach Satz 1. 2. 1′ ist $A(T(P); M)$ konstant auf jeder zu $T(P)$ parallelen Hyperebene. Außerdem ist A linear in jedem der beiden von $T(P)$ erzeugten Halbräume, wie man durch folgende Überlegung erkennt. Ist M Mittelpunkt einer oskulierenden Quadrik vom absoluten Inhaltsmaß 1 mit $MP = \eta$, so daß $\eta, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ in irgendeinem Koordinatensystem (Inhalt des von den Basisvektoren aufgespannten Parallelepipeds = 1) Längen konjugierter Durchmesser sind, so ist also

$$\xi_1 \ldots \xi_{n-1} = 1.$$

Ist nun $\overline{M}$ irgendein Punkt auf der Geraden durch P und M, so gilt für die entsprechenden Größen

$$\bar{\xi}^2_\alpha : \xi^2_\alpha = \bar{\eta} : \eta,$$

weil die Mittelpunktschnitte der zugehörigen oskulierenden Quadriken nach 1. 2. 3 auf einem Paraboloid liegen. Also gilt

$$I^2(Q_{\bar{M}}) = \bar{\xi}_1^2 \dots \bar{\xi}_{n-1}^2 \bar{\eta}^2 = \xi_1^2 \dots \xi_{n-1}^2 \eta^2 \frac{\bar{\eta}^{n+1}}{\eta^{n+1}}$$

oder

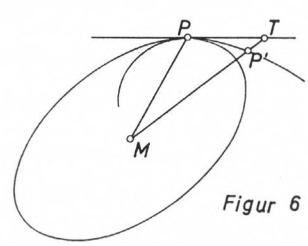
$$| I^2(Q_{\bar{M}}) |^{1/n+1} = \bar{\eta}/\eta \cdot | I^2(Q_M) |^{1/n+1},$$

woraus die Linearität von A folgt.

Berwald [1] hat diese Deutung des Affinabstands für den Spezialfall elliptisch gekrümmter Flächen im dreidimensionalen Raum auf anderem Wege hergeleitet; dazu auch Blaschke [1] S. 112.

Die quadratische Fundamentalform, die wir hier vermöge der Mittelpunktsschnitte der oskulierenden Quadriken vom absoluten Inhaltsmaß 1 eingeführt hatten, läßt noch eine weitere geometrische Deutung zu. Wie wir die kubische Fundamentalform nämlich durch das Maß der Abweichung der Fläche von der oskulierenden Quadrik eingeführt hatten, so ist die metrische Fundamentalform der Affingeometrie bestimmt durch das Maß der Abweichung der Fläche von ihrer Tangentialebene. Dies bestätigt man sehr einfach wieder mittels unserer speziellen Koordinaten. Diesmal bezeichne T den Schnittpunkt der Geraden MP' mit der Tangentialebene $T(P)$, so daß T sich beschreiben läßt durch

$$T{:}\ a \cdot (x_i + dx_i)$$



Figur 6

(x_i Koordinaten von P). Die Bedingung, daß der Endpunkt des Vektors MT in der Tangentialebene $T(P)$ liegt, ergibt in unseren speziellen Koordinaten[1]

$$1 - \frac{1}{a} = -\frac{1}{2}\, ds^2 + [3]$$

oder schließlich

$$ds^2 = -2 \frac{P'T}{MT} + [3].$$

Unsere Ergebnisse gestatten auch einige Anwendungen in der Geometrie der orthogonalen Gruppe, worauf zum Schluß dieses Kapitels noch hingewiesen sei. Wir betrachten

[1] Mit [3] wird eine Größe von mindestens dritter Ordnung in dx bezeichnet.

dazu diejenigen oskulierenden Quadriken Q, deren Mittelpunkte auf der Flächennormalen liegen. Mit denselben Annahmen über das Koordinatensystem wie oben folgt dann für die beiden Fundamentalformen der bewegungsinvarianten Geometrie:

$$(\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta) = \delta_{\alpha\beta},\ L_{\alpha\beta} = (\mathfrak{N}\mathfrak{x}_{\alpha\beta}) = \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{nn}}}.$$

Für die GAUSSsche Krümmung

$$K = \det(L_{\alpha\beta}) / \det(\mathfrak{x}_\alpha \mathfrak{x}_\beta)$$

ergibt sich aus den oben hergeleiteten Formeln

$$K = \frac{1}{I^2(Q) \cdot g_{nn}^{(n+1/2)}} = \frac{z^{n+1}}{I^2(Q)}.$$

Dies fassen wir zusammen in dem Satz

I. 3. 2. *Für die* GAUSS*sche Krümmung K gilt*

$$K = \frac{z^{n+1}}{I^2(Q)} = \frac{z^{n-1}}{F^2(Q)} = \frac{I^{n-1}(Q)}{F^{n+1}(Q)}.$$

Dabei bedeuten z den Abstand des auf der Flächennormalen gelegenen Mittelpunkts der oskulierenden Quadrik Q, $I(Q)$ das Inhaltsmaß von Q und $F(Q)$ das $(n-1)$-dimensionale Inhaltsmaß des zur Tangentialebene parallelen Mittelpunktsschnitts von Q.

Einige Spezialfälle dieses Satzes dürften von besonderem geometrischem Interesse sein, insbesondere die Fälle $z = 1$ oder $I(Q) = 1$. Im Falle $n = 2$ liefert der Satz eine Eigenschaft der Kurvenkrümmung; für $z = F$ ist Q der Krümmungskreis. Auf Anwendungen von I. 3. 2 kann hier nicht weiter eingegangen werden. Doch sei bemerkt, daß aus diesem Satz und I. 2. 1′ zusammen folgt:

Unterwirft man eine Fläche einer Scherung, welche die Tangentialhyperebene $T(P)$ punktweise festläßt, so ändert sich bei dieser Scherung die GAUSS*sche Krümmung K im Punkte P nicht.*

Das kann man z. B. zu einer einfachen Bestimmung derjenigen Punkte eines Ellipsoids vom Volumen der Einheitskugel verwenden, in denen die GAUSSsche Krümmung gleich 1 ist.

KAPITEL II.

ZENTRALAFFINE DIFFERENTIALGEOMETRIE DER HYPERFLÄCHEN

In diesem Kapitel benutzen wir die oskulierenden Quadriken zum Neuaufbau einer Geometrie des Erlanger Programms, nämlich der Hyperflächengeometrie unter den homogenen Affinitäten. Man kann, wenn man nicht die Transformationsgruppe in den Vordergrund rücken will, auch davon sprechen, daß es sich um die Geometrie der Hyperflächen in einem Vektorraum handelt, dessen Nullpunkt gerade der Fixpunkt der homogen-linearen Gruppe ist. Es wird gezeigt werden, daß die oskulierenden Quadriken zum Aufbau der zentralaffinen Flächentheorie vollständig hinreichen.

Salkowski [1] und etwa gleichzeitig O. Mayer [1] haben die zentralaffine Flächentheorie des dreidimensionalen Raumes auf Fundamentalformen gegründet, die sich in formaler Weise ergaben, wenn man die Invarianz unter der homogen-affinen Gruppe verlangte. Demgegenüber werden die Fundamentalformen bei uns geometrisch aus den oskulierenden Quadriken erhalten, und zwar auf zweierlei Weisen (§ 2 und § 7 des vorliegenden Kapitels II). Der Aufbau wird dadurch ganz unabhängig von der Dimensionszahl des Raumes und gilt auch für unendlichdimensionale Vektorräume.

Wir führen zunächst (§ 1) mittels der oskulierenden Quadriken eine von der Hyperfläche E abhängige Riemannsche Metrik im Vektorraum ein; diese geht auf eine Idee von Lorch [1] zurück und ist in einer Arbeit von Lorch und dem Verf. [1] bereits untersucht worden. Hier dient sie zur Einführung einer Metrik in der Fläche E selbst (§ 2). Diese erweist sich als identisch mit Salkowskis radialaffiner Flächenmetrik; auch Salkowskis kubische Fundamentalform wird aus der Raummetrik hergeleitet. Man kann nun aber – und das wäre in der alten Auffassung undurchführbar – eine weitere Fläche F im Raume betrachten, die dann als Untermannigfaltigkeit des von der ersten Fläche E (der „Eichfläche") erzeugten Riemannschen Raumes erscheint. Da in dem Falle, daß die Eichfläche ein Ellipsoid ist, die Riemannsche Raumgeometrie gerade euklidisch wird, liegt im allgemeinen Fall eine Verallgemeinerung der klassischen Flächentheorie zu einer „relativen" Flächentheorie vor (§ 3). Wie in der klassischen Flächentheorie ist das Verhalten der Kurven auf der Eichfläche E (§ 4) und auf beliebigen Flächen F (§ 5) von besonderem Interesse.

Als eine spezielle und für Anwendungen wichtige Flächenklasse behandeln wir in § 6 die Affinsphären.

Unsere relative Flächentheorie steht zu der klassischen Relativgeometrie, wie sie von Emil Müller [1] inauguriert wurde, in einem engen Verhältnis: die beiden Geometrien sind dual zueinander.

*§ 1. Die mit einer Eichfläche E affininvariant verbundenen Maßbestimmungen im Raume

Es sei $E : e^i = e^i(u^\beta)$ ein Hyperflächenstück ohne Randpunkte im reellen Vektorraum (endlicher oder unendlicher Dimension), über das wir außer hinreichender Differenzierbarkeit noch voraussetzen wollen:

(A) *Jeder von* o *ausgehende Halbstrahl hat mit E höchstens einen Punkt gemeinsam.*

(B) *Keine Tangentialhyperebene von E enthalte* o.

(C) *In jedem Punkt $e^i(u^\beta)$ von E gilt für die eindeutig bestimmte oskulierende Quadrik $Q(e)$ mit Mittelpunkt* o : *$Q(e)$ ist nicht ausgeartet.*

Alle diese Eigenschaften sind trivialerweise erfüllt, wenn E selbst Stück einer nicht-ausgearteten Quadrik mit Mittelpunkt o ist. – Die Vektoren x^i, zu denen es einen Vektor $e^i(u^\beta)$ der Fläche E gibt, so daß $a \cdot e^i = x^i$ mit einer positiven Zahl a, bilden den *von der Fläche E aufgespannten Raumsektor oder Vollkegel S.*

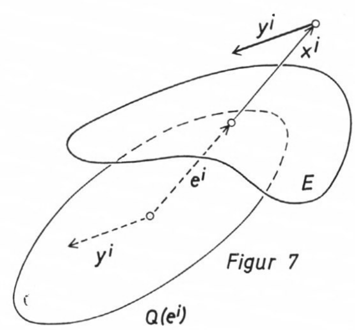
Mit dem Flächenstück E sind zwei Metrisierungen des von ihm aufgespannten Raumsektors S verbunden, welche gegenüber homogenen Affinitäten invariant sind. Die erste dieser Metriken hat bereits MINKOWSKI eingeführt und untersucht. Diese sogenannte MINKOWSKIsche Metrik oder *Norm*

$$F_E(x^i) = F(x^i)$$

ist in S erklärt durch

$$F(a \cdot e^i) = a \text{ für } a > 0. \tag{1}$$

Die zweite mit E verbundene Raummetrik hat erst in jüngster Zeit Interesse gefunden (LAUGWITZ and LORCH [1], LAUGWITZ [7]). Sie wird aus den oskulierenden Quadriken von



Figur 7

E konstruiert und ist ebenfalls in dem von E aufgespannten Raumsektor S definiert. Die Länge $L(y^i)$ eines Vektors y^i, der in einem Punkte x^i aus S angetragen sei, wird durch folgende Konstruktion erhalten. Sei e^i der mit x^i gleichgerichtete Vektor der Eichfläche E und sei $Q(e)$ die in e^i oskulierende Quadrik mit Mittelpunkt o, die die Gleichung habe

$$g_{ik}(e)\, z^i z^k = 1, \; g_{ik} = g_{ki}.$$

Dann definieren wir

$$L^2(y) = g_{ik}(e)\, y^i y^k.$$

Falls also der Vektor y^i so parallel verschoben wird, daß sein Anfangspunkt in den Punkt o fällt, so ist $L(y) = 1$ genau, wenn sein Endpunkt auf den Rand von $Q(e)$ fällt.

Die dadurch in S definierte Riemannsche Metrik hat mithin das Bogenelement

$$ds^2 = g_{ik}(x)\, dx^i\, dx^k \tag{2}$$

$$\text{mit } g_{ik}(x) = g_{ik}(e) \text{ falls } x^i = a \cdot e^i,\ a > 0.$$

Zwischen der MINKOWSKIschen Metrik (1) und der Riemannschen Metrik (2) bestehen einfache Zusammenhänge. Zunächst gilt offenbar

$$F^2(x) = g_{ik}(x)\, x^i\, x^k. \tag{3}$$

Weitere Beziehungen ergeben sich daraus, daß $Q(e)$ eine die Eichfläche in e^i oskulierende Quadrik ist. Die Funktionen

$$F^2(x) \text{ und } Q^2(x) = g_{ik}(x)\, x^i\, x^k$$

müssen daher in $x^i = e^i$ einschließlich ihrer Ableitungen bis zur zweiten Ordnung übereinstimmen. Das ergibt

$$\frac{1}{2}\,\frac{\partial F^2(e)}{\partial x^i} = g_{ik}(e)\, e^k \text{ und } \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2(e)}{\partial x^i\, \partial x^k} = g_{ik}(e). \tag{4}$$

Allgemein gilt daher aus Homogenitätsgründen

$$g_{ik}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2(x)}{\partial x^i\, \partial x^k}. \tag{5}$$

(Der Tensor (5) ist besonders seit CARTAN [1] als Fundamentaltensor der MINKOWSKIschen Metrik verwendet worden, ohne daß man aber die durch ihn definierte Riemannsche Metrik untersucht hätte.) Aus der Formel (5) wollen wir noch einige für später wichtige Folgerungen ziehen. Die EULERsche Homogenitätsrelation ergibt

$$\frac{\partial g_{ik}(x)}{\partial x^j}\, x^j = \frac{\partial g_{ij}(x)}{\partial x^k}\, x^j = 0. \tag{6}$$

Für die Abweichung zwischen der Fläche E und der Quadrik Q wird die Differenz der dritten Ableitungen von F^2 und Q^2 verantwortlich sein; wir dividieren sie aus gewissen Gründen noch durch 2:

$$g_{ijk}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^3 F^2(x)}{\partial x^i\, \partial x^j\, \partial x^k}. \tag{7}$$

Da Q als nicht ausgeartet vorausgesetzt war, existiert ein symmetrischer Tensor $g^{ij}(x)$ mit

$$g^{ij}(x)\, g_{jk}(x) = \delta^i_k.$$

Die CHRISTOFFELsymbole unserer Riemannschen Metrik, welche den LEVI-CIVITAschen Parallelismus des Riemannschen Raumes definieren, ergeben sich wegen der Symmetrie der g_{ijk} zu

$$\{ij, k\} = \frac{1}{2}\, g_{ijk}; \quad \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}\, g^{jr}\, g_{ikr}, \tag{8}$$

und der Riemannsche Krümmungstensor ist

$$R_{ijkl} = \tfrac{1}{4} g^{rs} (g_{irk} g_{jsl} - g_{irl} g_{jsk}) \tag{9}$$

(Lorch und Laugwitz [1]). – Ein sehr einfacher, aber wichtiger Hilfssatz ist:

Notwendig und hinreichend dafür, daß die Eichfläche E eine Quadrik mit Mittelpunkt o *sei, ist*

$$g_{ijk} = 0.$$

Ist E sogar ein Ellipsoid, $F^2(x)$ also eine positiv definite quadratische Form, so fallen die Minkowskische und die Riemannsche Metrik zusammen in eine euklidische Metrik im Vektorraum. Im allgemeinen ist die Riemannsche Metrik positiv definit, wenn das Flächenstück E zum Nullpunkt hin streng konvex ist.

