

BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

ABHANDLUNGEN · NEUE FOLGE HEFT 88

GEORG SÜSSMANN

Über den Meßvorgang

Mit 2 Figuren

Vorgelegt von Herrn Fritz Bopp

am 5. Juli 1957

MÜNCHEN 1958

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN KOMMISSION BEI DER C. H. BECK'SCHEN VERLAGSBUCHHANDLUNG

Habilitationsschrift, München 1957

Druck der C. H. Beck'schen Buchdruckerei Nördlingen
Printed in Germany

INHALT

I. Vorbemerkungen	5
II. Die Auswahl-These	13
III. Eine Analyse des Meßvorgangs	14
A. Die Maximalmessung	15
1. Die Zerlegung	25
2. Die Aufteilung	26
a) Die Erweiterung	28
b) Die Aufnahme	30
c) Der Schnitt	32
3. Die Ablesung	36
B. Die Widerlegung der Auswahl-These	37
C. Die Unvollständige Messung	38

Seit der Aufstellung der neueren Quantentheorie gehört die Frage nach den möglichen Messungen und nach ihren Einwirkungen auf die Bewegung der atomaren Meßobjekte zu den Grundproblemen der modernen Mechanik. Insbesondere ist die in den Begriffen der Komplementarität und der Unbestimmtheit festgestellte Grenze des Geltungsbereiches der klassischen Mechanik¹ erst durch eine genauere Betrachtung der Meßmöglichkeiten und der Meßvorgänge gefunden worden. In die Argumentation gingen natürlich die damals schon lange bekannten empirischen Grundtatsachen der Quantentheorie ein; doch machte erst die Untersuchung der Messung deutlich, wo die klassische Mechanik versagt und worauf dies Versagen beruht. Trotz dieser zentralen Bedeutung der Messung für das Verständnis der neuen Mechanik fehlt bis heute eine genaue und erschöpfende Theorie des Meßvorgangs. Um den mathematischen Formalismus der Quantenmechanik physikalisch zu deuten, mußte man die möglichen Messungen diskutieren. Doch ist dabei nicht vollständig geklärt worden, ob oder wie sich der Meßvorgang selbst dem Formalismus unterordnen läßt². Interessant ist vor allem die Frage, wieweit sich am Meßproblem grundsätzliche Unterschiede zwischen der klassischen und der modernen Mechanik zeigen. Die Absicht dieser Arbeit ist es, den Vorgang der Zustandsmessung quantenmechanisch zu beschreiben und zu untersuchen, welche Rolle das Messen im quantenmechanischen Formalismus spielt. Die Arbeit erhebt nicht den Anspruch, das Problem in allen Einzelheiten erschöpfend zu behandeln.

I. VORBEMERKUNGEN

Wir beginnen mit der Definition der benutzten Grundbegriffe. Es gibt Messungen verschiedener Art; wir teilen sie mit v. WEIZSÄCKER³ in zwei Gruppen: solche mit zeitlosen und solche mit kontingenten Meßobjekten. Zu den ersteren, die wir allgemeine Mes-

¹ N. BOHR: Naturw. 16 (1928) 245; vgl. auch N. BOHR, H. A. KRAMERS u. J. C. SLATER, Zs. f. Phys. 24 (1924) 69. W. HEISENBERG: Zs. f. Phys. 43 (1927) 172. N. BOHR: Naturw. 17 (1929) 483; 18 (1930) 73; Atomtheorie und Naturbeschreibung, Berlin 1931.

² Einzelne Aspekte des Problems wurden behandelt von W. HEISENBERG (Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie, Leipzig 1930), J. v. NEUMANN (Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik, Berlin 1932), W. PAULI (Handbuch d. Phys., Springer 1933, XXIV/1, S. 83), F. LONDON u. E. BAUER (La Théorie de l'observation en mécanique quantique, Paris 1939), P. JORDAN (Philosophy of Science 16 (1949) 269, G. LUDWIG (Zeits. f. Phys. 135 (1953) 483; Die Grundlagen der Quantenmechanik, Springer 1954), D. BOHM (Quantum Theory, New York 1951), H. J. GROENEWOLD, Physica 12 (1946) 405; Proc. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam B 55 (1952) 219. Ich möchte Herrn Prof. GROENEWOLD auch an dieser Stelle für die Überlassung seiner neuen, noch nicht veröffentlichten Arbeit über „Quantum Measurements“ danken. Anmerkung bei der Korrektur: In der Zwischenzeit erschien der Bristoler Konferenzbericht „On Observation and Interpretation“, ed. S. KÖRNER, London (Butterworths) 1957, mit Beiträgen von H. J. GROENEWOLD, F. BOPP, P. K. FEYERABEND, G. SÜSSMANN u. a.

³ C. F. v. WEIZSÄCKER: Naturw. 42 (1955) 521, 545; vgl. insbesondere S. 529.

sungen nennen wollen, gehören die Bestimmungen der fundamentalen Naturkonstanten, ferner z. B. die von Massen, Ladungen, Paritäten, mittleren Lebensdauern, Eigendrehimpulsen, elektrischen und magnetischen Eigenmomenten der atomaren Partikel, von Wirkungsquerschnitten der Stoßvorgänge, von Wellenlängen, Breiten und Intensitäten der Spektrallinien, also von allen möglichen (evtl. parameterabhängigen) Konstanten in Gesetzmäßigkeiten. Bei der zweiten Gruppe, den Zustandsmessungen, handelt es sich um Messungen von Observablen, d. h. um Feststellungen von Zustandseigenschaften des beobachteten physikalischen Objekts. Mit dieser Art von Messungen haben wir es in dieser Arbeit ausschließlich zu tun.

