BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG
1989

MÜNCHEN 1990

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Über einen elementaren Satz der Analysis

Von **Leopold Schmetterer**

vorgetragen von Herrn Heinz Bauer in der Sitzung vom 14. Juli 1989

Die nachstehende Note hat ihren Ausgangspunkt in einer Bemerkung von Herrn W. Wertz, der anläßlich eines in Wien abgehaltenen Seminars über die Geometrie von L_1-Räumen darauf hinwies, daß seiner Meinung nach aus $f \geqslant 0$, $f \in L_1(R_1)$, der Existenz von $f^{(1)}$ und $f^{(2)}$ überall im R_1 mit der Bedingung $f^{(2)} \in L_1(R_1)$ stets

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^{(2)}\, dx = 0 \tag{1}$$

folge.

Dabei bedeuten $L_1(R_1)$ die Menge der im euklidischen R_1 Lebesgue integrierbaren reellen Funktionen und $f^{(i)}$ für $i = 1,2,\ldots$ die i-te Ableitung von f.

Tatsächlich ist diese Aussage für alle $f \in L_1(R_1)$ richtig, wie man leicht sieht, wenn man sich eines Satzes von Carathéodory und W. H. Young [1] bedient, welchen wir in vereinfachter Form als Lemma zitieren.

Lemma: *Es sei g in R_1 definiert und es existiere überall im R_1 die erste Ableitung $g^{(1)}$ und es sei $g^{(1)} \in L_1(R_1)$.*

Dann ist $x \to \int_{-\infty}^{x} g^{(1)}\, dt$ eine Stammfunktion von $g^{(1)}$, unterscheidet sich also von g nur um eine Konstante.

Wie das Beispiel der Abbildung

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geqslant 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

zeigt, gilt die Aussage (1) nicht notwendig, wenn f nur an einer Stelle nicht differenzierbar ist.

Der Beweis von (1) unter den angegebenen Bedingungen läßt es offen ob auch $g^{(1)} \in L_1(R_1)$ gilt. Das ist aber tatsächlich der Fall und ist schon lange bekannt. [2], [3]. Wir geben hierfür einen kurzen

Beweis, der leicht verallgemeinert werden kann und Resultate liefert, die sich anscheinend noch nicht in der Literatur finden. Wir bezeichnen die L_1-Norm von f mit f_0 und die der Ableitung $f^{(i)}$ mit f_i, $i \geqq 1$.

Zunächst zeigen wir den

Satz 0: *Es sei $f \in L_1(R_1)$ und zweimal differenzierbar im R_1. $f^{(2)} \in L_1(R_1)$ impliziert $f^{(1)} \in L_1(R_1)$.*

Überdies gilt:

$$f_1 \leq 2 f_0^{1/2} f_2^{1/2}. \tag{2}$$

Zum Beweise bemerken wir, daß man nur den Fall $f_2 \neq 0$ betrachten muß. Für jedes $x \in R_1$ und $0 \leq y \leq 1$ sei

$$F(x,y) = \alpha/2\ [f(x+\beta y) - f(x-\beta y)]$$

wobei α und β reelle Zahlen sind, welche $\alpha > 0$ und

$$\alpha\beta = 1 \tag{3}$$

erfüllen.

Aus

$$F(x,1) - F(x,0) = F_y(x,0) + F_y(x,\zeta) - F_y(x,0) \text{ mit } 0 < \zeta < 1$$

ergibt sich also für jedes $x \in R_1$

$$\alpha/2\ [f(x+\beta) - f(x-\beta)] = f^{(1)}(x) + 1/2\,[f^{(1)}(x+\beta\zeta) - f^{(1)}(x) - \\ - [f^{(1)}(x) - f^{(1)}(x-\beta\zeta)]]$$

Zieht man das Lemma heran, erhält man weiter:

$$\alpha/2\ [f(x+\beta) - f(x-\beta)] = f^{(1)}(x) + 1/2\ [\int\limits_x^{x+\zeta\beta} f^{(2)}\,dt - \\ - \int\limits_{x-\zeta\beta}^{x} f^{(2)}\,dt]$$