Mit der Hyperfläche E ist eine Hyperfläche E^* im Dualraum gegeben durch die Tangentialhyperebenen von E. Wir behaupten, daß man diese Fläche E^* analytisch darstellen kann durch

$$E^*\colon\ e_i(u^\beta) = g_{ik}(e)\, e^k(u^\beta). \tag{10}$$

Für den so definierten Vektor $e_i(u^\beta)$ im Dualraum gilt nämlich

$$\text{(a)}\ \ e_i e^i = 1, \quad \text{(b)}\ \ e_i e^i_\beta = 0, \tag{11}$$

wobei $e^i_\beta = \frac{\partial e^i}{\partial u^\beta}$. Die Gleichung (11 b) folgt mittels der Eulerschen Relation (6) aus

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^\beta} \left(g_{ik}(e)\, e^i e^k\right) = g_{ikj}\, e^i e^k e^j_\beta + 2 g_{ik}\, e^i e^k_\beta.$$

Die Fläche E^*, die von Carathéodory in der Variationsrechnung als die zur „Indikatrix“ E gehörige „Figuratrix“ eingeführt worden ist, läßt sich bei konvexem E bekanntlich noch auf eine andere Weise erzeugen. Bezeichnet

$$H(x_i) = \sup_{y \neq 0} \frac{x_i y^i}{F(y^i)} \tag{12}$$

(definiert für diejenigen x_i, die zu den Hyperebenenkoordinaten irgendeiner Tangentialebene von E proportional sind) die Minkowskische Stützfunktion von E, so ist E^* die Fläche $H(x_i) = 1$. Aus

$$H^2\left(g_{ik}(e)\, e^k\right) = 1$$

ergibt sich wegen der Homogenitätsrelationen

$$H^2\left(g_{ik}(x)\, x^i\right) = F^2(x^i)$$

und daraus durch Differentiation nach x^k unter Beachtung von (6)

$$\frac{\partial H^2 (g_{ik}(x)\, x^i)}{\partial x_j} \, g_{jk} = \frac{\partial F^2 (x)}{\partial x^k}$$

oder wegen Gleichung (4)

$$\tfrac{1}{2}\, g_{ik}(x) \, \frac{\partial H^2 (g_{ik}(x)\, x^i)}{\partial x_i} = g_{ik}(x)\, x^i$$

und schließlich nach Überschieben mit $g^{kj}(x)$:

$$x^j = \frac{1}{2} \, \frac{\partial H^2 (g_{ik}(x)\, x^k)}{\partial x_j}.$$

Differenziert man nochmals nach x^k, so kommt

$$\delta^j_k = g_{lk}(x) \cdot \frac{1}{2} \, \frac{\partial^2 H^2 (g_{ik}(x)\, x^i)}{\partial x_j \, \partial x_l}$$

oder

(13) $$g^{jl} = \frac{1}{2} \, \frac{\partial^2 H^2 (g_{ik}(x)\, x^i)}{\partial x_j \, \partial x_l}.$$

Dies ist eine Beziehung, die ganz analog zu (5) ist und die die geometrische Aussage enthält:

Die oskulierenden Quadriken der Figuratrix E^*: $H(e_i) = 1$ sind gegeben durch

$$g^{ik}(e_i)\, y_i y_k = 1$$

und sind also die zu den oskulierenden Quadriken von E dualen Quadriken.

Wir bemerken noch, daß die von erster Ordnung positiv homogene Abbildung

(14) $$x_i = g_{ik}(x)\, x^k$$

zwischen dem Raumsektor S und dem zugehörigen Dualraumsektor S^* eine Isometrie der beiden Riemannschen Metriken g_{ik}, g^{ik} ist. Für (14) gilt nämlich

$$d(x_i) = g_{ijk}(x)\, dx^j x^k + g_{ik}\, dx^k,$$

also wegen der Homogenität (6)

(15) $$g^{ik}\, d(x_i)\, d(x_k) = g_{ik}(x)\, dx^i dx^k.$$

Besonders im Falle endlicher Raumdimension ist die Einführung der folgenden speziellen Koordinaten gelegentlich zweckmäßig. Wir bezeichnen diese Koordinaten als zentralaffine Normalkoordinaten zum Punkt P. Sie werden dadurch definiert, daß die Basisvektoren i_k des affinen Koordinatensystems als konjugierte Halbmesser der E in P oskulierenden Quadrik Q gewählt werden, wobei i_1 gleich OP ist. Die Quadrik Q erscheint in diesen Koordinaten in der Normalform

$$x_1^2 + \sum_{k=2}^{n} \varepsilon_k x_k^2 = 1, \; \varepsilon_k^2 = 1. \tag{16}$$

Im Punkte P gilt also $g_{ik} = \varepsilon_k \delta_{ik}$ (nicht summieren!), und wegen $x^i = \delta_1^i$ ergibt sich aus der EULERschen Relation (6)

$$g_{ik1}(P) = 0. \tag{17}$$

Wir wollen diese zentralaffinen Normalkoordinaten sogleich anwenden, um Aufschlüsse über das Krümmungsverhalten des Raumes zu bekommen. Dazu nehmen wir zunächst an, die Raumdimension sei 2. In diesem Falle ist die einzige wesentliche Komponente des Krümmungstensors R_{1212}, und diese verschwindet wegen (9) und (17) in zentralaffinen Normalkoordinaten. Also hat man wegen der Tensoreigenschaft der Krümmung:

Der Krümmungstensor R_{ijkl} verschwindet im Falle $n = 2$ identisch.

Für $n > 2$ ergibt sich daraus noch:

Die Krümmung jeder zweidimensionalen Ebene durch 0 *verschwindet identisch.*

Man sieht daraus, daß die Riemannschen Geometrien, die von einer Eichfläche E erzeugt werden, von sehr spezieller Natur sind: Durch jeden Punkt gibt es eine Kurve (die Gerade durch 0) mit der Eigenschaft, daß die Krümmung jedes zweidimensionalen Elements durch den Punkt und diese Kurvenrichtung verschwindet.

Im Falle $n = 3$ wollen wir noch zeigen, daß die Krümmung nur von dem Riemannschen Krümmungsskalar

$$R = g^{ik} g^{jl} R_{ijkl}$$

abhängt. Dies läßt sich auch wieder in zentralaffinen Normalkoordinaten bestätigen. Dazu berechnen wir zunächst die Komponenten des RICCI-Tensors

$$R_{ik} = g^{jl} R_{ijkl}$$

in diesen Koordinaten. Wegen (17) ist $R_{11} = R_{12} = R_{21} = 0$. Ferner berechnet man explizit $R_{23} = R_{32} = 0$ und

$$R_{22} = \varepsilon_{(3)} R_{2323}; \; R_{33} = \varepsilon_{(2)} R_{2323}.$$

Da wieder wegen (17) R_{2323} die einzige wesentliche Komponente des Krümmungstensors ist und man sofort erhält

$$R = 2\, \varepsilon_{(2)} \varepsilon_{(3)} R_{2323},$$

folgt:

Der Krümmungstensor ist im Falle $n = 3$ durch den Krümmungsskalar R vollständig bestimmt, sobald der affine Charakter der oskulierenden Quadriken (das Vorzeichen $\varepsilon_{(2)} \varepsilon_{(3)}$) gegeben ist.

*§ 2. Die Maßbestimmung in der Eichfläche E: quadratische und kubische Fundamentalformen

Die Eichfläche $e^i(u^\beta)$ kann selbst als Untermannigfaltigkeit des von ihr erzeugten Riemannschen Raumes (II. 1. 2) aufgefaßt werden. Die in dieser Hyperfläche induzierte Riemannsche Metrik ist gegeben durch

$$\gamma_{\alpha\beta}(u) = g_{ik}(e(u))\, e^i_\alpha e^k_\beta \tag{1}$$

und kann geometrisch aus der oskulierenden Quadrik mit Mittelpunkt o in folgender Weise erhalten werden: Man verschiebe den in $e^i(u)$ angetragenen Tangentialvektor so zu sich selbst parallel, daß sein Anfangspunkt in den Nullpunkt fällt; liegt sein Endpunkt dann auf der Quadrik Q, so ist seine Länge gleich 1. Aus dieser Erzeugung folgt, daß unsere Flächenmetrik proportional zur zweiten Fundamentalform der bewegungsinvarianten Geometrie sein muß, und unsere Voraussetzung (C) aus Kapitel II, § 1 läßt sich daher geometrisch so interpretieren, daß parabolische Flächenpunkte von der Betrachtung ausgeschlossen werden sollen. Insbesondere werden die Torsen nicht erfaßt. Natürlich führt unsere Definition auch in diesen Fällen zu einer Flächenmetrik, die aber ausgeartet ist und daher zu anderen als den hier zu verwendenden Behandlungsweisen Veranlassung geben würde.

Eine ganz andere Definition einer bei radialen Affinitäten invarianten Flächenmetrik hat in den Fällen $n = 2, 3$ E. Salkowski [1] angegeben und verwendet. Verallgemeinert auf beliebige (allerdings endliche) Raumdimension n lautet Salkowskis Definition

$$s_{\alpha\beta} = (e^i_{\alpha\beta}, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1}) \,/\, (e^i, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1}).$$

Um zu zeigen, daß beide Metriken bis aufs Vorzeichen übereinstimmen (Laugwitz [8]), beweisen wir ein einfaches Lemma:

Die beiden linearen Formen

$$a(y) \underset{def}{=} (y^i, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1}) \,/\, (e^i, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1})$$

$$\textit{und} \quad b(y) \underset{def}{=} g_{ik}(e)\, e^i y^k \ \textit{sind gleich.}$$

Der Beweis ergibt sich sehr einfach daraus, daß beide Linearformen für die n linear unabhängigen Vektoren $e^i, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1}$ übereinstimmen.

Wegen der mittels Eulers Relation zu folgernden Beziehung

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^\beta}\left(g_{ik}(e)\, e^i e^k_\alpha\right) = g_{ik}(e)\, e^i_\beta e^k_\alpha + g_{ik}(e)\, e^i e^k_{\alpha\beta}$$

folgt aus dem Lemma tatsächlich $s_{\alpha\beta} + \gamma_{\alpha\beta} = 0$. Also:

II. 2. 1. *Unsere Flächenmetrik $\gamma_{\alpha\beta}$ stimmt im Falle endlicher Raumdimension mit der von Salkowski eingeführten Flächenmetrik der radialaffinen Geometrie bis aufs Vorzeichen überein.*

Der für die Abweichung der Fläche von der oskulierenden Quadrik verantwortliche Tensor g_{ijk} hat wegen der EULERschen Relation keine Komponenten in Richtung e^i. Seine einzigen Komponenten nach den Vektoren e^i, e^i_β sind also

(2) $$a_{\alpha\beta\gamma} \underset{def}{=} g_{ijk}(e)\, e^i_\alpha\, e^j_\beta\, e^k_\gamma.$$

Die zu (2) gehörige kubische Form heißt *kubische Fundamentalform* der Fläche E. Für diese Form gilt:

II. 2. 2. *Dafür, daß E eine Quadrik mit Mittelpunkt* o *sei, ist notwendig und hinreichend*

$$a_{\alpha\beta\gamma} = 0.$$

Beweis. Aus $a_{\alpha\beta\gamma} = 0$ folgt $g_{ijk}\, e^i_\alpha\, e^j_\beta\, e^k_\beta = 0$, und da auch $g_{ijk}\, e^i = 0$, folgt aus $g_{ijk} = 0$, daß die Bedingung hinreichend ist. Ihre Notwendigkeit ist selbstverständlich.

Andere ebenfalls sehr einfache, aber wichtige Beziehungen ergeben sich aus dem Verhältnis von E und der Figuratrix E^*. Da nach § 1 die Abbildung $x_i = g_{ik}(x)\, x^k$ eine Isometrie zwischen Raum und Dualraum vermittelt, und da E bei dieser Abbildung in E^* übergeführt wird, sind auch die beiden Flächen E und E^* isometrisch:

(3) $$\gamma^*_{\alpha\beta} = g^{ik}(e)\, e_{i\alpha}\, e_{k\beta} = \gamma_{\alpha\beta}.$$

Die Metrik auf der Eichfläche E dient uns zur Einführung eines die räumlichen Polarkoordinaten des euklidischen Raumes verallgemeinernden Koordinatensystems, das wir ebenfalls als Polarkoordinatensystem bezeichnen wollen. Seien u^β wieder die Parameter der Eichfläche E; dann führen wir die neuen krummlinigen Koordinaten ein mittels

$$\bar{x}^\beta = u^\beta\,(x^i \,/\, F(x))$$
$$\bar{x}^n = F(x^i).$$

Das Transformationsgesetz für den Fundamentaltensor ergibt für diesen in den neuen Koordinaten

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = F^2\, \gamma_{\alpha\beta}$$
$$\bar{g}_{nk} = \delta_{nk},$$

so daß das Bogenelementquadrat in den zentralaffinen Polarkoordinaten die Form hat

$$ds^2 = F^2\, d\sigma^2 + (dF)^2,\quad d\sigma^2 = \gamma_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta.$$

Daraus folgt: *Zwei Flächen sind dann und nur dann isometrisch, wenn die zugehörigen Riemannschen Raummetriken isometrisch sind.*

Insbesondere läßt sich im Falle $n = 2$ stets eine isometrische Abbildung eines Stückes der Eichkurve auf einen Bogen eines Kreises einer euklidischen Geometrie (definiter Fall) oder einen Hyperbelbogen (indefiniter Fall) herstellen. Da in diesen beiden Fällen die RIEMANNsche Krümmung der Metrik des zweidimensionalen Raumes verschwindet, haben wir einen neuen Beweis für die bereits in § 1 bewiesene Tatsache

II. 2. 3. *Die Riemannsche Krümmung der Metrik* g_{ik} *ist im Falle* $n = 2$ *identisch gleich* 0.

In § 6 werden wir an Beispielen sehen, daß für $n > 2$ Entsprechendes i. a. nicht gilt.

*§ 3. Induzierte Hyperflächenmetrik und Fundamentalformen für eine allgemeine Hyperfläche F

Sei $F: x^i = x^i(u^\beta)$ eine von der Eichfläche $E: e^i = e^i(u^\beta)$ nicht notwendig verschiedene Hyperfläche, die in dem von E aufgespannten Raumsektor S liege und von der wir annehmen, daß die Parameter so gewählt seien, daß

(1) $$x^i(u) = a(u)\, e^i(u), \; a(u) > 0.$$

(Sogenannte radiale Beziehung der beiden Flächen.)
Da F zugleich Untermannigfaltigkeit des von E erzeugten Riemannschen Raumes ist, wird in F eine Riemannsche Metrik induziert:

(2) $$g_{\alpha\beta}(u) = g_{ik}(x(u))\, x^i_\alpha x^k_\beta; \; x^k_\beta = \frac{\partial x^k}{\partial u^\beta}.$$

Diese quadratische Form bezeichnen wir als erste oder metrische Fundamentalform von F. Der Normalvektor n^i der Fläche F wird so bestimmt, daß

(3) $$g_{ik}(x)\, n^i n^k = 1, \quad g_{ik}(x)\, n^i x^k > 0, \quad g_{ik}(x)\, n^i x^k_\beta = 0.$$

(Die zweite dieser Bedingungen läßt sich nur dann erfüllen, wenn die Tangentialebene von F nicht durch 0 geht, wenn also die Abbildung zwischen den beiden Flächen auch „im Infinitesimalen eineindeutig" ist; das wollen wir voraussetzen.)

Die zweite Fundamentalform einer Hyperfläche in einem Riemannschen Raum wird allgemein definiert durch (Schouten [1])

$$l_{\alpha\beta} = -\, x^i_\alpha\, n_{k;i}$$

(; für kovariante Ableitung), und das ergibt in unserem speziellen Falle

$$l_{\alpha\beta} = -\, x^i_\alpha x^k_\beta g_{kj} n^j_{;i} = -\, x^i_\alpha x^k_\beta g_{kj} (n^j_{,i} + \tfrac{1}{2} g^{js} g_{rsi} n^r)$$

(4) $$l_{\alpha\beta} = -\, g_{kj} x^k_\beta n^j_{,i} x^i_\alpha - \tfrac{1}{2} g_{iks} x^i_\alpha x^k_\beta n^s.$$

Bezeichnen wir diejenigen Größen, die sich speziell für $F = E$ ergeben, mit den entsprechenden griechischen Kernbuchstaben, so ergibt sich für den Normalvektor ν^i und für die erste und zweite Fundamentalform von E

(5) $$\nu^i = e^i$$

(6) $$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik}(e)\, e^i_\alpha e^k_\beta$$

(7) $$\lambda_{\alpha\beta} = -\, \gamma_{\alpha\beta}.$$

Gleichungen (5) und (7) besagen, daß für E genau dieselben Verhältnisse gelten wie für die Einheitskugel eines euklidischen Raumes: Der Normalvektor ist – vom unwesentlichen Vorzeichen abgesehen – gleich dem Radiusvektor, und alle Punkte sind Nabelpunkte.