Die Gesamtheit der durch eine Zustandsmessung gewonnenen Angaben nennt man kurz den „Zustand des Objektsystems“. Nach v. NEUMANN wird er im mathematischen Formalismus der Quantentheorie im allgemeinen Falle, im sog. Gemisch, durch einen nicht-negativen hermiteschen Operator w der Spur 1 beschrieben. Nur im Spezialfall maximaler Kenntnis oder verschwindender Entropie, im sog. reinen Fall⁴, kann er durch einen auf 1 normierten Hilbertvektor ψ unbestimmter Phase ersetzt werden; w ist dann die Orthogonalprojektion e_ψ auf die Richtung ψ .

Das Ergebnis einer Zustandsmessung kann die Quantenmechanik grundsätzlich nur mit Wahrscheinlichkeit voraussagen; die Gewißheit ist ein seltener Spezialfall. Solch eine Wahrscheinlichkeitsaussage kann durch Bestimmung der relativen Häufigkeiten bei zahlreichen Wiederholungen der „gleichen“ Zustandsmessung nachgeprüft werden⁵. Zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit hat man nach demjenigen Orthogonalsystem zu entwickeln, in dem die den gemessenen Observablen entsprechenden hermiteschen Operatoren auf Diagonalforn sind. Ihre Eigenwerte sind die möglichen Meßwerte und die zugehörigen Diagonalelemente von w die gesuchten „Übergangswahrscheinlichkeiten“. Diese Entwicklung oder Zerlegung in Komponenten ist eine rein mathematische Operation und muß von der durch den Meßprozeß verursachten wirklichen, irreversiblen Zerlegung des Objektzustandes, die wir Aufteilung nennen wollen, wohl unterschieden werden.

Durch eine Messung wird der Zustand des Objekts im allgemeinen verändert; wir wollen diese Änderung Zustandsreduktion⁶ nennen. Aufgabe der Meßtheorie ist es, den Vorgang der Zustandsreduktion an Hand von Gedankenexperimenten zu diskutieren. Der Zustand erleidet nun nach den Gesetzen der Quantenmechanik eine stetige, vollkommen determinierte zeitliche Änderung $w(t)$ relativ zur Gesamtheit der Observablen. Diese stetige Relativbewegung wird in den einzelnen „Darstellungsbildern“ verschieden beschrieben: Im Heisenbergbild durch die Hamiltonschen kanonischen Gleichungen, im Schrödingerbild durch die Schrödingersche Wellengleichung und im Tomonagabild durch die Hamiltongleichungen für die „ungestörte Bewegung“ sowie durch die Schrödinger-Gleichung für die „Wechselwirkung zwischen den Teilen des Systems“. – Damit erhebt sich die wichtige Frage, ob es möglich ist, durch Berücksichtigung der Wechselwirkung zwischen dem Meßobjekt und dem Meßapparat die Zustandsreduktion auf die stetige Relativbewegung zurückzuführen.

Entsprechend dem BOHRschen Begriff der Komplementarität (zwischen dem deterministischen Hilbertraum-Formalismus einerseits und der statistischen Raum-Zeit-Beschreibung

⁴ H. WEYL: Zs. f. Phys. 46 (1927) 1; J. v. NEUMANN: Gött. Nachr. 1927, S. 245.

⁵ Dabei ist allerdings zu beachten, daß Wahrscheinlichkeiten durch relative Häufigkeiten im allgemeinen nur näherungsweise wiedergegeben werden, und selbst dies nicht mit Sicherheit, sondern nur mit einer sehr großen Wahrscheinlichkeit. (Durch Verlängern der Versuchsreihe kann man diese Wahrscheinlichkeit der Gewißheit immerhin beliebig nahe bringen.) Vgl. dazu S. 18.

⁶ Sie wird meist als „Reduktion der Wellenpakete“ bezeichnet.