Wir führen für $x \in R_1$ die Bezeichnung ein:

$$G(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} |f^{(2)}|\,dt.$$

G ist nicht abnehmend und es gilt:

$$0 \leq G \leq f_2 \tag{4}$$

Mit dieser Bezeichnung wird für jedes $x \in R_1$

$$|f^{(1)}(x)| \leqslant \alpha/2 |f(x+\beta) - f(x-\beta)| + 1/2 \; [G(x+\zeta\beta) - G(x-\zeta\beta)] \leqslant \alpha/2 |f(x+\beta) - f(x-\beta)| + 1/2 \, [G(x+\beta) - G(x-\beta)].$$

Daraus folgert man für beliebige reelle positive Zahlen M, N wegen (3) und (4)

$$\int_{-M}^{N} |f^{(1)}| dx \leqslant \beta^{-1} f_0 + 1/2 \int_{N-\beta}^{N+\beta} G \, dx \leqslant \beta^{-1} f_0 + \beta f_2$$

Mit $\beta = \gamma f_0^{1/2} f_2^{-1/2}$ gilt also

$$f_1 \leqslant \inf_{Y>0} \; f_0^{1/2} f_2^{1/2} \; (\gamma^{-1} + \gamma) = 2 f_0^{1/2} f_2^{1/2}$$

und damit die behauptete Ungleichung (2).

Wir notieren das folgende

Korollar: *Es sei $f \in L_1(R_1)$ und $(m+1)$-mal differenzierbar, $m \geqslant 1$. Weiter sei $f^{(i)} \in L_1(R_1)$ für $1 \leqslant i \leqslant m+1$.*

Dann gilt

$$f_m \leqslant 2^m f_0^{1/(m+1)} f_{m+1}^{m/(m+1)} \tag{5}$$

Überdies besitzt der Quotient

$$(f_k^{1/2} f_m^{1/2}) \; (f_{k-1}^{1/2} f_{m+1}^{1/2})^{-1}$$

(bei nicht verschwindendem Nenner) für $1 \leqslant k \leqslant m$ eine leicht angebbare nur von m abhängige (f-freie) obere Schranke.

Die Ungleichung (5) ergibt sich leicht durch Induktion und das gilt auch für die anschließend formulierte Behauptung.

Ob für $m = 1$ die Konstante 2 in (5) kleinstmöglich ist, scheint nicht bekannt zu sein und wird auch hier nicht entschieden. Für $m \geqslant 2$ ist die Schranke sicherlich nicht optimal (vgl. die Beispiele am Ende dieser Note.)

Der nachfolgende Satz 1 zeigt auch, daß man die Voraussetzungen des Korollars weitgehend abschwächen kann:

Satz 1: *Es sei $f \in L_1(R_1)$ und für $m \geqslant 1$ $(m+1)$-mal differenzierbar.*

Dann folgt

aus $f^{(m+1)} \in L_1(R_1)$ *auch* $f^{(i)} \in L_1(R_1)$ *für* $1 \leqslant i \leqslant m$. *Überdies gilt für* $m = 2l-1,\ l \geqslant 1$

$$\left.\begin{aligned} f_m \leqslant \inf(0 < \beta_1 < \ldots < \beta_l:\ & \\ m!\, f_0 \sum_{i=1}^{l} \Big[\beta_i \prod_{j=i+1}^{l} (\beta_j^2 - \beta_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\beta_i^2 - \beta_j^2)\Big]^{-1} + & \\ + f_{m+1} \sum_{i=1}^{l} \beta_i^m \Big[\prod_{j=i+1}^{l} (\beta_j^2 - \beta_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\beta_i^2 - \beta_j^2)\Big]^{-1}) & \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