Um den allgemeinen Ausdruck (4) für die zweite Fundamentalform noch umzuformen, führen wir eine Hilfsbetrachtung durch, die uns zu einer „affinkovarianten" Ableitung führen wird. Sei $v^i(u^\beta)$ ein auf der Fläche definiertes Vektorfeld; dieses denken wir uns homogen in den Raum fortgesetzt:

$$v^i(x^k) = v^i(a \cdot e^k) = v^i(u) \text{ für } x^k = a \cdot e^k(u^\beta).$$

Dann bezeichnen wir mit

$$v^i_{\|r} = \frac{\partial v^i}{\partial x^r} + \tfrac{1}{2} g^{il} g_{lsr} v^s \tag{8a}$$

die raumkovariante Ableitung dieses Vektorfeldes, und mit

$$v^i_{\|\beta} = v^i_{\|r} x^r_\beta \tag{8}$$

deren Flächenkomponenten.
Es sei zusätzlich bemerkt, daß wegen der Homogenität gilt

$$v^i_{\|r} x^r = 0,$$

und daß $v^i_{\|\beta}$ i. a. nicht die flächenkovariante Ableitung des Feldes $v^i(u)$ ist; dies sieht man im Falle $g_{ijk} = 0$, der für die euklidische Differentialgeometrie vorliegt. In diesem Falle wird $v^i_{\|\beta}$ nämlich einfach gleich der gewöhnlichen Ableitung $v^i_{,\beta}$. Es wird sich sogleich ergeben, daß die affinkovariante Ableitung (8) die natürliche Verallgemeinerung der gewöhnlichen Ableitung ist.

Mit Hilfe der Definition aus Gleichung (8) schreibt sich (4) nun

$$l_{\alpha\beta} = - g_{kj} n^k_{\|\beta} x^j_\alpha. \tag{9}$$

Wir kommen jetzt zur Herleitung der Ableitungsgleichungen für das Begleitsystem n^i, x^i_β. Aus (9) folgt bereits

$$n^k_{\|\beta} = - l^\varrho_\beta x^k_\varrho \tag{10}$$

mit

$$l^\varrho_\beta = g^{\varrho\gamma} l_{\gamma\beta}; \quad g^{\varrho\beta} g_{\beta\alpha} = \delta^\varrho_\alpha.$$

(Dabei wird also vorausgesetzt, daß die Flächenmetrik $g_{\alpha\beta}$ nicht ausgeartet ist.) Die Beziehung (10) ist die Verallgemeinerung der Weingartenschen Ableitungsgleichungen der elementaren Flächentheorie.

Macht man für

$$x^k_{\alpha\|\beta} = x^k_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2} g^{kr} g_{rsj} x^s_\alpha x^j_\beta$$

den Ansatz

$$x^k_{\alpha\|\beta} = D^{\varrho}_{\alpha\beta}\, x^k_{\varrho} + d_{\alpha\beta}\, n^k, \tag{11}$$

so ergibt sich durch Überschieben mit $g_{kl}(x)\, n^l$:

$$d_{\alpha\beta} = g_{kl}\, x^k_{\alpha\|\beta}\, n^l = g_{kl}\, x^k_{\alpha\beta}\, n^l + \tfrac{1}{2}\, g_{klj}\, x^k_{\alpha}\, x^j_{\beta}\, n^l,$$

also wegen (4)

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^\beta}\,(g_{lk}\, x^l_\alpha\, n^k) = g_{lkj}\, x^l_\alpha\, x^j_\beta\, n^k + g_{lk}\, x^l_{\alpha\beta}\, n^k + g_{lk}\, x^l_\alpha\, n^k_\beta$$

$$= (g_{lk}\, x^l_{\alpha\beta}\, n^k + \tfrac{1}{2}\, g_{lkj}\, x^l_\alpha\, x^j_\beta\, n^k) + (g_{lk}\, x^l_\alpha\, x^k_\beta + \tfrac{1}{2}\, g_{lkj}\, x^l_\alpha\, x^j_\beta\, n^k) = d_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta},$$

mithin

$$d_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}. \tag{12}$$

Zur Bestimmung von $D^{\varrho}_{\alpha\beta}$ überschieben wir (11) mit $g_{lk}\, x^l_\gamma$ und erhalten

$$g_{lk}\, x^l_\gamma\, x^k_{\alpha\|\beta} = D^{\varrho}_{\alpha\beta}\, g_{\varrho\gamma}. \tag{13}$$

Nun ist wegen $g_{\alpha\beta} = g_{ik}\, x^i_\alpha\, x^k_\beta$

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial u_\gamma} = g_{ikj}\, x^i_\alpha\, x^k_\beta\, x^j_\gamma + g_{ik}\, x^i_{\alpha\gamma}\, x^k_\beta + g_{ik}\, x^i_\alpha\, x^k_{\beta\gamma} = g_{ik}\, x^i_{\alpha\|\gamma}\, x^k_\beta + g_{ik}\, x^i_\alpha\, x^k_{\beta\|\gamma}.$$

Daraus ergibt sich für die Christoffelsymbole der Metrik $g_{\alpha\beta}$

$$\{\alpha\beta, \gamma\} = g_{ik}\, x^k_\gamma\, x^l_{\alpha\|\beta}. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) zusammen erhält man

$$D^{\varrho}_{\alpha\beta} = \left\{ {\varrho \atop \alpha\beta} \right\} \tag{15}$$

Die verallgemeinerten Gaussschen Ableitungsgleichungen drücken sich nun vermöge (12) und (15) aus:

$$x^i_{\alpha\|\beta} = \left\{ {\varrho \atop \alpha\beta} \right\} x^i_\varrho + l_{\alpha\beta}\, n^i. \tag{16}$$

Die Ableitungsgleichungen (10) und (16) sind formal ganz entsprechend gebaut wie die analogen Formeln der elementaren Flächentheorie, wenn man die gewöhnliche Ableitung durch die affinkovariante Ableitung (8) ersetzt.

Die Ableitungsgleichungen kann man in üblicher Weise zur direkten Herleitung von notwendigen und hinreichenden Integrabilitätsbedingungen verwenden. Da diese Rechnungen prinzipiell keine Schwierigkeiten bereiten und die allgemeinen Integrabilitätsbedingungen für uns hier kein Interesse haben, begnügen wir uns damit, denjenigen Teil der Integrabilitätsbedingungen, der sich aus der allgemeinen Theorie der Hyperflächen in Riemannschen Räumen ergibt, direkt von dort zu übernehmen (SCHOUTEN [1], S. 242):

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{ijkl}\, x^i_\alpha\, x^j_\beta\, x^k_\gamma\, x^l_\delta - (l_{\alpha\gamma}\, l_{\beta\delta} - l_{\alpha\delta}\, l_{\beta\gamma}) \tag{17a}$$

$$l_{\beta\gamma;\delta} - l_{\beta\delta;\gamma} = x^j_\beta\, x^k_\gamma\, x^l_\delta\, R_{ijkl}\, n^i. \tag{17b}$$

(Dabei bezeichnet „;" wieder die kovariante Ableitung in der Fläche, R_{ijkl} bzw. $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$ die Riemannschen Krümmungstensoren des Raumes bzw. der Fläche.)

Wir wollen die erhaltenen Ergebnisse nun auf den wichtigsten Spezialfall, daß F mit der Eichfläche E selbst zusammenfällt, anwenden. Von den Ableitungsgleichungen bleiben wegen der Trivialität des Normalvektors $\nu^i = e^i$ nur noch die „GAUSSschen" Gleichungen übrig:

$$e^i_{\alpha\|\beta} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} e^i_\varrho - \gamma_{\alpha\beta}\, e^i.$$

Dabei wird hier

$$e^i_{\alpha\|\beta} = e^i_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\, g^{ir}\, g_{rst}\, e^t_\alpha\, e^s_\beta.$$

Weil

$$g^{ir} = \gamma^{\varrho\sigma}\, e^i_\varrho\, e^r_\sigma + e^i\, e^r,$$

wird dies

$$e^i_{\alpha\|\beta} = e^i_{\alpha\beta} + \tfrac{1}{2}\, \gamma^{\varrho\sigma}\, g_{rst}\, e^r_\sigma\, e^s_\alpha\, e^t_\beta\, e^i_\varrho.$$

Setzt man wie in Gleichung (2) aus § 2

$$a_{\alpha\beta\sigma} = \tfrac{1}{2}\, g_{rst}\, e^r_\sigma\, e^s_\alpha\, e^t_\beta \tag{18}$$

$$a^\varrho_{\alpha\beta} = g^{\varrho\sigma}\, a_{\alpha\beta\sigma},$$

so schreiben sich die GAUSSschen Ableitungsgleichungen für die Eichfläche E:

$$e^i_{\alpha\beta} = \left(\begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} - a^\varrho_{\alpha\beta}\right) e^i_\varrho - \gamma_{\alpha\beta}\, e^i. \tag{19}$$

Dies sind die Ableitungsgleichungen der zentralaffinen Flächentheorie. Von den Integrabilitätsbedingungen (17) ist in diesem Falle nur (17a) interessant und ergibt

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = e^i_\alpha\, e^j_\beta\, e^k_\gamma\, e^l_\delta\, R_{ijkl} - (\gamma_{\alpha\gamma}\, \gamma_{\beta\delta} - \gamma_{\alpha\delta}\, \gamma_{\beta\gamma}) \tag{20}$$

als Zusammenhang zwischen den Krümmungstensoren von Raum und Fläche. (Diesen formalen Zusammenhang hat auch VARGA [2] angegeben, ohne aber den Bezug zur zentralaffinen Flächentheorie zu bemerken.)

Als Anwendungen der Ableitungsgleichungen (19) beweisen wir noch zwei Sätze über die kubische Fundamentalform der Eichfläche E.

II. 3. 1. $a_{\alpha\beta\gamma}$ *ist identisch mit der (für endlichdimensionale Vektorräume) nach* SALKOWSKI [1] *definierten kubischen Fundamentalform*

$$\bar{a}_{\alpha\beta\gamma} = (e^i_{\alpha;\beta;\gamma}, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1}) \,/\, (e^i, e^i_1, \ldots, e^i_{n-1}).$$

Beweis. Wegen des Hilfssatzes aus § 1 ist

$$\bar{a}_{\alpha\beta\gamma} = g_{ik}(e)\, e^i e^k_{\alpha;\beta;\gamma}.$$

Die Ableitungsgleichung (19) läßt sich auch schreiben

$$e^i_{\alpha;\beta} = -a^\varrho_{\alpha\beta}\, e^i_\varrho - \gamma_{\alpha\beta}\, e^i,$$

so daß

$$g_{ik}\, e^i_\gamma\, e^k_{\alpha;\beta} = -a_{\alpha\beta\gamma}.$$

Aus

$$\gamma_{\alpha\beta} = -g_{ik}\, e^i e^k_{\alpha\beta} = -g_{ik}\, e^i e^k_{\alpha;\beta}$$

folgt mittels kovarianter Differentiation unter Ausnutzung des Lemmas von RICCI:

$$0 = g_{ik}\, e^i_\gamma\, e^k_{\alpha;\beta} + g_{ik}\, e^i e^k_{\alpha;\beta;\gamma}$$

oder

$$0 = -a_{\alpha\beta\gamma} + \bar{a}_{\alpha\beta\gamma},$$

was behauptet war.

Wir hatten bereits in § 2 bewiesen, daß die metrischen Fundamentalformen der Eichfläche E und der zu ihr dualen Flächen E^* im Dualraum in entsprechenden Punkten übereinstimmen. Wir wollen nun den Zusammenhang zwischen den kubischen Fundamentalformen beider Flächen untersuchen und beweisen dazu den folgenden Satz, der sich für $n = 3$ im wesentlichen bereits bei SALKOWSKI [1] findet.

II. 3. 2. *Für die Fundamentalformen der zur Eichfläche E dualen Fläche E^* im Dualraum gilt*

$$a^*_{\alpha\beta\gamma} = -a_{\alpha\beta\gamma}, \; \gamma^*_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}.$$

Beweis. Nach Definition ist

$$a^*_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\, g^{ijk}\, x_{i\alpha}\, x_{j\beta}\, x_{k\gamma}$$

mit $x_i = g_{ir}\, x^r$, also $x_{i\beta} = g_{ir}\, x^r_\beta$ (unter Benutzung der EULERschen Homogenitätsrelation). Daher ist

$$a^*_{\alpha\beta\gamma} = \tfrac{1}{2}\, g^{ijk}\, g_{ir}\, g_{js}\, g_{kt}\, x^r_\alpha\, x^s_\beta\, x^t_\gamma,$$

und wegen

$$g^{ij}\, g_{ir} = \delta^j_r$$

gilt

$$g^{ijk} \frac{\partial (x_k)}{\partial x^t} g_{ir} + g^{ij} g_{irt} = 0$$

oder

$$g^{ijk} g_{kt} g_{ir} = - g^{ij} g_{irt},$$

so daß schließlich folgt

$$a^*_{\alpha\beta\gamma} = - \tfrac{1}{2} g^{ij} g_{irt} g_{js} x^r_\alpha x^s_\beta x^t_\gamma = - \tfrac{1}{2} g_{irt} x^r_\alpha x^i_\beta x^t_\gamma = - a_{\alpha\beta\gamma}.$$

*§4. Kurven auf der Eichfläche

Wir haben in § 3 bereits gesehen, daß die zweite Fundamentalform der Eichfläche E (welche als Untermannigfaltigkeit des mit der von ihr selbst erzeugten Metrik versehenen Raumes betrachtet wird) bis aufs Vorzeichen mit der metrischen Fundamentalform übereinstimmt; daher ist die Normalkrümmung im Sinne der Theorie der Riemannschen Räume

$$k_n = \lambda_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds}$$

einer auf die Riemannsche Bogenlänge s als Parameter bezogenen Flächenkurve $u^\beta = u^\beta(s)$ stets identisch gleich 1. Interessant ist daher nur noch der flächenhafte Anteil des Krümmungsvektors

$$(1) \qquad \frac{d^2 e^i}{ds^2} = \frac{d}{ds} \left(e^i_\beta \frac{du^\beta}{ds} \right) = e^i_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{ds} \frac{du^\beta}{ds} + e^i_\beta \frac{d^2 u^\beta}{ds^2}.$$

Dieser Vektor gestattet nach den Ableitungsgleichungen die Umformung

$$(2) \qquad \frac{d^2 e^i}{ds^2} = e^i_\beta \left(\frac{d^2 u^\beta}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \varrho\sigma \end{matrix} \right\} \frac{du^\varrho}{ds} \frac{du^\sigma}{ds} - a^\beta_{\varrho\sigma} \frac{du^\varrho}{ds} \frac{du^\sigma}{ds} \right) - e^i,$$

sein flächenhafter Anteil ist also gegeben durch den Flächenvektor

$$(3) \qquad k^i = k^\beta x^i_\beta; \quad k^\beta = \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} + \left(\left\{ \begin{matrix} \beta \\ \varrho\sigma \end{matrix} \right\} - a^\beta_{\varrho\sigma} \right) \frac{du^\varrho}{ds} \frac{du^\sigma}{ds}.$$

In Anlehnung an eine alte Gausssche Bezeichnung wollen wir diesen Flächenvektor die *Seitenkrümmung* der Flächenkurve nennen. Außerdem ist, wenn man E als Untermannigfaltigkeit eines Riemannschen Raumes betrachtet, die geodätische Krümmung von Interesse; ihr Vektor ist

$$(4) \qquad k^\beta_g = \frac{d^2 u^\beta}{ds^2} + \left\{ \begin{matrix} \beta \\ \varrho\sigma \end{matrix} \right\} \frac{du^\varrho}{ds} \frac{du^\sigma}{ds}.$$

Da $a^\beta_{\varrho\sigma} du^\varrho du^\sigma = 0$ für alle du^ϱ dann und nur dann gilt, wenn $a_{\alpha\beta\gamma} = 0$, die Fläche also ein Quadrik ist, haben wir

II. 4. 1. *Der Flächenanteil der Kurvenkrümmung (die Seitenkrümmung) k^β ist dann und nur dann für alle Kurven auf der Fläche E gleich der geodätischen Krümmung, wenn die Fläche E eine Quadrik mit Mittelpunkt* o *ist.*

Man kann sich nun für die Kurven verschwindender geodätischer Krümmung $k_g^\beta = 0$ und für die Kurven verschwindender Seitenkrümmung $k^\beta = 0$ interessieren. Die ersteren Kurven sind dabei die kürzesten Linien auf der Fläche (genauer: Linien stationärer Länge), die letzteren sind die Autoparallelkurven des symmetrischen Affinzusammenhangs $A^\varrho_{\alpha\beta}$ mit den Übertragungskoeffizienten

$$A^\varrho_{\alpha\beta} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} - a^\varrho_{\alpha\beta}.$$

Ist $e^i(t)$ eine Autoparallelkurve dieser Übertragung $A^\varrho_{\alpha\beta}$, also

$$\frac{d^2 u^\varrho}{dt^2} + A^\varrho_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} = 0 \tag{5}$$

für einen geeigneten Parameter $t = t(s)$, so gilt

$$\frac{d^2 e^i}{dt^2} = e^i_\varrho \left(\frac{d^2 u^\varrho}{dt^2} + A^\varrho_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} \right) - \gamma_{\alpha\beta} \frac{du^\alpha}{dt} \frac{du^\beta}{dt} e^i = - \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 e^i. \tag{6}$$

Die Änderung des Tangentialvektors ist also proportional zum Ortsvektor. Daraus folgt daß die Lösungskurven der Differentialgleichungen (6) die ebenen Schnitte der Fläche E mit 2-dimensionalen Ebenen durch den Nullpunkt sind:

II. 4. 2. *Die Kurven verschwindender Seitenkrümmung sind die ebenen Nullpunktsschnitte der Eichfläche E.*

(Dadurch rechtfertigt sich auch die Bezeichnung „Seitenkrümmung": Diese ist ein Maß für die Abweichung der Kurve von der Ebene durch den Nullpunkt und die Tangentenrichtung.)