andererseits) wird diese Frage von den meisten Autoren verneint. Bei der Diskussion der Unschärferelation wird von HEISENBERG und BOHR betont, daß die Meßinstrumente einerseits ihrem Begriffe nach in wohlbekannter Weise deterministisch funktionieren müssen, daß sie aber andererseits selbst grundsätzlich dem Teilchen-Feld-Dualismus unterworfen sind. Letzteres ist wesentlich, denn anderenfalls könnte man durch geeignete Meßanordnungen die Unschärferelation „überlisten“. Zusatzvorrichtungen, die eine unzulässig genaue Lokalisierung des Objekts ermöglichen, zerstören notwendig durch ihre eigene Unschärfe die Interferenzfähigkeit der Objektwellen⁷. Die klassische Physik ist also methodisch eine Voraussetzung der Quantenphysik, folgt aber andererseits aus ihr im Grenzfall hoher Quantenzahlen oder relativ kleiner Unschärfen. Zu den Grundsätzen der Quantentheorie gehört danach die Kleinheit, aber auch die Existenz der Meßapparat-Unschärfen. Mit jeder Beobachtung ist in der Atomphysik prinzipiell eine bis zu einem gewissen Grade unkontrollierbare Störung verknüpft. Um trotz dieser Unbestimmtheit die deterministische Bewegung des Zustandes anwenden zu können, mußte HEISENBERG durch einen gedanklichen Schnitt das Meßinstrument vom Objekt abtrennen. Die Wirkung des Beobachters erscheint dann notwendig als ein mathematisch nicht näher beschreibbarer (nur in Ausnahmefällen verschwindender) Sprung $w' \rightarrow w''$ der Zustandsgröße im Hilbertraum. Dieser unstetige Vorgang ist ein wesentliches Merkmal der Zustandsreduktion und somit des quantentheoretischen Meßprozesses, ja der Quantentheorie überhaupt. Die SCHRÖDINGERSche Frage⁸ „Are there quantum jumps?“ findet durch ihn ihre Beantwortung: Die Schrödingergleichung beschreibt eine stetige Veränderung des Zustandes in deterministischer Weise, enthält also keine Quantensprünge; durch die Messung aber wird in die Theorie ein unstetiges, statistisches Element eingeführt, und auf dieses lassen sich alle sog. Quantensprünge zurückführen. Die Unstetigkeit der Quantensprünge beruht auf der Unstetigkeit in der Kenntnisaufnahme.

Die SCHRÖDINGER-Welle ist somit nicht als ein reales Feld aufzufassen⁹, sondern als „Informationskatalog“ (SCHRÖDINGER¹⁰, PAULI, vgl. Anm. 32) oder als die Gesamtheit aller der Konsequenzen, die quantenlogisch aus bekannten Meßergebnissen über zukünftige (oder vergangene) Messungen gezogen werden dürfen, also als „Implikationskatalog“ (v. WEIZSÄCKER). Den nichtobjektiven Charakter von ψ zeigt besonders eindrucksvoll eine Diskussion „verschränkter“ Systeme¹¹.

Bei alledem ist allerdings vorausgesetzt, daß keine verborgenen Parameter angenommen werden. In der ersten deterministischen Interpretation von BOHM¹² ist ψ ein objektives, wenn auch unbeobachtbares und „unanschauliches“ Feld im Konfigurationsraum. (Außerdem gibt es noch die stets streng lokalisierten Teilchen, die sich entlang einer Wellennormalen von ψ bewegen.) Diese Auffassung kann logisch nicht widerlegt werden¹³. Gegen sie

⁷ Vgl. z. B. W. PAULI², S. 86.

⁸ E. SCHRÖDINGER: Bristol Journ. Philos. Sc. III (1952) No. 10, 11.

⁹ M. BORN: Zs. f. Phys. 37 (1926) 863.

¹⁰ E. SCHRÖDINGER (Naturw. 23 [1953] 807, 823, 844) bezeichnet die ψ -Funktion als „Katalog der Erwartung“.

¹¹ A. EINSTEIN, B. PODOLSKY u. N. ROSEN: Phys. Rev. 47 (1953) 777; N. BOHR: Phys. Rev. 48 (1935) 696. Vgl. auch das Beispiel im Lehrbuch von D. BOHM², Chap. 22.

¹² D. BOHM: Phys. Rev. 85 (1952) 166, 180; 86 (1952) 389; 89 (1953) 319, 458.

¹³ Der oft genannte v. NEUMANNsche Beweis für die Nichtexistenz verborgener Parameter (vgl. ² Kap. IV. 2) ist einwandfrei, aber er setzt voraus, daß die Parameter durch die Messung nicht gestört werden. Im Unterschied zu einem älteren Versuch von DE BROGLIE (Journ. Phys. Rad. (VI) 8 (1927) 225) spielt demgemäß in den BOHMschen Arbeiten die Diskussion des Meßprozesses, der Wechselwirkung mit dem Meßapparat, eine entscheidende Rolle. Ähnliches gilt für die Differentialraum-Interpretation von N. WIENER u. A. SIEGEL (Phys. Rev. 91 (1953) 1551; 101 (1956) 429).

spricht vor allem das Argument der mathematischen Einfachheit. Auch in der BOPPSchen Interpretation der Quantenmechanik¹⁴ ist ψ bzw. w kein reales Feld, sondern eine statistische Zustandsgröße. Wir gehen auf diese Frage nicht näher ein und legen unserer Diskussion nur die übliche statistische Transformationstheorie von BORN, JORDAN und DIRAC zugrunde.