oder auch

$$\left.\begin{aligned} f_m \leqslant f_0^{1/(m+1)} f_{m+1}^{m/(m+1)} \inf\big[0 < \gamma_1 < \ldots < \gamma_l:\ & \\ m! \sum_{i=1}^{l} \Big[\gamma_i \prod_{j=i+1}^{l} (\gamma_j^2 - \gamma_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\gamma_i^2 - \gamma_j^2)\Big]]^{-1} + \sum_{i=1}^{l} \gamma_i^m & \\ \Big[\prod_{j=1}^{l} (\gamma_j^2 - \gamma_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\gamma_i^2 - \gamma_j^2)\Big]^{-1} & \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Für $m = 2l,\ l \geqslant 1$ *gilt die Ungleichung*

$$\left.\begin{aligned} f_m \leqslant \inf(0 < \beta_1 < \ldots < \beta_l:\ & \\ 2(m!)\, f_0 \sum_{i=1}^{l} \Big[\beta_i^2 \prod_{j=i+1}^{l} (\beta_j^2 - \beta_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\beta_i^2 - \beta_j^2)\Big]^{-1} + & \\ + f_{m+1} \sum_{i=1}^{l} \beta_i^{m-1} \Big[\prod_{j=i+1}^{l} (\beta_j^2 - \beta_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\beta_i^2 - \beta_j^2)\Big]^{-1}) & \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Ebenso gilt auch die zu (7) analoge Ungleichung.

Die Beweismethode modifiziert Überlegungen, welche im Zusammenhang mit dem stochastischen Approximationsverfahren von Kiefer und Wolfowitz verwendet wurden. Vgl. [4] und die dort zitierte Literatur.

Sei $m = 2l-1$. Für $0 < \beta_1 < \ldots < \beta_l$ sei $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ die Lösung des linearen Gleichungssystems

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_i^{2j-1} = 0, \qquad 1 \leqslant j \leqslant l-1 \\ &\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_i^{2l-1} = 1. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Für $(x,y) \in R_1 \times [0,1]$ definiere man die Abbildung

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \quad [f(x + \beta_1 y) - f(x - \beta_i y)]/2$$

Unter Berücksichtigung von (9) erhält man in weitgehender Analogie zum Beweis des Satzes 0:

$$F(x, 1) - F(x, 0) = \frac{1}{(2l - 1)!} \cdot \frac{d^{2l-1} F(x, 0)}{dy^{2l-1}} + \frac{1}{(2l - 1)!} \times$$

$$\left(\frac{d^{2l-1} F(x, \zeta)}{dy^{2l-1}} - \frac{d^{2l-1} F(x, 0)}{dy^{2l-1}} \right)$$

mit $0 < \zeta < 1$.

Dies ist äquivalent mit

$$(2l - 1)! \sum_{i=1}^{l} \alpha_i/2 \, [f(x + \beta_i) - f(x - \beta_i)] = f^{(m)}(x) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \, \beta_i^{2l-1} /2 \, [f^{(m)}(x + \zeta\beta_i) - f^{(m)}(x) - [f^{(m)}(x) -$$

$$- f^{(m)}(x - \beta_i \, \zeta)]].$$

Zieht man wieder das Lemma heran und verfährt man ganz analog wie beim Beweis des Satzes 0, erhält man

$$f_m \leqslant \left(2l - 1\right)! \, f_0 \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| + f_{m+1} \sum_{i=1}^{l} |\alpha_i| \beta_i^{2l}$$

Nun folgt aus (9):

$$|\alpha_i| = \left[\beta_i \prod_{j=i+1}^{l} (\beta_j^2 - \beta_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\beta_i^2 - \beta_j^2)\right]^{-1}$$

und daraus die Abschätzung (6).

Setzt man $\beta_i = \gamma_i f_0^{1/(m+1)} f_{m+1}^{-1/(m+1)}$, dann erhält man (7).