Wir haben damit eine Eigenschaft der Großkreise der Kugel in der euklidischen Geometrie, welche sich auf die Autoparallelkurven der Eichfläche E verallgemeinert. Sie läßt sich noch in anderer Weise geometrisch bedeuten. Projizieren wir die Fläche E von o aus auf eine den Nullpunkt nicht enthaltende Hyperebene (verallgemeinerte gnomonische Projektion), so gehen die Autoparallelkurven der Übertragung $A^\varrho_{\alpha\beta}$ in die Geraden der Hyperebene über. Diese Abbildung führt also Geodätische in Geodätische über – sie ist „geodätisch" – genau wie die gnomonische Projektion der Kugelfläche. Überträgt man von dieser Bildhyperebene ein affines Koordinatensystem vermöge der Umkehrung der gnomonischen Projektion auf die Eichfläche E, so folgt unter Verwendung eines Weylschen Satzes über geodätische Abbildungen (vgl. auch Schouten [1]):

II. 4. 3. *Die Übertragung $A^\varrho_{\alpha\beta}$ ist projektiv-euklidisch, d. h. es existiert eine geodätische Abbildung in einen $(n - 1)$-dimensionalen euklidisch-affinen Raum. In einem geeigneten Koordinatensystem gilt daher*

$$A^\varrho_{\alpha\beta} = \delta^\varrho_\alpha \varphi_\beta + \delta^\varrho_\beta \varphi_\alpha$$

und in beliebigen Koordinaten

$$A^{\varrho}_{\alpha\beta} = \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta} + \delta^{\varrho}_{\alpha}\,\psi_{\beta} + \delta^{\varrho}_{\beta}\,\psi_{\alpha}$$

mit einem integrablen Affinzusammenhang $\Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}$ *und einem Vektor* ψ_{β}.

Wann sind die Geodätischen der Flächenmetrik $\gamma_{\alpha\beta}$ ebenfalls die ebenen Nullpunktsschnitte, oder, was dasselbe besagt, wann gehen diese Geodätischen bei der gnomonischen Projektion ebenfalls in die Geraden über? Dafür ist nach dem erwähnten WEYLschen Satze notwendig und hinreichend, daß

$$\begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} = A^{\varrho}_{\alpha\beta} + \delta^{\varrho}_{\alpha}\,\sigma_{\beta} + \delta^{\varrho}_{\beta}\,\sigma_{\alpha}$$

also

$$a^{\varrho}_{\alpha\beta} = \delta^{\varrho}_{\alpha}\,\sigma_{\beta} + \delta^{\varrho}_{\beta}\,\sigma_{\alpha}.$$

Verjüngung ergibt

$$a^{\varrho}_{\varrho\beta} = a_{\beta} = (n-1)\,\sigma_{\beta} + \sigma_{\beta} = n\cdot\sigma_{\beta},$$

also

$$n\cdot a^{\varrho}_{\alpha\beta} = \delta^{\varrho}_{\alpha}\,a_{\beta} + \delta^{\varrho}_{\beta}\,a_{\alpha}$$

oder

$$(+) \qquad n\cdot a_{\alpha\beta\gamma} = \gamma_{\gamma\beta}\,a_{\alpha} + \gamma_{\alpha\gamma}\,a_{\beta}.$$

Daraus folgt wegen der Symmetrie der $a_{\alpha\beta\gamma}$:

$$0 = n\,(a_{\alpha\beta\gamma} - a_{\alpha\gamma\beta}) = \gamma_{\alpha\gamma}\,a_{\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\,a_{\gamma}$$

oder

$$0 = \gamma^{\alpha\gamma}\,(\gamma_{\alpha\gamma}\,a_{\beta} - \gamma_{\alpha\beta}\,a_{\gamma}) = (n-1)\,a_{\beta} - a_{\beta} = (n-2)\,a_{\beta}.$$

Da $n \geqq 3$, folgt $a_{\beta} = 0$ und nach Einsetzen in (+) $a_{\alpha\beta\gamma} = 0$, womit wir den Satz bewiesen haben:

II. 4. 4. *Die Geodätischen der Flächenmetrik* $\gamma_{\alpha\beta}$ *fallen dann und nur dann mit den ebenen Nullpunktsschnitten von E zusammen, wenn E eine Quadrik mit Mittelpunkt* 0 *ist.*

Man kann noch fragen, wann der affine Parameter t auf den Autoparallelen von $A^{\varrho}_{\alpha\beta}$ (d. h. der bis auf lineare Transformationen bestimmte Parameter t, für den

$$\frac{d^2u^{\varrho}}{dt^2} + A^{\varrho}_{\alpha\beta}\,\frac{du^{\alpha}\,du^{\beta}}{dt\;\;dt} = 0\Big)$$

proportional zur Bogenlänge s ist. Wegen Gleichung (6) läßt sich dann erreichen

$$\frac{d^2u^i}{ds^2} = \pm\, e^i \text{ je nachdem } ds^2 \lesseqgtr 0, \quad \text{also}$$

$$e^i = \underset{0}{e^i}\,\cosh s + \underset{1}{e^i}\,\sinh s$$

bzw.

$$e^i = \underset{0}{e^i} \cos s + \underset{1}{e^i} \sin s.$$

Die Autoparallelkurven sind dann also Kegelschnitte mit Mittelpunkt o. Damit haben wir den Satz:

II. 4. 5. *Der affine Parameter t auf einer (nach 4. 2 ebenen) Autoparallelkurve von $A^{\varrho}_{\alpha\beta}$ ist dann und nur dann proportional zur Bogenlänge, wenn die Kurve eine Kurve zweiter Ordnung mit Zentrum* o *ist.*

Da alle Flächen, deren ebene Schnitte durch o Kegelschnitte mit Mittelpunkt o sind, selbst Quadriken mit dem Zentrum o sind (für einen Beweis sehe man etwa LAUGWITZ [5], Lemma auf S. 22–23), ergibt sich als Korollar noch eine weitere Kennzeichnung der Quadriken mit Mittelpunkt o:

II. 4. 6. *Der affine Parameter auf den Autoparallelen von $A^{\varrho}_{\alpha\beta}$ ist dann und nur dann auf allen diesen Kurven proportional zur Bogenlänge, wenn E eine Quadrik mit Mittelpunkt* o *ist.*

Wir wollen als Anwendung von II. 4. 4 einen bekannten Satz von H. BRUNN [1] verallgemeinern, welcher besagt, daß die Ellipsoide mit Mittelpunkt o die einzigen Flächen (konvex, beschränkt, geschlossen) sind, welche an jeder Ebene durch o affin gespiegelt werden können, so daß sie dabei in sich übergehen. Dieser Satz, der seit BRUNN stets nur für konvexe Flächen bewiesen wurde (ein von Differenzierbarkeitsannahmen freier Beweis findet sich bei DANZER, LAUGWITZ und LENZ [1]), läßt sich auf beliebige Flächen ohne parabolische Punkte verallgemeinern:

II. 4. 7. *Gestattet eine Fläche mit den Eigenschaften (A) — (C) aus* II, § 1 *Affinspiegelungen an jeder Ebene, welche den Nullpunkt und eine Tangentenrichtung der Fläche enthält, so ist die Fläche notwendig eine Quadrik mit Mittelpunkt* o. *($n = 3$)*

Beweis. Wir betrachten einen beliebigen Punkt auf der Fläche E und in diesem irgendeine Tangentenrichtung. Sei g die durch dieses Linienelement gehende, eindeutig bestimmte Geodätische der Flächenmetrik. Ist A eine Affinspiegelung, die o und das Linienelement fest läßt und die Fläche E in sich überführt, so muß unter A die Flächenmetrik und damit wegen der Eindeutigkeit der Geodätischen auch g fest bleiben. Daraus folgt, daß g in der durch o und das Linienelement bestimmten Ebene liegt. Da man diese Betrachtung für alle Geodätischen durchführen kann, folgt aus II. 4. 4 die Behauptung.

*§ 5. Kurventheorie in der allgemeinen Hyperfläche F.

Bevor wir zur Behandlung der Kurven in der nicht notwendig mit der Eichfläche E zusammenfallenden Fläche F kommen, ist einiges über Raumkurven unabhängig von ihrer Einbettung in eine Fläche zu bemerken. Wir nehmen dabei hier der Einfachheit halber an, daß die Kurve keinen Punkt mit ametrischer Tangente besitze, eine Forderung, die z. B. dann gar keine Einschränkung bedeutet, wenn die Eichfläche E streng konvex ist und man sich – wie wir es hier stets tun – auf reelle Gebilde beschränkt. (Wir ziehen die auf J. LENSE [1] zurückgehende Bezeichnung „ametrisch" dem oft verwendeten Namen „isotrop" vor, weil das Wort „isotrop" für eine mit dem Wortsinn besser verträgliche andere Verwendung im letzten Abschnitt der vorliegenden Arbeit reserviert bleiben soll.)

Da eine Raumkurve hier als eingebettet in dem von der Eichfläche E erzeugten Riemannschen Raume erscheint, kann man die induzierte Riemannsche Bogenlänge als Parameter wählen, $x^i = x^i(s)$, und aus der allgemeinen Theorie der Riemannschen Räume ergibt sich das vollständige Invariantensystem der $n - 1$ Krümmungen (bei Raumdimension $n \geqq 2$) bzw. der abzählbar unendlich vielen Krümmungen (bei beliebig unendlicher Raumdimension), welche in den FRENETschen Formeln auftreten:

$$(1)\qquad \begin{aligned} \frac{Dv^i_{(r)}}{ds} &= -k_{(r-1)}\, v^i_{(r-1)} + k_{(r)}\, v^i_{(r+1)} \\ k_{(n)} &= k_{(0)} \underset{\text{def}}{=} 0, \quad r = 1, \dots, n \text{ bezw. } \infty. \end{aligned}$$

Dabei entstehen die Vektoren $v^i_{(r)}$ bekanntlich durch Orthogonalisierung nach E. SCHMIDT aus den kovarianten Ableitungen des Tangentialvektors. (Die FRENETschen Formeln für den n-dimensionalen Riemannschen Raum sind von W. BLASCHKE [2] angegeben worden; die Verallgemeinerung auf unendliche Raumdimension findet sich in einer Arbeit des Verf. [1].)

Insbesondere interessiert uns hier die erste Krümmung $k_{(1)}$, für welche gilt

$$(2)\qquad \frac{D}{ds}\frac{dx^i}{ds} = k_{(1)}\, v^i_{(2)},$$

die also gleich der Länge der kovarianten Ableitung des Tangentialvektors ist. Den Vektor (2) werden wir als den Riemannschen Krümmungsvektor der Kurve $x^i(s)$ bezeichnen. In der allgemeinen Theorie der Riemannschen Räume wird in dieser Weise die Krümmung einer Kurve erklärt; daher bietet sich hier nach Einführung der durch die Eichfläche E erzeugten Raummetrik sofort die Möglichkeit einer affininvarianten Erklärung der Kurvenkrümmung und aller anderen Invarianten einer Kurve. Bei uns ist nun aber gar nicht – wie sonst in der Riemannschen Geometrie – die Gruppe aller topologischen (differenzierbaren) Transformationen des Raumes von Interesse, sondern es genügt uns bereits Invarianz gegenüber der homogen-linearen Gruppe. Unter diesen Transformationen ist aber auch der Vektor d^2x^i/ds^2 invariant, den wir als den zentralaffinen Krümmungsvektor der Kurve bezeichnen können. Seine Länge bezeichnen wir als die zentralaffine Kurvenkrümmung. Es ist leicht zu sehen, daß zentralaffine und Riemannsche Kurvenkrümmung dann und nur dann für alle Raumkurven übereinstimmen, wenn die Eichfläche E eine Quadrik mit Mittelpunkt o ist.

Die Ableitungsgleichungen ergeben für eine in der Fläche $F: x^i = x^i(u^\beta)$ gelegene Kurve $x^i(s) = x^i(u^\beta(s))$

$$(3)\qquad \begin{aligned} \frac{Dx^i}{ds} &= x^i_{\alpha\beta}\, \dot u^\alpha \dot u^\beta + x^i_\varrho\, \ddot u^\varrho = \\ &= \left(\ddot u^\varrho + \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} \dot u^\alpha \dot u^\beta\right) x^i_\varrho + l_{\alpha\beta}\, \dot u^\alpha \dot u^\beta\, n^i. \end{aligned}$$

($\cdot$ für Ableitung nach der Bogenlänge.) Natürlich ist wegen unseres Ansatzes der Flächenvektor der geodätischen Krümmung

$$k_g^\beta = \ddot{u}^\beta + \begin{Bmatrix} \beta \\ \varrho\sigma \end{Bmatrix} \dot{u}^\varrho \dot{u}^\sigma$$

gerade der Riemannsche Krümmungsvektor in der Flächenmetrik. Sein Verschwinden kennzeichnet die Kurven stationärer Länge. Der Skalar

$$k_n = \frac{l_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}{g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta} \tag{4}$$

bezeichnet die Riemannsche Normalkrümmung.

Um nun auch noch den zentralaffinen Krümmungsvektor in flächenhaften und normalen Anteil zu zerlegen, wollen wir die Ableitungsgleichungen aus § 3 (Gleichung 16) geeignet umformen. Wegen der Beziehung

$$g^{il} = x_\varrho^i\, x_\sigma^l\, g^{\varrho\sigma} + n^i n^l \tag{5}$$

ergibt sich aus der Gleichung II. 3. (16)

$$x_{\alpha\beta}^i = x_\varrho^i \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} - \tfrac{1}{2}\, g^{il}\, g_{lsr}\, x_\alpha^s\, x_\beta^r + l_{\alpha\beta}\, n^i = x_\varrho^i \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} - \tfrac{1}{2}\, x_\varrho^i\, g^{\varrho\sigma}\, x_\sigma^l\, g_{lsr}\, x_\alpha^s\, x_\beta^r -$$

$$- \tfrac{1}{2}\, n^i\, g_{lsr}\, x_\alpha^s\, x_\beta^r\, n^l + l_{\alpha\beta}\, n^i,$$

so daß wir für den tangentiellen Anteil der zentralaffinen Krümmung die „Seitenkrümmung" erhalten:

$$k_s^\varrho = \ddot{u}^\varrho + \begin{Bmatrix} \varrho \\ \sigma\beta \end{Bmatrix} \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta - \tfrac{1}{2}\, g^{\varrho\sigma}\, g_{lsr}\, x_\alpha^s\, x_\beta^r\, x_\sigma^l\, \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta. \tag{6}$$

Als Normalanteil ergibt sich die zentralaffine Normalkrümmung

$$k_n = \frac{\left(l_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2}\, g_{lsr}\, x_\alpha^s\, x_\beta^r\, n^l\right) du^\alpha\, du^\beta}{g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta} = \frac{\bar{l}_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}{g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta}. \tag{7}$$

Führt man noch ein

$$n^l = n x^l + n^\varrho x_\varrho^l \tag{8}$$

$$\tfrac{1}{2}\, g_{lsr}\, x_\alpha^s\, x_\beta^r\, x_\gamma^l = b_{\alpha\beta\gamma}, \tag{9}$$

so gilt

$$\bar{l}_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta} - b_{\alpha\beta\gamma}\, n^\gamma$$

$$k_s^\varrho = k_g^\varrho - g^{\varrho\sigma}\, b_{\alpha\beta\sigma}\, \dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta.$$

Die zentralaffine DUPINsche Indikatrix werde durch die Schnitte der Fläche mit zur Tangentialebene benachbarten, zu ihr parallelen Hyperebenen definiert. Wegen

$$g_{ik}(x)\, n^i\, x^k_{\alpha\beta} = \bar{l}_{\alpha\beta}$$

ergibt sie sich als das Gebilde

$$\bar{l}_{\alpha\beta}\, \xi^\alpha\, \xi^\alpha = \pm 1$$

in der Tangentialhyperebene. Aus dieser Konstruktion folgt noch, daß $\bar{l}_{\alpha\beta}$ proportional zur zweiten Fundamentalform der bewegungsinvarianten Geometrie ist.