Es ist nun wesentlich, daß man nach HEISENBERG den Schnitt in Richtung auf den Beobachter hin verschieben kann, ohne daß sich dadurch das Meßresultat an der ursprünglich gemessenen Größe ändert. Wörtlich heißt es¹⁵: „Durch diese Komplementarität der Raum-Zeit-Beschreibung einerseits und der kausalen Verknüpfung andererseits tritt ferner eine eigenartige Unbestimmtheit des Begriffes ‚Beobachtung‘ auf, indem es der Willkür anheimgestellt bleibt, welche Gegenstände man zum beobachtenden System rechnen oder als Beobachtungsmittel betrachten soll.“ Die Unstetigkeit der Zustandsreduktion an der Stelle des Schnittes kann somit verschoben werden, aber sie läßt sich nicht vermeiden¹⁶: „Würde man die Meßinstrumente zum System rechnen – wobei man auch den Hilbertraum entsprechend erweitert –, so würden die oben als unbestimmt angesehenen Änderungen des Systemvektors jetzt bestimmt. Den Nutzen hieraus könnte man jedoch nur ziehen, wenn unsere Beobachtung der Meßinstrumente von Unbestimmtheit frei wäre. Für diese Beobachtungen gelten aber die gleichen Überlegungen wie oben, und wir müßten etwa auch unsere Augen mit ins System einschließen, um an dieser Stelle der Unbestimmtheit zu entgehen u. s. w. Schließlich könnte man die Kette von Ursache und Wirkung nur dann quantitativ verfolgen, wenn man das ganze Universum in das System einbezöge – dann ist aber die Physik verschwunden und nur ein mathematisches Schema geblieben.“ Der Ansicht der Kopenhagener Schule schließt sich auch v. NEUMANN an, wenn er sagt¹⁷, daß die Grenze zwischen dem Objekt und dem Beobachter „bei jeder Beschreibungsweise irgendwo gezogen werden muß, wenn dieselbe nicht leer laufen, d. h. wenn ein Vergleich mit der Erfahrung möglich sein soll.“ Dies ist eine Konsequenz der besonders von BOHR betonten Tatsache, daß man Erfahrung immer nur in klassischen Begriffen mitteilen kann.

Nach der Messung ist bekannt, daß von den verschiedenen Zuständen, die in w gemäß dem DIRACschen Superpositionsprinzip¹⁸ miteinander koexistierten¹⁹, nur der gemessene gültig ist. Die Messung hat ihn als den wahren herausgestellt, und die anderen Komponenten sind dementsprechend zu streichen. Um den neuen Zustand w'' zu erhalten, muß die gemessene Komponente durch Division mit ihrer Wahrscheinlichkeit im alten Zustand w' auf die Spur 1 umnormiert werden²⁰. Die durch den Schnitt hervorgerufene unstetige Zustandsreduktion $w' \rightarrow w''$ drückt also genau die mit der Beobachtung verbundene Änderung der Kenntnis des Objektes aus. Die Unstetigkeit ist nicht verwunderlich, sondern im Gegenteil selbstverständlich und notwendig, wenn man wie üblich den „Zustand“ als den Inbegriff der möglichen Zustandsangaben über das

¹⁴ F. BOPP: Zs. f. Naturf. 2^a (1947) 202, 7^a (1952) 82; 9^a (1954) 579; Optik 11 (1954) 255; Zs. angew. Phys. 6 (1954) 235; Bayer. Akad. d. Wiss., math.-nat. Kl. (1955) 9; Ann. de l'Inst. Henri Poincaré XV (1956) 81.

¹⁵ W. HEISENBERG, Die physikalischen Prinzipien der Quantentheorie (4. Aufl., Hirzel 1944), S. 48.

¹⁶ W. HEISENBERG¹⁵, S. 44.

¹⁷ J. v. NEUMANN², S. 224.

¹⁸ P. A. M. DIRAC, The Principles of Quantum Mechanics (Oxford 1930, 1935, 1947).

¹⁹ C. F. v. WEIZSÄCKER³, S. 548.

²⁰ Durch diese „Reduktion“ mit der anschließenden Normierung unterscheidet sich das DIRACsche quantenmechanische Superpositionsprinzip grundsätzlich von dem Superpositionsprinzip, das in klassischen linearen Feldtheorien erfüllt ist.

Objektsystem definiert. Der Zustandsoperator w beschreibt das Wissen, welches das beobachtende System vom Objektsystem besitzt²¹. Dies geschieht, wie in jeglicher Beschreibung, stilisierend. Ein nur vorausgesetztes „Wissen“ (etwa bei der Diskussion eines Gedankenexperiments) wird natürlich durch ein hypothetisches w beschrieben; ein vermeintliches, irrtümliches „Wissen“ durch ein falsches w . Auffällig an dieser Definition ist, daß als Gegenstand der mathematischen Theorie nicht (oder nur indirekt) das Objektsystem selbst erscheint, sondern vielmehr die Information des beobachtenden Systems über das Objektsystem. Diese erkenntnistheoretische Situation ist aber keineswegs ganz neu, sondern bereits aus der klassischen Thermodynamik²² seit BOLTZMANN und GIBBS wohl bekannt. An Stelle des Wahrscheinlichkeitsoperators $w(q, q')$ im Hilbertraum der $\psi(q)$ hat man dort eine Wahrscheinlichkeitsdichte $w(q, p)$ im Phasenraum der (q, p) , welche die Art der Kenntnis des Beobachters vom Objekt formuliert²³. Durch eine Messung erleidet dieses w i. allg. eine unstetige Veränderung, die mit den Hamiltonschen oder Liouvilleschen Gleichungen selbstverständlich nichts zu tun hat, wohl aber mit der Änderung der Kenntnis²⁴. Der einzige – allerdings sehr wesentliche – Unterschied zur Quantentheorie besteht darin, daß es in der klassischen Physik möglich ist, sich außerdem eine mathematische Beschreibung des Objekts selbst vorzustellen, die mit der Beschreibung eines (in Wirklichkeit immer nur hypothetischen) bestmöglichen Wissens vom Objekt genau äquivalent ist. Die beiden Lesarten des mathematischen Formalismus sind vom physikalischen Standpunkt aus gleichwertig; der Unterschied wird erst in der philosophischen Erkenntnistheorie wichtig. Die Unschärfen der klassischen Thermodynamik können demnach als Ausdruck einer rein subjektiven Unkenntnis aufgefaßt werden. Die mit einer Beobachtung verbundene Störung des Objekts darf entsprechend dem Fehlen eines Teilchen-Feld-Dualismus als beliebig klein gedacht und so die Zustandsreduktion mit ihrem Mangel an Determiniertheit außer acht gelassen werden. In der Quantentheorie dagegen gibt es keinen mathematischen Formalismus, der als eine Beschreibung des Objektsystems selbst aufgefaßt werden könnte, es sei denn, man führt verborgene (d. h. wenigstens in der bisherigen Physik nicht beobachtbare) Parameter ein. Insbesondere sind die nach der Quantenmechanik grundsätzlich bestmöglichen Zustandsangaben keineswegs frei von Unschärfen²⁵. Ein anderer Ausdruck dafür ist die Tatsache, daß in der Quantentheorie, im Unterschied zur klassischen Theorie, die unstetigen Zustandsreduktionen grundsätzlich unvermeidbar sind.