Es sei nun $m = 2l$, $l \geqslant 1$. Dann bestimmen wir $\alpha_1, \ldots, \alpha_l$ durch das lineare Gleichungsystem:

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \, \beta_i^{2j} = 0 \qquad 1 \leqslant j \leqslant l - 1$$

$$\sum_{i=1}^{l} \alpha_i \, \beta_i^{2l} = 1.$$

Die in $R_1 \times [0,1]$ definierte Abbildung $F(x,y)$ ist jetzt durch

$$F(x,y) = \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \left[f(x + \beta_i y) + f(x - \beta_i y) \right] / 2$$

gegeben. Verfährt man wie oben, erhält man

$$(2l)! \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \left[[f(x+\beta_i) + f(x-\beta_i)]/2 - f(x) \right] =$$

$$= f^{(2l)}(x) + \sum_{i=1}^{l} \alpha_i \beta_i^{2l}/2 \left[f^{(2l)}(x + \xi\beta_i) - f^{(2l)}(x) - \right.$$

$$\left. - [f^{(2l)}(x) - f^{(2l)}(x - \xi\beta_i)] \right]$$

Wenn man beachtet, daß jetzt für $1 \leqslant i \leqslant l$

$$|\alpha_i| = \left[\beta_i^2 \prod_{j=i+1}^{l} (\beta_j^2 - \beta_i^2) \prod_{j=1}^{i-1} (\beta_i^2 - \beta_j^2) \right]^{-1}$$

gilt, folgert man wie oben die Ungleichung (8).

Wir betrachten noch 2 Sonderfälle:

Für $m = 2$ gilt

$$f_2 \leqslant 4\alpha f_0 + \beta f_3 \quad \text{mit}$$

$$\alpha, \beta > 0 \quad \text{und} \quad \alpha\beta^2 = 1.$$

$$\beta \to \frac{4}{\beta^2} f_0 + \beta f_3 \text{ ist konvex.}$$

An der Stelle $\beta_0 = 2 f_0^{1/3} / f_3^{1/3}$ wird das Minimum angenommen.

Es folgt $f_2 \leqslant 3 f_0^{1/3} f_3^{2/3}$, während (5) $4 f_0^{1/3} f_3^{2/3}$ ergibt.

Für $m = 3$ erhält man

$$f_3 \leqslant 6 f_0 \frac{1}{\beta_1 \beta_2 (\beta_2 - \beta_1)} + f_4 \frac{\beta_1^2 - \beta_1\beta_2 + \beta_2^2}{\beta_2 - \beta_1}$$

Wählt man $\beta_1 = f_0^{1/4} / f_4^{1/4}$ und $\beta_2 = \gamma\beta_1$ mit $\gamma > 1$, dann wird die rechte Seite der Ungleichung gleich

$$f_0^{1/4} f_4^{3/4} \left[\frac{6}{\gamma(\gamma - 1)} + \frac{\gamma^2 - \gamma + 1}{\gamma - 1} \right]$$

Für $y = \frac{5}{2}$ ergibt sich als Wert des Klammerausdrucks

$$\frac{143}{30} < 8.$$

Bemerkung 1: Man kann unter geeigneten Voraussetzungen zu den Sätzen 0 und 1 analoge Ergebnisse erhalten, wenn man das Lebesgue'sche Maß durch Maße der Form gdx ersetzt.

Bemerkung 2: Herr G. Pflug, Wien, hat mich auf [3] aufmerksam gemacht.

Literatur

[1] A. Rosenthal, Enzyklopädie der Mathemat. Wissensch. mit Einschluß ihrer Anwendungen II C 9b, S. 1106.

[2] E.F. Beckenbach, R. Bellmann. Inequalities. Springer-Verlag, Berlin (1961). Seite 168ff.

[3] R.R. Kallmann, Gian-Carlo Rota. On the Inequality $f'^2 \leqslant 4f \cdot f''$ in: Inequalities-II (O. Shisha Ed.) Academic Press New York and London 1970. pp. 187–192.

[4] L. Schmetterer. Multidimensional Stochastic Approximation Multivariate Analysis, Vol. II (1969) Academic Press, New York pp. 443–458.