Sowohl die Riemannsche als auch die zentralaffine Normalkrümmung sind gegeben durch eine Formel vom Typ

$$k_N = m_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \,/\, g_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta.$$

Für beide Normalkrümmungen gilt daher, daß sie nur von der Kurvenrichtung abhängen, also z. B. mittels der ebenen Normalschnitte gefunden werden können, und es gelten Verallgemeinerungen der Sätze von EULER und MEUSNIER, auf deren nahezu selbstverständliche Herleitungen hier nicht eingegangen zu werden braucht. Eine ganze Reihe von Sätzen ergeben sich daraus, daß wir eine von der Fläche E erzeugte Riemannsche Raummetrik haben, so daß viele Sätze aus der Riemannschen Geometrie hier Verallgemeinerungen von euklidisch-geometrischen Sätzen zur Folge haben. Auf diese Weise ergeben sich u. a.: Die Flächen eines dreifach orthogonalen Systems (bei $n = 3$) schneiden einander in (Riemannschen) Hauptkrümmungslinien (DUPIN); der LEVI-CIVITAsche Parallelismus kann durch infinitesimale Parallelverschiebung im Raume und nachfolgende Projektion in die Fläche erhalten werden; weiter erhält man Beziehungen zwischen den Krümmungen von Raum und Fläche (Theorema egregium) und den Satz von GAUSS und BONNET.

Es erhebt sich umgekehrt die Frage, ob die Geometrie der Fläche vollständig durch die RIEMANNsche Metrik des Raumes bestimmt ist. Wir sahen bereits – um nur ein Beispiel zu nennen –, daß hier auch die Größen d^2x^i/ds^2 eine geometrische Bedeutung haben, ohne daß sie im Riemannschen Raume invariant erklärt wären. Daher ist gar nicht zu erwarten, daß die Geometrie unserer Fläche allein aus der Riemannschen Metrik und ohne Verwendung der Affinität des Raumes bestimmt ist. Immerhin gilt aber:

Alle Differentialinvarianten der Fläche lassen sich ausdrücken durch

metrische und kubische Fundamentalform der Eichfläche E ($\gamma_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta\gamma}$),

metrische und zweite Fundamentalform der Fläche F ($g_{\alpha\beta}$ und $l_{\alpha\beta}$)

(als Funktionen von u^β, d. h. mit ihren Ableitungen).

Das ergibt sich aus dem nachfolgenden Satz:

Hauptsatz der zentralaffinen Geometrie der Flächenpaare:

Zu vorgegebenen (symmetrischen) $a_{\alpha\beta\gamma}$, $\gamma_{\alpha\beta}$, $g_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$ (als Funktionen von u^β) gibt es höchstens ein Paar (E, F) von Hyperflächen im n-dimensionalen zentralaffinen Raum, deren Fundamentalformen die vorgegebenen Funktionen als Koeffizienten haben (bei vorgegebenen Anfangsvektorgerüsten).

(Damit ein solches Flächenpaar wirklich existiert, müssen gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllt sein, auf deren Herleitung wir hier verzichten.)

Beweis. Zunächst gibt es (wegen der Ableitungsgleichungen (19) aus § 3) zu vorgegebenem Anfangsvektorgerüst $\underset{0}{e^i}$, $\underset{0\beta}{e^i}$ höchstens eine Eichfläche E mit $\gamma_{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta\gamma}$ als Fundamentalformen, und genau eine, wenn die Integrabilitätsbedingungen erfüllt sind. Dann ist die Raummetrik g_{ik}, die von der Eichfläche E erzeugt wird, bestimmt.

Nun formen wir die allgemeinen Ableitungsgleichungen (10) und (16) aus § 3 so um, daß auf der rechten Seite außer Funktionen der bereits bekannten Metrik g_{ik} nur noch die Fundamentalformen $g_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$ und die unbekannten Funktionen x^i_ϱ, n^i vorkommen:

$$x^i_{\alpha\beta} = x^i_\varrho \left(\begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} - \tfrac{1}{2} g^{\varrho\sigma} g_{lsr} x^s_\alpha x^r_\beta x^l_\sigma \right) + \left(l_{\alpha\beta} - \tfrac{1}{2} g_{lsr} x^s_\alpha x^r_\beta n^l \right) n^i$$

$$n^i_\alpha = - l^\varrho_\alpha x^i_\varrho - \tfrac{1}{2} g^{\varrho\sigma} g_{lsr} n^r x^s_\alpha x^l_\sigma x^i_\varrho - \tfrac{1}{2} g_{lsr} n^i n^l n^r x^s_\alpha .$$

Die eindeutige Lösbarkeit für das Anfangswertproblem dieses totalen partiellen Differentialgleichungssystems für die Funktionen x^i_β, n^i ergibt die Behauptung.

§ 6. Die Affinnormale und die Affinsphären

In diesem Abschnitt setzen wir endliche Raumdimension $n \geqq 2$ voraus.

Es ist üblich, mit Hilfe des zweiten Beltramischen Differentialoperators, angewendet auf den Ortsvektor $e^i(u^\beta)$, eine Affinnormale zu erklären:

$$N^i = \frac{1}{n-1} g^{\alpha\beta} e^i_{\alpha;\beta} . \tag{1}$$

Dabei darf $g_{\alpha\beta}$ zunächst irgendeine nicht-ausgeartete Flächenmetrik sein. Wir interessieren uns hier hauptsächlich für den Fall, daß $e^i(u)$ die Eichfläche E der zentralaffinen Geometrie ist und $g_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}$. Ferner wird uns aber auch die Affinnormale der Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten interessieren, bei der dann $g_{\alpha\beta}$ die Flächenmetrik dieser Geometrie bedeutet. Die kovariante Ableitung in (17) ist bezüglich der jeweiligen Metrik gemeint.

Wir wollen zunächst den zentralaffinen Normalvektor mittels der Ableitungsgleichungen durch die Raummetrik g_{ik} ausdrücken:

$$N^i = \frac{1}{n-1} \gamma^{\alpha\beta} \left(- a^\varrho_{\alpha\beta} e^i_\varrho \right) - e^i = - e^i - \frac{1}{2(n-1)} \gamma^{\alpha\beta} \gamma^{\varrho\sigma} g_{jkl} e^j_\alpha e^k_\beta e^l_\varrho e^i_\sigma$$

$$= - \frac{1}{2(n-1)} (g^{lj} - e^l e^j)(g^{ik} - e^i e^k) g_{jkl} - e^i ,$$

$$N^i = - e^i - \frac{1}{2(n-1)} g^{lj} g^{ik} g_{jkl} = - \frac{1}{2(n-1)} g^{ik} \frac{\partial \log g}{\partial x^k} - e^i . \tag{2}$$

Von besonderem Interesse sind diejenigen Flächen, deren sämtliche Affinnormalen durch o gehen; diese Flächen heißen Affinsphären (der zentralaffinen Geometrie). Nach (2) sind sie gekennzeichnet durch jede der beiden Relationen:

$$\gamma^{\varrho\sigma}\, a_{\varrho\sigma\beta} = 0, \tag{3}$$

$$\partial g \,/\, \partial x^k = 0 \quad (g = \det g_{ik}). \tag{4}$$

Die kennzeichnende Eigenschaft (4) bedeutet, daß alle oskulierenden Quadriken mit Mittelpunkt o das gleiche Inhaltsmaß haben.

Daraus sieht man unmittelbar: Die Quadriken mit Mittelpunkt o sind Affinsphären. Gibt es noch weitere Affinsphären in der zentralaffinen Geometrie? Wir wollen zeigen, daß die Mittelpunktsquadriken genau im Falle $n = 2$ die einzigen Affinsphären sind. Dies ist in den folgenden beiden Sätzen enthalten.

II. 6. 1. *Die einzigen affinsphärischen Kurven in der zentralaffinen Ebene sind die Kegelschnitte mit Zentrum O.*

Beweis. Wir führen zentralaffine Normalkoordinaten ein, so daß für einen Punkt der betrachteten Eichkurve E gilt

$$g_{ik} = \varepsilon_{(i)}\, \delta_{ik},\ \varepsilon_{(1)} = 1,\ \varepsilon_{(2)} = \pm 1,\ g_{ij1} = 0.$$

Gleichung (4) impliziert dann

$$g_{111} + \varepsilon_{(2)}\, g_{122} = 0$$

$$g_{211} + \varepsilon_{(2)}\, g_{222} = 0,$$

also $g_{222} = 0$, so daß überhaupt $g_{ijk} = 0$. Dies gilt dann in jedem Koordinatensystem und ergibt die Behauptung.

Daß für $n \geqq 3$ noch sehr viele weitere Affinsphären existieren, folgt z. B. aus den Ergebnissen von Leichtweiss [1]. Für spätere Zwecke wollen wir hier noch eine weitere Klasse von Affinsphären explizit angeben:

II. 6. 2. *Die Hyperfläche $x_1 \ldots x_n = 1$ $(x_i > 0)$ im n-dimensionalen zentralaffinen Raum ist eine Affinsphäre.*

Beweis. Die zu dieser Fläche gehörige Minkowskische Metrik ist

$$F(x^i) = (x_1 \ldots x_n)^{1/n}.$$

Man berechnet

$$g_{ik} = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2}{\partial x^i\, \partial x^k} = \frac{F^2}{n x^i\, x^k}\left(\frac{2}{n} - \delta_{ik}\right) \quad \text{(nicht summieren!)}$$

und

$$g = \det(g_{ik}) = \frac{2^n}{n^{2n}} \begin{vmatrix} 1 - \frac{n}{2} & 1 & 1 \ldots 1 \\ 1 & 1 - \frac{n}{2} & 1 \ldots 1 \\ & \ldots & \end{vmatrix}$$

Diese Determinante ist also tatsächlich konstant und auch von 0 verschieden. (Letzteres sieht man am leichtesten aus der linearen Unabhängigkeit der Zeilenvektoren.) Damit ist die Behauptung gezeigt.

Nachdem also die Affinsphäreneigenschaft nicht kennzeichnend für die Quadriken ist, ist die Frage nach weiteren Eigenschaften interessant, welche auf die Quadriken führen. Eine Voraussetzung im großen, die die Ellipsoide unter den Affinsphären kennzeichnet, ist die Forderung der Geschlossenheit der Fläche; dies ist für $n = 3$ bei BLASCHKE [1], für $n > 3$ bei DEICKE [1] bewiesen worden. Eine lokale Kennzeichnung enthält der folgende Satz:

II. 6. 3. *Eine konvexe oder konkave Affinsphäre, mit der Eigenschaft, daß der Krümmungstensor der von ihr erzeugten Riemannschen Raummetrik identisch verschwindet, ist notwendig eine Quadrik.*

Beweis. Wir verwenden wieder zentralaffine Normalkoordinaten. Es gilt also

$$g_{ik} = \varepsilon_{(i)}\,\delta_{ik} \quad \text{mit} \quad \varepsilon_{(1)} = 1 \quad \text{und}$$

$$\varepsilon_{(2)} = \ldots = \varepsilon_{(n)} = +1 \; (-1) \text{ im konvexen (konkaven) Fall.}$$

Für den Krümmungstensor

$$R_{ijkl} = -\tfrac{1}{4}\, g^{rs}\,(g_{irk}\,g_{jsl} - g_{irl}\,g_{jsk})$$

ergibt sich nach Überschieben mit g^{jl}, weil Gleichung (4) gilt:

$$g^{jl}\,R_{ijkl} = \tfrac{1}{4}\, g^{rs}\,g^{jl}\,g_{irl}\,g_{jsk} = \tfrac{1}{4}\sum_{r,j} \varepsilon_{(r)}\,\varepsilon_{(j)}\,g_{irj}\,g_{krj}.$$

Da in zentralaffinen Normalkoordinaten $g_{ij1} = 0$, folgt

$$0 = \sum_{r,j=2}^{n} g_{irj}\,g_{krj},$$

also speziell für $i = k$

$$0 = \sum_{r,j=2}^{n} (g_{irj})^2,$$

so daß alle g_{ijk} verschwinden müssen, was die Behauptung enthält.

Die in II. 6. 2 angegebenen Affinsphären sind konkav, zeigen also einmal, daß in dem soeben bewiesenen Satz auf die Voraussetzung der verschwindenden Krümmung nicht verzichtet werden kann. Zum anderen geben uns diese Flächen Beispiele dafür, daß für $n \geqq 3$ der Krümmungstensor der Raummetrik tatsächlich nicht verschwinden muß, anders als im Falle $n = 2$ (II. 2. 3).

Auf eine merkwürdige Eigenschaft der Affinsphären wird man geführt, wenn man nach denjenigen Flächen fragt, die in der Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten und in einer zentralaffinen Geometrie die gleichen Affinnormalrichtungen haben:

II. 6. 4. *Notwendig und hinreichend dafür, daß die Hyperfläche E im n-dimensionalen affinen Raum in der Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten und in der zentralaffinen*

Geometrie mit Zentrum o *die gleichen Affinnormalrichtungen habe, ist für* $n \neq 3$*: E ist eine Affinsphäre, deren sämtliche Affinnormalen durch* o *gehen. Im Falle* $n = 3$ *haben alle Flächen die Eigenschaft, daß ihre Affinnormalrichtungen in allen zentralaffinen Geometrien und in der inhaltstreu-affinen Geometrie dieselben sind.*

(Daß im dreidimensionalen Raum beide Affinnormalrichtungen stets zusammenfallen, hat SALKOWSKI [1] S. 142 bemerkt.)

Beweis. Wir wollen die Grundform der inhaltstreu-affinen Geometrie mit $\bar{g}_{\alpha\beta}$ bezeichnen, die der zentralaffinen Geometrie wie bisher mit $\gamma_{\alpha\beta}$. Beide sind durch Normierung der DUPINschen Indikatrix entstanden, so daß gilt

$$\bar{g}_{\alpha\beta} = \lambda(u)\, \gamma_{\alpha\beta}. \tag{1}$$

Die zugehörigen Affinnormalvektoren sind

$$\bar{N}^i = \frac{1}{n-1}\, \bar{g}^{\alpha\beta}\, x^i_{\alpha;\bar{\beta}} \quad \text{und} \quad N^i = \frac{1}{n-1}\, \gamma^{\alpha\beta}\, x^i_{\alpha;\beta}. \tag{2}$$

Es gilt also

$$\bar{N}^i = \frac{1}{(n-1)\lambda}\, \gamma^{\alpha\beta} \left(x^i_{\alpha\beta} - \overline{\begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}}\, x^i_\varrho \right). \tag{3}$$

Nun ist bei konform aufeinander bezogenen Metriken (1) bekanntlich (SCHOUTEN [1], S. 304)

$$\overline{\begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix}} = \begin{Bmatrix} \varrho \\ \alpha\beta \end{Bmatrix} + \tfrac{1}{2}\left(l_\alpha \delta^\varrho_\beta + l_\beta \delta^\varrho_\alpha - l_\sigma \gamma^{\varrho\sigma} \gamma_{\alpha\beta}\right) \text{ mit } l_\beta = \partial \log \lambda / \partial u^\beta. \tag{4}$$

Einsetzen von (4) in (3) ergibt

$$\bar{N}^i = \frac{1}{\lambda} N^i + \frac{(n-3)}{2\lambda(n-1)}\, x^i_\varrho\, \gamma^{\varrho\sigma}\, l_\sigma.$$

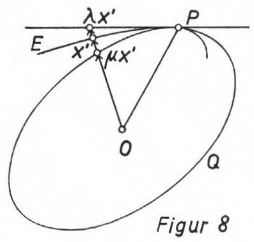
Für $n = 3$ bestätigt das den Satz von SALKOWSKI. Für $n \neq 3$ ergibt sich als notwendig und hinreichend dafür, daß die Affinnormale sich bei der Umnormung (1) nur mit einem Faktor multipliziert:

$$x^i_\varrho\, \gamma^{\varrho\sigma}\, l_\sigma = 0$$

(weil die Affinnormale von den Tangentialvektoren linear unabhängig ist). Aus der linearen Unabhängigkeit der Tangentialvektoren x^i_β untereinander ergibt sich nun $\lambda = \text{const.}$ Bei geeigneter Wahl der Volumeneinheit ist $\lambda = 1$ zu erreichen, so daß dann wegen I. 2. 1 und I, § 3 folgt, daß alle oskulierenden Quadriken mit Mittelpunkt o das gleiche absolute Inhaltsmaß 1 haben, wegen Gleichung (3) von Seite 43 also Affinsphären sind. Die Rechnungen lassen sich umkehren, womit alles bewiesen ist.