Der prinzipiell statistische Charakter der Quantenmechanik ist eine unmittelbare Folge dieser Unvermeidbarkeit des Schnittes. HEISENBERG schreibt²⁶: „Die Teilung der Welt in

²¹ Mündliche Äußerung von C. F. v. WEIZSÄCKER. Ebenso W. HEISENBERG in seinem Münchener Akademievortrag: „Dies hat schließlich zur Folge, daß die Naturgesetze, die wir in der Quantentheorie mathematisch formulieren, nicht mehr von den Elementarteilchen an sich handeln, sondern von unserer Kenntnis der Elementarteilchen“ (Die Künste im Technischen Zeitalter, Darmstadt 1956, S. 36).

²² Unter Thermodynamik verstehen wir diejenige Erweiterung der Mechanik, die notwendig wird, wenn die Kenntnis des Objekts nicht die bestmögliche ist. Wir vermeiden die Bezeichnung „statistische Mechanik“, weil in der Quantentheorie bereits die reine Mechanik statistische Elemente enthält.

²³ Nach GIBBS führt man in Gedanken eine statistische Gesamtheit von Systemen ein von der Art des Objekts, aber mit verschiedenen Werten der Observablen. Diese Betrachtungsweise ist durch v. NEUMANN in die quantenmechanische Zustandsdefinition übertragen worden. Vgl. auch Anm. 4.

²⁴ Dementsprechend hat man, worauf BOHR hingewiesen hat, auch hier eine Art Komplementarität mit Unschärferelationen, vor allem zwischen Energie und Temperatur.

²⁵ Ein quantitatives Maß für die Menge an Information ist die negative Entropie $-S = k \langle w \log w \rangle$, wobei $\langle \rangle$ die Spurbildung bedeutet ($\langle w \rangle = 1$) und $0 \log 0$ als 0 definiert ist. Notwendig und hinreichend für $w = e_\psi$ ist $S = 0$. Vgl. L. SZILARD: Zs. f. Phys. 32 (1925) 753; 53 (1929) 840 u. J. v. NEUMANN², Kap. V.

²⁶ W. HEISENBERG¹⁵, S. 44.

das beobachtete und das zu beobachtende System verhindert also die scharfe Formulierung des Kausalgesetzes. (Das beobachtende System braucht dabei keineswegs ein menschlicher Beobachter zu sein; an seine Stelle können auch Apparate wie photographische Platten usw. gesetzt werden.)“ Die Verschiebbarkeit des Schnittes drückt aus, daß die Quantenmechanik in die physikalischen Aussagen keineswegs eine unerwünschte „Subjektivität“ hineinbringt. Das durch w (bzw. die ψ -Funktion) ausgedrückte „Wissen“ ist i. allg. nichts anderes als die in den physikalischen Dokumenten (Zeigerstellungen, photographischen Aufnahmen, Registrierkurven usw.) objektiv enthaltene Information; „objektiv“ in dem Sinne, daß sie jedermann in gleicher Weise zugänglich ist. Die berühmte Katze, von der SCHRÖDINGER sagt²⁷, daß sie nach der Quantenmechanik weder tot noch lebendig sei, solange man sie nicht anschaut, kann als ein objektives Meßinstrument für das ihre Vergiftung bewirkende α -Teilchen aufgefaßt werden.