*§ 7. Weitere geometrische Deutungen der beiden Fundamentalformen der zentralaffinen Flächentheorie

Wir hatten in § 2 die beiden Fundamentalformen $\gamma_{\alpha\beta}$ und $a_{\alpha\beta\gamma}$ der Fläche E mittels der oskulierenden Quadriken mit Mittelpunkt 0 eingeführt, und zwar ergab sich die metrische Grundform mittels des zur Tangentialebene parallelen Mittelpunktsschnitts dieser Quadrik, während wir die kubische Grundform für die Abweichung von der Quadrik verantwortlich machen konnten, weil ihr Verschwinden die Quadriken kennzeichnet. Es soll jetzt noch genauer gezeigt werden, in welchem Sinne sich die kubische Fundamentalform mittels der oskulierenden Quadrik deuten läßt. Zuvor wollen wir eine analoge neue Deutung der metrischen Grundform angeben: diese erweist sich nämlich als verantwortlich für die Abweichung der Fläche von der Tangentialebene.



Figur 8

Es sei $E: e^i = e^i(u^\beta)$ unsere Hyperfläche, $e^i(u+du)$ ein dem Punkt $P: e^i(u)$ benachbarter Flächenpunkt. Wir wollen dazu diejenigen Vektoren

$$\lambda e^i(u + du) \quad \text{bzw.} \quad \mu e^i(u + du)$$

bestimmen, deren Endpunkte auf der Tangentialhyperebene der Fläche im Punkte P bzw. auf der in P oskulierenden Quadrik Q mit Mittelpunkt O liegen. Nach Potenzreihenentwicklung ergibt sich aus der ersten Forderung

$$g_{ik}(e)e^i(\lambda e^k(u + du) - e^k(u)) = 0$$

also

$$(\lambda - 1) - \frac{\lambda}{2}\, ds^2 + [3] = 0$$

($[n]$ bezeichnet hier im folgenden eine Größe, welche die Differentiale du mindestens in der Ordnung n enthält.) Damit ist die Behauptung bereits gezeigt: die zentralaffine metrische Grundform ds^2 drückt sich durch die Abweichung $(\lambda - 1)$ der Fläche von der Tangentialebene aus:

$$ds^2 = 2(\lambda - 1)/\lambda + [3].$$

Für die Abweichung der Fläche von der Quadrik Q werden wegen der Oskulation Größen dritter Ordnung in Frage kommen. Es ist

$$1 = g_{ik}(x)\, \mu e^i(u + du)\, \mu e^k(u + du).$$

Die Potenzreihenentwicklung kann mit

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{ik}\, e^i_\alpha\, e^k_\beta = -\, g_{ik}\, e^i\, e^k_{\alpha\beta}$$

umgerechnet werden, so daß man erhält:

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 + du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma \left(\tfrac{1}{3}\, g_{ik}\, e^i\, e^k_{\alpha\beta\gamma} + g_{ik}\, e^i_\alpha\, e^k_{\beta\gamma}\right) + [4].$$

Außerdem verwenden wir noch

$$-\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} = g_{ik}\, e^i\, e^k_{\alpha\beta\gamma} + g_{ik}\, e^i_\gamma\, e^k_{\alpha\beta}$$

und erhalten schließlich

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 + \tfrac{1}{3}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma \left(\frac{\partial \gamma_{\alpha\beta}}{\partial u^\gamma} + g_{ik}\, e^i_\alpha\, e^k_{\beta\gamma} + g_{ik}\, e^i_\beta\, e^k_{\alpha\gamma}\right) + [4],$$

oder mittels der Ableitungsgleichungen

$$\frac{1}{\mu^2} = 1 - \tfrac{2}{3}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma\, a_{\alpha\beta\gamma} + [4],$$

so daß sich die kubische Grundform durch die Abweichung $\mu - 1$ der Fläche von der oskulierenden Quadrik ausdrückt:

$$\mu - 1 = \tfrac{1}{3}\, a_{\alpha\beta\gamma}\, du^\alpha\, du^\beta\, du^\gamma + [4].$$

Damit sind die gewünschten Deutungen der beiden Fundamentalformen der zentralaffinen Geometrie gefunden; sie sind übrigens ganz analog zu den Deutungen der entsprechenden Fundamentalformen der Geometrie der inhaltstreuen Affinitäten, die wir in Kapitel I, § 3 gegeben haben. – Für den Fall von Flächen im dreidimensionalen Raum hat O. MAYER [1] ähnliche Deutungen hergeleitet.

*§ 8. Die Dualität der beiden Relativgeometrien

Wir haben schon wiederholt darauf hingewiesen, daß man die hier entwickelte Geometrie der Hyperflächenpaare im zentralaffinen Raum in der folgenden Weise deuten kann. Der Raum wird durch eine Eichfläche E metrisiert, und dadurch wird in der zweiten Fläche F eine Metrik induziert. Ist E ein Ellipsoid mit dem Mittelpunkt o, so ergibt sich die klassische Flächentheorie als Spezialfall, wobei dann E die Rolle der Einheitssphäre des euklidischen Raumes spielt. Man kann die hier in den Grundzügen dargestellte Geometrie als „relative" Differentialgeometrie der Fläche F in bezug auf die Eichfläche E auffassen. Die beiden Flächen F und E sind dabei radial aufeinander bezogen:

$$x^i(u) = \lambda(u) e^i(u).$$

Diese Auffassung ist nun zu unterscheiden von der auf Emil MÜLLER [1] und W. SÜSS [1] zurückgehenden relativen Differentialgeometrie, die die klassische Flächentheorie nach einer anderen Richtung verallgemeinert. Während bei uns die von der Eichfläche E erzeugte Riemannsche Metrik im Raume im Vordergrund steht, welche die euklidische Raummetrik der elementaren Flächentheorie ersetzt, ist ein anderer wichtiger Gegenstand der klassischen Flächentheorie Ausgangspunkt der Relativgeometrie von MÜLLER und SÜSS, nämlich das GAUSSsche sphärische Normalbild. Man kann diese sphärische Abbildung auch so beschreiben, daß man einem Punkt P der Fläche F denjenigen Punkt der Einheitssphäre E zuordnet, in dem die Tangentialebene von E parallel zur Tangentialebene von F in P ist. Die Fläche E kann nun bei MÜLLER und SÜSS beliebig sein, und die beiden Flächen erscheinen durch parallele Tangentialebenen aufeinander bezogen. Dies führt unmittelbar zu einer Verallgemeinerung der WEINGARTENschen Ableitungsgleichungen und erlaubt u. a. einen Zugang zur Theorie „relativer" Minimalflächen.

Diese beiden Relativgeometrien stehen in einer engen Dualitätsbeziehung zueinander, die wir jetzt behandeln wollen. Um die Dualität besonders deutlich hervortreten zu lassen, sollen die Formeln der MÜLLER-SÜSSschen Geometrie im Dualraum entwickelt werden, was natürlich geometrisch ohne Bedeutung ist und sich formal darin äußert, daß die Raumvektoren untere (lateinische) Indizes tragen.

Wie in den Paragraphen 1–3 bezeichne $e^i(u^\beta)$ die Eichfläche E, $x^i(u) = \lambda(u)e^i(u)$ die auf E radial bezogene Fläche F, $g_{ik}(x)$ die von E erzeugte Riemannsche Raummetrik.

Die Tangentialhyperebenen von E und F bestimmen Hyperflächen E^* und F^* im Dualraum: $e_i = e_i(u)$ und $x_i = x_i(u)$. Dabei gelten die Formeln:

$$e_i(u)\, e^i(u) = 1, \quad e_i(u)\, e^i_\beta(u) = 0;$$

$$x_i(u)\, x^i(u) = 1, \quad x_i(u)\, x^i_\beta(u) = 0.$$

Da wegen

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^\beta}(e^i e_i) = e^i_\beta e_i + e^i e_{i\beta} = e^i e_{i\beta}$$

und der entsprechenden Beziehung für x^i die Normalvektoren der Flächen E^* bzw. F^* gerade zu e^i bzw. x^i parallel sind, sind die Tangentialebenen von E und F in entsprechenden Punkten parallel. Diese Beziehung ist offensichtlich umkehrbar.

Die damit als dual zueinander nachgewiesenen Relativgeometrien haben die Eigenschaft, daß ihnen jeweils ein spezieller Typ von Flächenabbildungen zugrunde liegt: bei der MÜLLER-SÜSSschen Relativgeometrie handelt es sich um eine Abbildung durch parallele Tangentialhyperebenen, bei der hier vorgeschlagenen Geometrie um die Zentralprojektion. Allgemeiner kann man nach F. LÖBELL [1] zu ganz beliebigen Flächenabbildungen eine Krümmungstheorie entwickeln.

KAPITEL III.

ANWENDUNGEN AUF DIE ALLGEMEIN-METRISCHE DIFFERENTIALGEOMETRIE UND DAS RAUMPROBLEM

Der Tangentialraum $T(P)$ einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit in einem ihrer Punkte P ist ein Vektorraum; in diesem Tangentialraum gilt also die zentralaffine Geometrie. Insbesondere ist also zu erwarten, daß die zentralaffine Differentialgeometrie der Hyperflächen, die wir in Kapitel II entwickelt haben, sich dann anwenden läßt, wenn im Tangentialraum eine Hyperfläche gegeben ist. Dieser Fall ist nun tatsächlich von einem beträchtlichen Interesse für die Differentialgeometrie: Die Eichfläche E im Tangentialraum einer metrischen differenzierbaren Mannigfaltigkeit (z. B. eines FINSLERschen Raumes) erfüllt unsere Voraussetzungen. Wir gewinnen daher hier einen neuen Zugang zur FINSLERschen und allgemeiner zur allgemein-metrischen Differentialgeometrie, der es u. a. erlaubt, der weitgehend formalen Theorie der FINSLER-Räume von E. CARTAN [1] eine geometrische Deutung zu geben. Dadurch wird es möglich, CARTANS Theorie wirklich als Geometrie einer Punktmannigfaltigkeit zu deuten und die geometrisch allgemein als unbefriedigend empfundene Auffassung des FINSLERschen Raumes als eines Raumes von Linienelementen durch eine punktal-Minkowskische[1] Auffassung abzulösen, ohne jedoch den wegen seiner Linearisierungen bequemen CARTANschen Kalkül verwerfen zu müssen. Es scheint darüber hinaus sogar, als ob der geometrische Grund für die Zweckmäßigkeit des Kalküls von CARTAN in der Affingeomtrie zu suchen ist. – Nach einem einführenden Abschnitt über allgemein-metrische und FINSLERsche Räume (§ 1) geben wir die affingeometrische Deutung der Grundtensoren dieser Geometrie in § 2.

Obwohl die Bemerkung, daß die punktale Geometrie eines allgemein-metrischen differentialgeometrischen Raumes von der zentralaffinen Geometrie der Eichhyperfläche beherrscht wird, nach dem Gesagten nahezu selbstverständlich erscheint, sind daraus bisher kaum Konsequenzen gezogen worden. Zwar haben CARATHÉODORY in der Variationsrechnung und MINKOWSKI und FINSLER [1] in der Geometrie Eichflächen (Indikatrix und Figuratrix) in das Zentrum der Untersuchung gestellt, ohne aber den Zusammenhang mit der damals allerdings noch kaum entwickelten zentralaffinen Differentialgeometrie zu ver-

[1] Wir verwenden hier für differenzierbare Mannigfaltigkeiten die folgende Terminologie: Eine Eigenschaft heißt *global*, wenn sie der Mannigfaltigkeit im großen zukommt; *lokal*, wenn sie für Umgebungen eines Punktes gilt; *punktal*, wenn sie dem Punkt selbst und seinem Tangentialraum zukommt. Der Vollständigkeit zuliebe sei noch der Begriff *infinitesimal* erwähnt, der auf Beziehungen zwischen „infinitesimal benachbarten" Tangentialräumen, d. h. auf Eigenschaften der Ableitungen von Tangentenvektoren anzuwenden ist. Die Vorteile gegenüber der alten Terminologie, in der das Punktale oft als Lokales oder Infinitesimales bezeichnet wurde, liegen einmal darin, daß unser Begriff „lokal" mit dem in der Topologie verwendeten (lokalkompakt usw.) übereinstimmt. Zum anderen ist eine klare Trennung der verschiedenen Begriffe auch für die Differentialgeometrie selbst nötig, wie man an folgendem Beispiel sieht: Punktal-affin ist jede Mannigfaltigkeit, weil der Tangentialraum affin ist. Ein infinitesimal-affiner Raum ist ein Raum mit affinem Zusammenhang. Ein lokal-affiner Raum ist ein infinitesimal-affiner Raum mit verschwindendem Krümmungstensor. Ein global-affiner Raum schließlich ist selbst ein Vektorraum.

wenden. DELENS [1] benutzt projektiv-geometrische Eigenschaften der Indikatrix, die projektive Gruppe ist aber natürlich zu umfassend, als daß alle in Frage kommenden zentralaffinen Invarianten auch unter ihr invariant wären. KAWAGUCHI [1] hat kürzlich versucht, die BLASCHKEsche inhaltstreu-affine Geometrie (BLASCHKE [1]) in der FINSLERschen Geometrie nutzbar zu machen, nachdem DEICKE [1] damit ein besonders schönes Resultat erzielen konnte.[1] Unserer Auffassung am nächsten steht eine Untersuchung von V. V. VAGNER [1], in der die punktale Geometrie des FINSLERschen Raumes wie bei uns als zentralaffine Hyperflächentheorie aufgefaßt wird; den Zusammenhang mit der klassischen Affingeometrie stellt VAGNER aber nicht her. Das gleiche gilt für die Krümmungsuntersuchung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes von VARGA [2], der der Verfasser die Anregung zu Teilen der vorliegenden Arbeit verdankt.

Der uns interessierende Sachverhalt (Hyperfläche im Tangentialraum einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit) tritt auch in der von CARTAN [2] inaugurierten, auf das Inhaltsmaß von Hyperflächen gegründeten metrischen Geometrie auf, auf die wir in § 3 eingehen. In einem letzten Abschnitt wird dann ein Beitrag zum sogenannten Raumproblem gegeben, das sich mit der Kennzeichnung der Riemannschen unter den allgemein-metrischen Räumen befaßt.

Wir beschäftigen uns hier – dem Ziel der Arbeit entsprechend – lediglich mit der punktalen Geometrie der metrischen differenzierbaren Mannigfaltigkeiten. Zu einer vollständigen Theorie müßte zumindest auch die Vektorübertragung (im Riemannschen Spezialfall der affine Zusammenhang) gehören. Wir wollen uns hier mit dem Hinweis begnügen, daß dazu der auf die von CARATHÉODORY angeregte Münchner Dissertation von A. NAZIM [1] zurückgehende Begriff des oskulierenden Riemannschen Raumes den natürlichen geometrischen Zugang liefert. Ebenso wie wir die punktale Geometrie auf oskulierende Quadriken und damit auf oskulierende euklidische Räume gründen, kann man bei Verschiebung des Tangentialraumes längs einer Kurve die längs dieser Kurve oskulierenden Riemannschen Räume zur Begründung des Zusammenhangs heranziehen. Dies ist für den CARTANschen euklidischen Zusammenhang von VARGA [1] geleistet worden; für die neueren Übertragungsgesetze von RUND [1] und BARTHEL [1] hat der Verf. in früheren Arbeiten [3], [4] die entsprechenden Herleitungen angegeben.

* § 1. Allgemein-metrische, insbesondere FINSLERsche Räume

Schon RIEMANN hat bemerkt, daß eine sehr allgemeine Möglichkeit für die Festlegung einer Maßbestimmung in einer (differenzierbaren) Mannigfaltigkeit gegeben ist durch

$$ds = F(X;\ dX),$$

wobei $X = (X^i)$ die Punkte der Mannigfaltigkeit beschreibt und F eine für $dX \neq 0$ positive, von erster Ordnung positiv homogene Funktion ist:

$$F(X;\ a \cdot dX) = a \cdot F(X;\ dX) \text{ für } a > 0.$$

---

[1] Für eine Kritik an der Auffassung von KAWAGUCHI vergleiche man LAUGWITZ [8] und KAWAGUCHI und LAUGWITZ [1].

Wir wollen zulassen, daß die Funktion F nicht notwendig für alle Richtungen dX in einem Punkte X erklärt ist, was geometrisch bedeutet, daß nicht für alle Kurven eine Länge definiert ist.

Definition. *Ein allgemein-metrischer differentialgeometrischer Raum ist eine differenzierbare Mannigfaltigkeit (endlicher oder unendlicher Dimension), mit einer Maßvorschrift für die Länge von (nicht notwendig allen) Kurven, die gegeben ist durch*

$$ds = F(X;\ dX),$$

wobei $F(X;\ dX)$ für jedes feste X für alle dX aus einem Raumsektor S_x des Tangentialraumes $T(X)$ erklärt und daselbst positiv und positiv homogen von erster Ordnung ist. Die in S_x gelegene Hyperfläche E_x: $F(X;\ dX) = 1$ heißt Eichfläche oder Indikatrix des Raumes im Punkte (X). Sind alle Eichflächen konvex und geschlossen, so heißt die Mannigfaltigkeit ein Finslerscher Raum.

(In einem Finslerschen Raum ist also für alle glatten Kurven eine Länge definiert.) Wir wollen hier stets voraussetzen, daß die Maßfunktion F nach beiden Variablenvektoren $(dX \neq 0)$ hinreichend oft differenzierbar sei, und daß die Eichflächen E_x die Eigenschaften (A) — (C) aus Kapitel II, § 1 haben. Diese Voraussetzungen sind stets erfüllt, wenn die Metrik F einer regulären Variationsaufgabe entstammt.

Da wir hier nur die punktale Geometrie, also einen festen Tangentialraum untersuchen wollen, können wir das Argument X von nun an wieder weglassen und statt dX wieder x schreiben. Damit haben wir wieder dieselben Bezeichnungen wie in Kapitel II, und wir wollen im nächsten Abschnitt zeigen, wie sich die Grundtensoren der allgemein-metrischen Differentialgeometrie aus der Hyperflächentheorie einer Eichfläche E im zentralaffinen Raum (Kapitel II) erhalten lassen.

§ 2. Affingeometrische Deutungen in der Theorie der allgemein-metrischen Räume[1]

Der Metrik F pflegt man den metrischen Grundtensor

$$g_{ik}(x) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F^2(x)}{\partial x^i\,\partial x^k} \tag{1}$$

zuzuordnen; dies ist also gerade der Grundtensor der von der Eichfläche E erzeugten Riemannschen Metrik im Vektorraum. Cartan [1] hat dazu die Koeffizienten

$$C^i_{jk} = \tfrac{1}{2}\, g^{ir}\, g_{rjk} \tag{2}$$

des „euklidischen Zusammenhangs" eingeführt; diese sind identisch mit den Christoffelsymbolen der Metrik (1), entsprechen also dem affinen Zusammenhang der Riemannschen Metrik (1).

[1] In diesem Abschnitt stellen wir zur Bequemlichkeit des Lesers zunächst einige Ergebnisse aus früheren Arbeiten zusammen. Man vergleiche die Arbeiten [7] und [8] des Verf. und die Arbeit Laugwitz und Lorch [1].

Eine wichtige Rolle in CARTANS Theorie spielt der Vektor

$$(3)\qquad A^i = \frac{F}{2} g^{ij} \frac{\partial \log g}{\partial x^j}$$

(CARTAN [1] p. 13). Er drückt sich wegen Gleichung (2) aus II, § 6 durch den Affinnormalvektor N^i der Eichfläche E in der zugehörigen Richtung aus:

$$(4)\qquad A^i = (n-1)\, F \left(\frac{x^i}{F} - N^i\right).$$

Aus dieser Formel folgt, daß die allgemein-metrischen Räume mit $A^i = 0$ gerade diejenigen sind, deren Eichflächen Affinsphären sind. Insbesondere hat man den Satz von A. DEICKE [1]: Die Finsler-Räume mit $A^i = 0$ sind die Riemannschen Räume.

CARTAN [1] hat drei Krümmungstensoren eingeführt, von denen hier der erste, mit S_{ijkl} bezeichnete, erfaßt wird (CARTAN [1], S. 34, Formel XVI),

$$(5)\qquad S_{ijkl} = A_{jk}{}^m A_{ilm} - A_{jl}{}^m A_{ikm};\quad A_{ilm} = \frac{F}{2} g_{ilm}.$$

Wegen II, § 1, Formel (9) steht er in folgendem Zusammenhang mit dem Krümmungstensor R_{ijkl} der Riemannschen Metrik im Vektorraum

$$(6)\qquad S_{ijkl} = \frac{1}{F^2} R_{ijkl}.$$

Daraus ergibt sich mit Hilfe von II. 2. 3:

CARTANS *Tensor* S_{ijkl} *verschwindet in allen zweidimensionalen Finsler-Räumen identisch, für höhere Raumdimension dann und nur dann, wenn die Eichfläche konstante zentralaffine Krümmung* 1 *hat.*

Die auch von VARGA [2] untersuchte, auf LANDSBERG [1] zurückgehende Winkeldefinition

$$(7)\qquad d\varphi^2 = \frac{1}{F} \frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^k} dx^i dx^k$$

bezeichnet CARTAN [1] S. 13–14 als „métrique angulaire" des Finslerschen Raumes. Beschreibt man die Richtungen durch Einheitsvektoren, so folgt aus (7) mit Hilfe der Homogenitätsrelation:

$$(8)\qquad d\varphi^2 = g_{ik}(e)\, de^i\, de^k$$

oder: *Der* LANDSBERG*sche Winkel zwischen zwei infinitesimal benachbarten Richtungen* (e^i) *und* $(e^i + de^i)$ *ist gleich dem in unserer Riemannschen Metrik gemessenen Abstand der Endpunkte der zu diesen Richtungen gehörigen Einheitsvektoren.*

Damit ist zunächst nur der Winkel für infinitesimal benachbarte Richtungen erklärt. Einen Winkel zwischen beliebigen Richtungen, zu denen die Einheitsvektoren e_1^i und e_2^i gehören mögen, kann man entweder erklären durch den kürzeren Bogen des ebenen Nullpunktsschnittes von E durch e_1^i, e_2^i, oder aber durch die Länge des kürzesten, nicht notwendig ebenen Kurvenbogens, der e_1^i und e_2^i auf der Eichfläche E verbindet. Wegen Satz II.

4. 4. fallen diese beiden Winkeldefinitionen dann und nur dann zusammen, wenn die Eichfläche eine Quadrik mit Zentrum o ist.

Beide Winkelmaße entstehen aus der zentralaffinen Metrik der Eichfläche und verallgemeinern daher die euklidische Winkeldefinition. Im Falle konvexer Indikatrix ist diese Flächenmetrik positiv definit, die Mannigfaltigkeit ist daher unter der zweiten Winkeldefinition so beschaffen, daß die Richtungen einen lokal metrischen Raum bilden. Diese Eigenschaft kommt, wie H. LIPPMANN [1] gezeigt hat, einer auf MENGER zurückgehenden anderen Winkeldefinition nicht zu.

Die in II, § 1 Gleichung (15) enthaltene Isometrie der beiden Flächen E und E^* läßt nun folgende Deutung zu:

Der Winkel zwischen zwei Tangentialhyperebenen der Eichfläche E (stellvertretend für zwei Stellungen), gemessen durch die Metrik des Dualraumes, ist gleich dem Winkel zwischen ihren Normalvektoren, gemessen in der Metrik des Tangentialraumes selbst.

Eine weitere Anwendung unserer Deutung der Winkelmetrik knüpft an CARTANS Bemerkung an, daß die Winkelmetrik der Räume mit

$$A_{ijk|0} = 0 \qquad \text{(CARTAN [1], S. 37)} \tag{9}$$

bei Parallelverschiebung ungeändert bleibt. In diesem Falle gehen die Indikatrizen in verschiedenen Punkten also auseinander durch Affinverbiegung hervor.

§ 3. Affingeometrische Deutungen in der Theorie der CARTANschen Räume

CARTAN [7] hat den Versuch unternommen, differentialgeometrische Räume zu behandeln, deren Metrik auf dem Inhaltsmaß von Hyperflächen beruht. Dazu wird in einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit, deren Punkte wieder durch die Koordinaten (X^i) bezeichnet werden, eine von der Hyperflächenstellung (u_i) abhängige Dichte vom Gewicht (-1) vorgegeben,

$$L(X^i; u_i),$$

mit deren Hilfe das Oberflächenelement für eine Hyperfläche, deren Tangentialebene im Punkte (X) gegeben ist durch $u_i dX^i = 0$, definiert wird zu

$$d\sigma = \det \left\{ \frac{\partial L}{\partial u_i}, dX_1^i, \ldots, dX_{n-1}^i \right\},$$

wobei $dX_1, \ldots, dX_{n-1}$ eine Basis der Tangentialhyperebene ist. Um nicht die – wie sich zeigen wird, für unsere Zwecke unwesentlichen – Gewichte immer angeben zu müssen, wollen wir zunächst nur Koordinatentransformationen mit Determinante $+1$ zulassen. CARTAN führt die Größen ein

$$a^{ik} = \frac{\partial^2 \frac{L^2}{2}}{\partial u_i \partial u_k}$$

$$\Delta = \det (a^{ik})$$

$$g^{ik} = a^{ik} / \Delta^{1/n-1}.$$

Dabei ist $\Delta > 0$ vorausgesetzt; dies trifft zu, wenn die vorgegebene Funktion L einem regulären Variationsproblem entstammt, was CARTAN voraussetzt. – Da es uns hier wieder nur auf die Verhältnisse im Tangentialraum irgendeines festen Punktes ankommt, lassen wir das Argument X im folgenden wieder weg. Wir interessieren uns für die beiden im Dualraum des Tangentialraumes (dem Raume der kovarianten Vektoren) gelegenen Hyperflächen

$$g^{ij}(x)\, x_i x_j = 1 \quad \text{und} \quad L^2(e) = a^{ij}(e_j)\, e_i e_j = 1.$$

Diese beiden Flächen kann man sich radial aufeinander bezogen denken:

$$x_i(u^\beta) = \varrho(u^\beta)\, e_i(u^\beta) \quad \text{mit}$$

$$L(e_i(u)) = 1, \; g^{ij}(x_i(u))\, x_i(u)\, x_j(u) = 1.$$

Dabei gilt wegen der Homogenität nullter Ordnung der a^{ij} und g^{ij}

$$1 = g^{ij} x_i x_j = \frac{\varrho^2}{\Delta^{1/n-1}}\, a^{ij} e_i e_j = \varrho^2 / \Delta^{1/n-1},$$

also

$$\varrho = \Delta^{1/2(n-1)}$$

Daraus folgt:

Die Flächen x_i und e_i sind dann und nur dann homothetisch, wenn $\Delta = det(a^{ij}) = const$, d. h. wenn die Fläche e_i eine Affinsphäre ist.

Nach dem Satz von BLASCHKE und DEICKE [1], den wir in II, § 3 erwähnten, sind mithin die einzigen CARTANschen Räume mit $A_i = 0$ und geschlossener Indikatrix – also regulären Variationsproblemen entstammend – die Riemannschen Räume. Dies hat eine interessante Konsequenz. CARTAN [2] Formel (IX) auf S. 18 definiert den Vektor

$$A^i = -L \frac{\partial\, 1/\sqrt{g}}{\partial u_i} \quad \text{mit } g = \det g^{ij}.$$

Nun berechnet man sofort $g = \Delta^{-\frac{1}{n-1}}$ und erhält:

Die CARTANschen Räume mit $A^i = 0$ sind genau die Riemannschen Räume.

Die Räume mit $A^i = 0$ hat CARTAN [2], S. 19 ausdrücklich als solche bezeichnet, die eine Zwischenstellung zwischen den Riemannschen und seinen allgemeineren Räumen einnehmen. Es hat sich nun aber als Folge des Satzes von BLASCHKE und DEICKE ergeben, daß diese Räume tatsächlich mit den Riemannschen Räumen zusammenfallen.

CARTAN [2] S. 17 definiert den Winkel $d\varphi$ zwischen zwei Hyperflächenelementen mit den Stellungen u_i, $u_i + du_i$ durch

$$d\varphi^2 = \frac{L^{ij}}{L}\, du_i\, du_j \qquad \left(L^{ij} = \frac{\partial^2 L}{\partial u_i \partial u_j}\right).$$

Dies läßt sich leicht umrechnen zu

$$d\varphi^2 = \frac{1}{L^2}\, a^{ij}\, du_i\, du_j - \left(\frac{dL^2}{L^2}\right).$$

Normiert man die Stellungsparameter u_i, $u_i + du_i$ so, daß

$$L(u_i) = L(u_i + du_i) = 1,$$

so folgt

$$d\varphi^2 = a^{ij}(u)\, du_i\, du_j$$

oder:

CARTANs *Winkelmetrik ist identisch mit der Riemannschen Metrik der Eichfläche $L = 1$.*

Diese Aussagen über die Räume mit $A^i = 0$ und über die Winkelmetrik sind nun tatsächlich unabhängig von der Wahl der Volumeneinheit im Tangentialraum, so daß sie auch invariant sind gegenüber Koordinatentransformationen mit von 1 verschiedener Determinante.

§ 4. Ein Beitrag zum Raumproblem

Als Raumproblem bezeichnet man die Frage nach der ausgezeichneten Rolle der euklidischen und der Riemannschen Räume. Diese Frage, die schon auf RIEMANN [1] zurückgeht, ist von HELMHOLTZ [1] und LIE [1] und später vom relativistischen Standpunkt von H. WEYL [1], [2] behandelt worden. Es kommt dabei darauf an, die Riemannschen Räume unter den allgemein-metrischen differentialgeometrischen Räumen zu kennzeichnen. Der klassische Satz von HELMHOLTZ-LIE kann so formuliert werden: Ein FINSLERscher Raum mit der Eigenschaft, daß in jedem Punkte infinitesimale starre Körper frei drehbar sind, ist Riemannsch. WEYL hat dem Raumproblem zwei Fassungen gegeben. In der ersten Fassung ist WEYLS Problem bis heute nicht vollständig gelöst (Der Verf. gibt an anderer Stelle [9] einen Beweis der WEYLschen Vermutung für den Fall definiter Metriken, also FINSLERscher Räume); sie lautet: Es sei eine Funktion $\varphi(x^i)$ in einem n-dimensionalen reellen Vektorraum vorgegeben, welche positiv und positiv homogen von erster Ordnung sei. Wenn es dann zu jeder Metrik

$$ds = f(x; dx) = \varphi(B^i_k(x)\, dx^k)$$

(B^i_k ein beliebiges Tensorfeld maximalen Ranges) einen längentreuen Affinzusammenhang gibt, dann ist φ eine quadratische Form, die Metrik also Riemannsch. WEYL [2] hat später die Voraussetzungen über die Metrik so verschärft, daß er von vornherein eine auf der Mannigfaltigkeit der „gleichlangen" Vektoren transitive lineare Gruppe voraussetzt. Unter dieser starken zusätzlichen Annahme konnte er die Kennzeichnung der Riemannschen Räume erreichen.