Dies alles gilt, obwohl ja nach der Quantentheorie auch die makrophysikalischen Körper nicht ganz frei von den mikrophysikalischen Unschärfen sind. Besteht man dementsprechend – im Sinne der Forderung nach einem „objektiven Abbild der Welt“ – darauf, auch die Messung, die Registrierung und sogar die Vorgänge im lebenden Organismus dem quantenmechanischen Formalismus zu unterwerfen (durch eine unvorstellbar große Erweiterung des Hilbertraumes), so bleibt allerdings schließlich nichts anderes übrig, als ein menschliches Bewußtsein als ein letztes „Meßgerät“ und sein Gedächtnis als das „Meßdokument“ aufzufassen. Doch auch dies bedeutet keineswegs, daß verschiedene Beobachter mit Recht einander widersprechende Zustandsangaben machen können. Denn die erste Ablesung kann – soweit von der Änderung des Zustandes durch den natürlichen Ablauf des Geschehens einschließlich der äußeren Einflüsse abgesehen werden kann – durch die nachfolgenden immer nur bestätigt werden. Macht man aber eine Zustandsangabe unter Außerachtlassung der Tatsache, daß ein anderer Beobachter bereits abgelesen hat, so begeht man nach den Regeln der Quantentheorie einen Fehler; die Zustandsangabe wird falsch, denn man hat die mit der Beobachtung verknüpfte „Störung“ (Erweiterung des Hilbertraumes und Wechselwirkung) außer acht gelassen. Schon vor der bewußten Kenntnisaufnahme des Meßergebnisses wissen wir, daß die Interferenzglieder zwischen den verschiedenen Einstellungen des Meßapparates relativ „klein“ sind, vergleichbar den bekannten unvorstellbar kleinen Wahrscheinlichkeiten für das Eintreten irreversibler Prozesse. In dem Maße nun, in dem die Interferenzfähigkeit vernachlässigbar ist, darf vom Meßresultat bereits vor der Ablesung postuliert werden, daß es objektiv fixiert ist. Es gibt alle Übergänge zwischen der bekannten Spinmessung, bei der die Interferenzfähigkeit – wenigstens im Gedankenexperiment – weitgehend erhalten bleibt, und der SCHRÖDINGERSchen Katze, von der wir kaum zweifeln, daß sie schon vor dem Hinschauen (an sich) tot oder lebendig ist, und daß es etwas Drittes nicht gibt.

Dies sei an einer analogen, aber durchsichtigeren und geläufigeren Erscheinung erläutert: dem allmählichen Verschwinden der mit der prinzipiellen Ununterscheidbarkeit gleicher Teilchen verknüpften Interferenzterme bei zunehmender Isolierung der Teilchen voneinander. Man nennt die gemischten Glieder in diesem Falle meist „Austauschterme“, denn sie sind eine Folge der Antimetrisierung (bzw. Symmetrisierung) der Produkte von Einteilchenwellen.²⁸ Für ihre Existenz gibt es viele Beweise aus verschiedenen Gebieten

²⁷ E. SCHRÖDINGER¹⁰, Schlußbemerkungen.

²⁸ Die durch die Wechselwirkung bewirkten Korrelationen oder kollektiven Bewegungen können hier außer acht gelassen werden.

der Physik. Trotzdem ist es erlaubt, ja unvermeidbar, ein zu beschreibendes Objekt durch eine Art „Schnitt“ von der Außenwelt gedanklich zu trennen und die Antimetrisierung mit den vielen gleichen Teilchen der Umwelt zu unterlassen. Der Verstoß gegen die prinzipielle Ununterscheidbarkeit ist praktisch bedeutungslos, denn er macht sich wegen der Kleinheit der Austauschglieder kaum bemerkbar. Es gibt zwar immer viele hermitesche Operatoren, deren Austauschintegrale relativ groß sind, z. B. Potentiale sehr großer Reichweite, die unter anderem eine Permutation der Orte bewirken (Austauschpotentiale). Doch läßt sich wohl stets das Objekt als ein Teil eines „abgeschlossenen Systems“ auffassen, dessen Wechselwirkung mit der Umwelt einschließlich der Austauschintegrale vernachlässigt werden kann. Von den Operatoren, deren Matrixelemente relativ große Austauschglieder (oder auch andere Interferenzterme) mit der Umwelt enthalten, kann angenommen werden, daß sie eine nur sehr geringe physikalische Bedeutung haben. Aus diesen Gründen ist es auch für den Zustand des ursprünglichen Objekts praktisch ohne Einfluß, wenn die Grenze, die das System von seiner Umwelt gedanklich abschließt, in Richtung auf die Außenwelt hin verschoben wird. Anders ausgedrückt: Gleiche Teilchen können, wenn sich ihre Einteilchenwellen nicht überlappen, in guter Näherung wie in der klassischen Physik durch ihre stetigen „Bahnen“ voneinander unterschieden werden (BOLTZMANN), obwohl sie grundsätzlich als nichtunterscheidbar anzusehen sind (wie die Notwendigkeit der Antimetrisierung beweist). Die Ununterscheidbarkeit äußert sich manchmal in so „handfesten“ Effekten wie der Entartung der Wärmekapazität eines makrophysikalischen Gaskörpers bei tiefen Temperaturen und wohl auch in der Superfluidität, obgleich hier die meisten Atome sehr weit voneinander entfernt sind (im Vergleich zu ihren Durchmessern etwa); aber ihre Wellenfunktionen überlappen sich stark. In anderen Fällen dagegen sind die Konsequenzen der Nichtunterscheidbarkeit vernachlässigbar. Die physikalische Bedeutung derjenigen Interferenzterme nun, die in der Theorie der Messung diskutiert werden müssen, ist meist unvergleichlich viel geringer als die aller Austauschterme, denn es werden dort zwei makrophysikalische Zustände des Meßdokuments miteinander verknüpft, die spontan (also ohne „störende“ menschliche Einwirkung) nur durch einen mindestens teilweise rückwärts ablaufenden thermodynamisch irreversiblen Prozeß ineinander übergehen können. (Im Beispiel der Katze sind es die Matrixelemente eines Überganges zwischen den Zuständen „tot“ und „lebendig“, wozu unter anderen gehört, daß die Luft in dem abgeschlossenen System durch eine statistische Schwankung vom Zyankali wieder frei wird.) Es besteht jedoch kein Grund, an der mathematischen Existenz solcher Interferenzterme zu zweifeln.

Folgendes Beispiel möge das verdeutlichen. Ein von der Sonne oder einem Stern herkommendes Lichtquant veranlaßt bei seinem Durchgang durch die Atmosphäre jedes Atom, dem es begegnet, zur Emission von (schwachen) Sekundärwellen gleicher Frequenz, die alle miteinander und mit der Primärwelle interferieren. Der experimentelle Beweis dafür ist der von 1 verschiedene Brechungsindex der Luft. Daß solch ein Lichtquant eine weit ausgedehnte Welle hat, beweisen ferner die in der Astronomie benutzten, meterlangen MICHELSONSchen Interferometer zusammen mit dem quantentheoretischen Satz, daß verschiedene Lichtquanten miteinander nicht kohärent sein können. Es besteht kein Grund, daran zu zweifeln, daß sich die Welle eines kosmischen Lichtquants über die halbe Erdatmosphäre erstreckt (und sogar weit darüber hinaus). Nun sendet jedes Atom – mit sehr geringer Intensität allerdings – auch inelastisch gestreute Photonenwellen aus. Diese sind jedoch untereinander und mit der „elastischen“ Welle in den meisten Fällen nicht mehr interferenzfähig, denn sie befinden sich in verschiedenen, aufeinander orthogonalen Unteräumen des durch die Luftmoleküle erweiterten Hilbertraumes des Photons. Für die

meisten interessierenden Observablen verschwinden die Übergangselemente aus Orthogonalitätsgründen, weil die Luft (die Gesamtheit der Luftatome) sich in verschiedenen Zuständen befindet. Es nützt auch nichts, so lange zu warten, bis das jeweils angeregte Luftatom mit Sicherheit wieder in seinen Grundzustand gefallen ist, denn dann hat es ja ein weiteres Photon emittiert, und dieses zerstört nun aus Orthogonalitätsgründen durch seine bloße Existenz die Interferenzfähigkeit. Die inelastische Streuung, und erst recht die Sekundäremission, kann daher als eine Art Lokalisierung²⁹ des primären Quants aufgefaßt werden. Wegen des Mangels an Kohärenz begeht man keinen Fehler, wenn man – ganz im Sinne der klassischen Physik, Logik oder Wahrscheinlichkeitsrechnung – sagt, daß das Photon entweder nur elastisch, an allen Atomen zugleich, oder an einem bestimmten Atom inelastisch gestreut worden ist (von wiederholten Energieverlusten ist dabei zunächst abgesehen) und daß die Superposition oder Koexistenz dieser Zustände ausgeschlossen werden kann. Der quantenmechanisch exakte Zustand ist aber die Linearkombination aller dieser Alternativzustände mit ihren „Wahrscheinlichkeitsamplituden“ als Koeffizienten, und es gibt viele Operationen mit gemischten Gliedern. Wird nun das Atom durch das Lichtquant sogar ionisiert, so ist die Interferenzfähigkeit mit den anderen Zuständen noch geringer, und man ist noch mehr berechtigt, einen „Schnitt“ zwischen das Atom und das Quant zu legen und von einer Ortsmessung zu reden. Durch den Schnitt wird also der Zustand in seine Komponenten aufgeteilt, und man erhält ein „Gemisch“ der Komponenten, in dem die Interferenzterme vollständig fehlen. Dieses Gemisch sagt natürlich nicht aus, ob bzw. an welchem Atom das Quant seine Energie verloren hat, denn jedes Atom sendet alle Arten von Sekundärwellen aus. Die Entscheidung darüber, welcher unter den verschiedenen möglichen Fällen der wirkliche ist, bringt erst die Ablesung, die Feststellung des Meßergebnisses. Die Zerlegung des Zustandes in das Komponentengemisch läßt sich natürlich nicht vollständig aus der Relativbewegung $w(t)$ ableiten; sie steht sogar teilweise im Widerspruch zu ihr, denn sie enthält ein wesentlich unstetiges Element. Die Unstetigkeit ist vielmehr ein charakteristisches Merkmal der Abstraktion vom Meßgerät, der logischen Operation also, die durch den Schnitt am Zustand vorgenommen wird. Die Rechtfertigung einer solchen Operation wird in dem Maße besser, in dem die Interferenzterme ihre physikalische Bedeutung verlieren. Die Ionisation kann mit um so mehr Berechtigung als eine Ortsmessung aufgefaßt werden, je weiter ihre Wirkungen reichen, z. B. durch Tröpfchenbildung, Schwärzung der aufnehmenden photographischen Platte usw. Schließlich kann man praktisch sicher sein, daß keiner der hermiteschen Operatoren mit nichtverschwindenden Interferenzgliedern noch eine wirkliche „Observable“ darstellt. Die Möglichkeit der Interferenzen kann dann als physikalisch bedeutungslos gestrichen werden. Wir bezeichnen den Teil des Meßvorgangs, der die Interferenzfähigkeit der Komponenten des Objektzustandes praktisch vernichtet, als Aufnahme (nach dem Spezialfall des Photographierens). – Für die anderen Teilchenarten gilt im wesentlichen dasselbe wie für die Photonen. Bei den Elektronen z. B. beweisen die Laue-Aufnahmen die relativ große Ausdehnung der Wellen und die Wilson-Aufnahmen ihre Zerlegbarkeit in sehr viele miteinander (praktisch) nicht kohärente Teile. Bei der Ablesung des Meßresultates stellt sich heraus, welche der sehr zahlreichen Ionenreihen aus der „Möglichkeits-Kaskade“ die wirkliche ist; die anderen Möglichkeiten entfallen dann. (Die Geradlinigkeit der Teilchenspuren in Wilson-Aufnahmen wird von HEISENBERG ausführlich diskutiert, vgl. ¹⁵, S. 50–57).