Sowohl die HELMHOLTZ-LIEschen Postulate als auch die Forderungen aus den beiden WEYLschen Raumproblemen können vom Standpunkt der heutigen Physik nicht voll befriedigen. Die in allen diesen Systemen von vornherein geforderten Linearitätseigenschaften laufen nämlich darauf hinaus, daß die Möglichkeit kleiner starrer Körper verlangt wird. C. F. v. WEIZSÄCKER [1] hat darauf hingewiesen, daß man diese Möglichkeit heute nicht mehr als eine aller Physik notwendig vorausgehende Eigenschaft des Raumes (oder der relativistischen „Welt") ansehen kann, sondern daß eine solche Behandlung des Raumproblems gegeben werden sollte, die aus anderen grundlegenden Forderungen ableitet, daß die Metrik Riemannsch ist, womit die Möglichkeit infinitesimaler, frei beweglicher starrer Körper als Folgerung und nicht als Postulat erscheint. Nachdem in früheren Arbeiten (LAUGWITZ [4], [5]) der Fall definiter Metriken bereits behandelt worden ist, sollen hier ganz allgemeine Maßbestimmungen im Sinne von III, § 1 zur Auswahl zugelassen sein, und unter ihnen soll mit affingeometrischen Hilfsmitteln eine Kennzeichnung der Riemannschen Metriken gegeben werden.

Zu den neuen Forderungen kann man auf folgende Weise gelangen. Wie WEYL [2] verlangt, daß „sich die verschiedenen Punkte der Mannigfaltigkeit nicht schon hinsichtlich der in jedem von ihnen herrschenden Maßbestimmung unterscheiden" (Homogenität des Raumes), so können wir ähnlich auch fordern, daß sich die verschiedenen Richtungen in einem Punkte, wenn sie physikalisch gleichberechtigt sind, nicht durch Eigenschaften der Maßbestimmung unterscheiden lassen (Isotropie des Raumes); oder, was dasselbe besagt, daß jede geometrische Eigenschaft, die der Eichfläche E in einem ihrer Punkte zukommt, auch für jeden anderen Punkt von E gelten muß. Ehe wir diese Forderung mathematisch präzisieren, muß bemerkt werden, daß sie zur Kennzeichnung der Riemannschen Räume noch nicht hinreicht: sie wird auch von (elliptischen oder hyperbolischen) logarithmischen Spiralen als Eichkurven im zweidimensionalen Fall erfüllt, weil diese Kurven eine homogene affine Gruppe gestatten, und weil daher alle zentralaffinen Eigenschaften eines Kurvenpunktes auch für jeden anderen Kurvenpunkt gelten. Die Isotropieforderung soll daher noch ergänzt werden durch eine Forderung der Gleichberechtigung aller Richtungsänderungen, was auf das Postulat hinausläuft, daß alle Tangentenrichtungen der Eichfläche E in einem ihrer Punkte nicht aus der Metrik unterschieden werden können. Es zeigt sich, daß zur Kennzeichnung der Riemannschen Räume die letztere Forderung tatsächlich hinreichend ist, weshalb wir nur sie zu präzisieren brauchen.

Postulat. *Es sei eine Vorschrift gegeben, die jedem Paar Richtung, Richtungsänderung (repräsentiert durch einen Punkt $e^i(u)$ der Eichfläche und eine Tangentenrichtung $e^i_\beta du^\beta$) eine Invariante zuordnet:*

$$I(u, du) = I(g_{ik}, g_{ijk}, de^i)$$

mit

$$I(a . de^i) = I(de^i) \quad \text{für} \quad a > 0.$$

Dann wird verlangt, daß jede derartige Invariante konstant sei.

Die spezielle Form der zugelassenen Invarianten kann man etwa folgendermaßen begründen: Die Invariante soll von der Metrik im Punkte e^i und im Nachbarpunkt $e^i + de^i$ abhängen; die Metrik wird repräsentiert durch die oskulierenden Quadriken in diesen Punkten. Daraus ergibt sich die Abhängigkeit von $g_{ik}(e)$, $g_{ijk}(e)$. Die Abhängigkeit von der Richtungsänderung hat nur einen affinen Sinn, wenn sie für alle Änderungen desselben Tangentenstrahls die gleiche ist, und so kommt man zur geforderten Homogenität.

Dieses Postulat soll jetzt angewandt werden zur Bestimmung derjenigen Eichflächen E, die ihm genügen. Wir wollen wie üblich mit $\text{sign}(f)$ die folgende Funktion bezeichnen:

$$\text{sign}(f) = +1, \; 0, \; -1 \quad \text{je nachdem } f >, =, < 0.$$

Aus dem Postulat folgt für

$$I = \text{sign}\,[g_{ik}(e^i)\, de^i\, de^k]:$$

Die Eichfläche ist entweder ein Hyperebenenpaar (dann ist die Hyperflächenmetrik $\gamma_{\alpha\beta}$ total ametrisch), oder die induzierte Hyperflächenmetrik $\gamma_{\alpha\beta}$ ist definit.

Wir brauchen von jetzt an nur den zweiten Fall, den Fall definiter Hyperflächenmetrik zu betrachten. Sei

$$I' = \operatorname{sign}\,[g_{ijk}(e)\, de^i\, de^j\, de^k].$$

(I' gibt also das Vorzeichen der zweiten, kubischen Fundamentalform der Eichfläche an.) Wäre für ein de^i etwa $I'(de) > 0$, so hätte man für den entgegengesetzten Tangentenstrahl $I'(-de) < 0$. Wenn das Postulat erfüllt sein soll, kann also nur gelten: $I' = 0$, und daraus folgt $g_{ijk} = 0$, mithin, daß die Indikatrix eine Quadrik mit Mittelpunkt 0 ist. Berücksichtigt man noch die bereits bewiesene Definitheit der Flächenmetrik, so bleiben folgende affine Typen von Quadriken als mögliche Eichflächen übrig:

$$x_1^2 - x_2^2 - \ldots - x_n^2 = 1 \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1 \tag{2}$$

und der Fall total ametrischer Flächenmetrik

$$x_1^2 = 1. \tag{3}$$

Umgekehrt genügen diese drei Typen von Eichflächen auch wirklich dem Postulat. Denn sie gestatten jeweils eine linearhomogene Gruppe, welche transitiv auf der Menge der Tangentialstrahlen operiert, woraus die Konstanz der in unser Postulat eingehenden Invarianten unmittelbar folgt.

III.4.1. *Die Maßbestimmung einer allgemein-metrischen differenzierbaren Mannigfaltigkeit genügt dann und nur dann dem Isotropiepostulat von S. 56, wenn die Eichflächen in jedem Punkt einem der drei Typen* (1)–(3) *angehören.*

Diese Lösung liefert übrigens – anders als WEYLS Lösung des Raumproblems – im Falle $n = 4$ auch eine Auszeichnung der für die Relativitätstheorie richtigen Signatur der die Maßbestimmung definierenden quadratischen Form.

Obwohl der Beweis zu III.4.1 nur von den einfachsten afffingeometrischen Hilfsmitteln Gebrauch macht, folgt noch ein einfacher neuer Beweis zum HELMHOLTZ-LIEschen Raumproblem, der deswegen nicht ohne Interesse sein mag, weil REIDEMEISTER [1] einen affingeometrischen Beweis des Satzes von HELMHOLTZ-LIE auf den verhältnismäßig tiefer liegenden Satz von MASCHKE gegründet hat und übrigens dabei auch nur den definiten Fall erfaßt. Wir beweisen noch:

III.4.2. (Satz von HELMHOLTZ und LIE) *Die Eichfläche E gestatte eine Gruppe von homogenen Affinitäten, welche transitiv auf der Mannigfaltigkeit der Paare Punkt, Tangentialstrahl der Eichfläche E operiere. Dafür ist notwendig und hinreichend, daß E einem der drei Typen* (1), (2), (3) *angehört.*

Der Beweis folgt unmittelbar aus III.4.1 und der Tatsache, daß die verwendeten Invarianten unter diesen homogenen Affinitäten invariant sind.

Dieses Postulat zum HELMHOLTZ-LIEschen Satz enthält die Forderung der freien Beweglichkeit der zweidimensionalen Richtungselemente, nicht aber ähnliche Forderungen für höherdimensionale Elemente, wie sie z. B. bei einem Beweis von WEYL [2] benötigt werden. Die Kennzeichnung gilt für beliebige (auch unendliche) Raumdimension und vermeidet das sogenannte Monodromieaxiom, das bereits von LIE als für $n = 3$ überflüssig erkannt wurde. Daß wir das Monodromieaxiom auch für $n = 2$ nicht benötigen, liegt daran, daß aus der Voraussetzung in diesem Falle folgt: Es gibt eine homogene Affinität, welche die Eichkurve E in sich überführt und (e, de) nach $(e, -de)$ bringt (Affinspiegelung).

LITERATURVERZEICHNIS

BARTHEL, W.: [1] Über eine Parallelverschiebung mit Längeninvarianz in lokal-Minkowskischen Räumen. Arch. d. Math. 4, 346–365 (1953).

BERWALD, L.: [1] Über affine Geometrie XXX. Die oskulierenden Flächen zweiter Ordnung in der affinen Flächentheorie. Math. Z. 10, 160–172 (1921).

[2] Die Grundgleichungen der Hyperflächen im euklidischen Raum gegenüber den inhaltstreuen Affinitäten. Monatsh. f. Math. 32, 89–106 (1922).

BLASCHKE, W. :[1] Vorlesungen über Differentialgeometrie II. Affine Differentialgeometrie. Berlin 1923.

[2] Frenets Formeln für den Raum von Riemann. Math. Z. 6, 94–99 (1920).

BRUNN, H.: [1] Über Kurven ohne Wendepunkte. Habilitationsschrift, München 1889.

CARTAN, E.: [1] Les espaces de Finsler. Paris 1934.

[2] Les espaces métriques fondés sur la notion d'aire. Paris 1933.

DANZER, L., D. LAUGWITZ und H. LENZ: [1] Über das Löwnersche Ellipsoid und sein Analogon unter den einem Eikörper einbeschriebenen Ellipsoiden. Arch. d. Math. 8, 214–219 (1957).

DEICKE, A.: [1] Über die Finsler-Räume mit $A_i = 0$. Arch. d. Math. 4, 45–51 (1953).

DELENS, P.: [1] La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentielle projective. Paris 1934.

DUPIN, CH.: [1] Développements de géometrie. Paris 1813.

FINSLER, P.: [1] Über Kurven und Flächen in allgemeinen Räumen. Dissertation Göttingen 1918. Neudruck Basel 1951.

GRASSMANN, H.: [1] Die Ausdehnungslehre. Berlin 1862. Besonders II, Kap. 2.

HAACK, W.: [1] Affine Geometrie der parabolischen Strahlensysteme, Math. Z. 33, 232–270 (1921).

HELMHOLTZ, H. v.: [1] Über die Tatsachen, die der Geometrie zum Grunde liegen. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1868, 193–221.

KAWAGUCHI, A.: [1] On the theory of non-linear connections II. Theory of Minkowski space and of non-linear connections in a Finsler space. Tensor (N. S.) 6, 165–199 (1956).

KAWAGUCHI, A., und D. LAUGWITZ: [1] Remarks on the theory of Minkowski spaces. Tensor (N. S.) 7, 190–199 (1957).

KRUPPA, E.: [1] Analytische und konstruktive Differentialgeometrie. Wien 1957.

LANDSBERG, G.: [1] Krümmungstheorie und Variationsrechnung. Jahresber. DMV. 16, 547–557 (1907).

LAUGWITZ, D.: [1] Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. Dissertation Göttingen 1953. In: Math. Z. 61, 100–118 und 134–149 (1954).

[2] Grundlagen für die Geometrie der unendlichdimensionalen Finslerräume. Annali mat. pura ed appl. (IV) 41, 21–41 (1955).

[3] Zur geometrischen Begründung der Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. Arch. d. Math. 6, 448–453 (1955).

[4] Vektorübertragungen in der Finslerschen Geometrie und der Wegegeometrie. Proc. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam A 59, 21–29 (1956) = Indagationes math. 18.

[5] Über die Invarianz quadratischer Formen bei linearen Gruppen und das Raumproblem. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen 1956, 21–25.

[6] Über die Rolle der pythagoreischen Metrik in der Physik. Zeitschr. f. Naturforschg. 9*a*, 827–832 (1954).

[7] Zur Differentialgeometrie der Hyperflächen in Vektorräumen und zur affingeometrischen Deutung der Theorie der Finslerräume. Math. Z. 67, 63–74 (1957).

[8] Eine Beziehung zwischen Minkowskischer und affiner Differentialgeometrie. Publ. math. Debrecen. 5, 72–76 (1957).

[9] Über eine Vermutung von H. Weyl zum Raumproblem. Arch. d. Math. *9*, 128–133 (1958).

LEICHTWEISS, K.: [1] Das Problem von Cauchy in der mehrdimensionalen Differentialgeometrie. III. Natürliche Gleichungen. Math. Ann. 132, 201–245 (1956).

LENSE, J.: [1] Über ametrische Mannigfaltigkeiten und quadratische Differentialformen mit verschwindender Diskriminante. Jahresber. DMV. 35, 281–294 (1926).

LIE, S.: [1] Theorie der Transformationsgruppen III, Abt. V. Leipzig 1893.
LIPPMANN, H.: [1] Zur Winkeltheorie in zweidimensionalen Minkowski- und Finslerräumen. Kon. Ned. Akad. Wetensch. Amsterdam Proc. A. 60, 162–170 (1957) = Indag. math. 19.
LÖBELL, F.: [1] Integrabilitätsbedingungen in der Theorie der Flächenabbildungen. Sitzber. Bayer. Akad. Wiss. Math.-nat. Kl. 1951, 11–28.
LORCH, E. R.: [1] A curvature study of convex bodies in Banach spaces. Annali mat. pura ed appl. (IV) 34, 105–112 (1955).
LORCH, E. R. and D. LAUGWITZ: [1] Riemann metrics associated with convex bodies in normed spaces. Amer. J. Math. 78, 889–894 (1956).
MAYER, O.: [1] Géométrie centro-affine différentielle des surfaces. Ann. scient. Univ. Jassy 21, 1–77 (1935).
MÜLLER, Emil: [1] Relative Minimalflächen. Monatsh. Math. Phys. 31, 3–19 (1921).
NAZIM, A.: [1] Über Finslersche Räume. Dissertation München 1936.
REIDEMEISTER, K.: [1] Das Lie-Helmholtzsche Raumproblem und ein Satz von Maschke. Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 4, 172–173 (1925).
RIEMANN, B.: [1] Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen. Vorlesung Göttingen 1854. Neudruck Berlin 1919 (vgl. auch WEYL [1]).
RUND, H.: [1] Über die Parallelverschiebung in Finslerschen Räumen. Math. Z. 54, 115–128 (1951).
SALKOWSKI, E.: [1] Affine Differentialgeometrie. Berlin-Leipzig 1934.
SCHEFFERS, G.: [1] Einführung in die Theorie der Flächen. 3. Aufl. Berlin-Leipzig 1922 (besonders 172–180).
SCHEIBE, E.: [1] Über das Weylsche Raumproblem, Dissertation Göttingen 1955. J. reine angew. Math. 197, 162–207 (1957).
SCHOUTEN, J. A.: [1] Ricci calculus. 2nd ed. Berlin 1954.
SÜSS, W.: [1] Zur relativen Differentialgeometrie I. Japanese J. Math. 4, 57–75 (1927).
VAGNER, V. V.: [1] Finslersche Geometrie als Theorie eines Feldes lokaler Hyperflächen in der X_n (russisch). Trudy Seminar Vektor Tensor Analysis. 7, 65–166 (1949).
VARGA, O.: [1] Zur Herleitung des invarianten Differentials in Finslerschen Räumen. Monatsh. Math. Phys. 50, 165–175 (1941).
[2] Die Krümmung der Eichfläche des Minkowskischen Raumes und die geometrische Deutung des einen Krümmungstensors des Finslerschen Raumes. Abh. math. Sem. Univ. Hamburg 20, 41–51 (1955).
v. WEIZSÄCKER, C. F.: [1] Über die Rolle der quadratischen Metrik in der Physik. Zeitschr. f. Naturforschg. 7a, 141 (1952).
WEYL, H.: [1] Kommentar zu Riemanns Habilitationsvorlesung. Berlin 1919.
[2] Mathematische Analyse des Raumproblems. Berlin 1923.