²⁹ Daß der Photonenort grundsätzlich nur bis auf die Größenordnung einer Wellenlänge definiert ist, tut hier nichts zur Sache.

Vor der Ablesung hat die mit dem Schnitt verbundene Abstraktion immer etwas Gewalt-sames an sich, denn sie verändert durch das Wegstreichen der Interferenzterme in einer willkürlichen Weise die mathematische Gestalt der Zustandsgröße ψ oder w . Unbefriedigend ist vor allem, daß hier nur die Interferenzmöglichkeiten gestrichen werden dürfen. Nach der Ablesung dagegen erscheint es als einleuchtend und konsequent (solange jedenfalls eine mathematisch strenge Theorie der Gehirnfunktionen und des Bewußtseins nicht existiert), die nicht realisierten Fälle, und damit selbstverständlich auch ihre Interferenzmöglichkeiten, einfach wegzulassen³⁰. Dadurch wird am Objekt sowie am Meßapparat natürlich nichts geändert, da ja die Kenntnisaufnahme des Meßwertes keine physische Einwirkung ist. Die Quantenmechanik veranlaßt nicht, an der vom menschlichen Subjekt unabhängigen Wirklichkeit der Dinge zu zweifeln (soweit man von einer „realen“ Wechselwirkung absehen kann). Allerdings geht in die mathematische Beschreibung das Wissen über die Dinge ausdrücklich ein. Besonders erstaunlich ist dabei, daß diese Theorie so präzise ist; man darf glauben, daß sie in ihrem sehr großen Geltungsbereich bei aller Formenfülle hinter der astronomischen Genauigkeit nicht zurückbleibt.

II. DIE AUSWAHL-THESE

Die vorliegende Arbeit wurde angeregt durch einen möglichen Einwand, der gegen die dargelegte Auffassung erhoben werden könnte. Diesen Einwand, der in der bisherigen Literatur noch nicht durchdiskutiert zu sein scheint³¹, bringen wir in die Form der folgenden These:

„Der Meßapparat kann als makrophysikalischer Körper nur durch eine thermodynamische Zustandsangabe, ein Gemisch, charakterisiert werden; die Idealisierung durch eine hypothetische ψ -Funktion, einen reinen Fall, ist hier grundsätzlich zu verbieten. Nach Eintritt der Wechselwirkung ist folglich das Gesamtsystem ‚Objekt + Meßinstrument‘ in einem Gemisch, auch dann, wenn für das Objekt ursprünglich ein reiner Fall vorlag. Durch die Ablesung des Meßergebnisses wird nun lediglich eine Auswahl aus dem Gemisch getroffen, durch welche die Relativbewegung (nach der Schrödingergleichung etwa) mit ihrer deterministischen Stetigkeit nicht unterbrochen wird. Das Objekt ist nach der Messung natürlich in einem anderen ‚Zustand‘ als vorher. Die Unstetigkeit der Zustandsreduktion ist aber genau von dem aus der klassischen Thermodynamik wohlbekannten, rein subjektiven Charakter, allein eine Folge der Ungenauigkeit in der Kenntnis des Meßapparates. Das Resultat der Messung ist unbestimmt, weil der Zustand des beobachtenden Systems vor der Messung prinzipiell nicht genau bekannt ist. Die ψ -Funktion kann somit als eine objektive, reale Feldgröße angesehen werden, so wie DE BROGLIE und SCHRÖDINGER es ursprünglich meinten.“

³⁰ Faßt man aber ψ bzw. w als Implikationskatalog auf, so ist allerdings formal nichts dagegen einzuwenden, wenn man die Zustandsreduktion unterläßt. Die Implikationen werden nicht dadurch falsch, daß neues Wissen hinzukommt; sie bleiben richtig, werden aber ungültig. Diese Bemerkung verdanke ich einer Diskussion mit Herrn Prof. v. Weizsäcker.

³¹ Bei v. NEUMANN², S. 233 und Anm. ²¹⁴, finden sich einige kurze Hinweise. Die Diskussion dieser These wurde vor allem durch die LUDWIGSche Arbeit² angeregt.

Wir glauben mit v. NEUMANN, daß diese These von der bloßen Auswahl aus einem Gemisch der Kritik nicht standhält, weil sie sich nicht mathematisch widerspruchsfrei durchführen läßt. Durch die Messung wird nicht nur eine rein subjektive Auswahl getroffen, die die Zustandsgrößen im wesentlichen (d. h. in einem zugrunde gelegten determinierten Zeitablauf) ungeändert läßt, sondern es wird durch sie eine Art wirklicher Entscheidung über die „elementaren Zustandsgrößen“ herbeigeführt in einer Situation, die vor der Messung in dieser Hinsicht noch wirklich unentschieden war³². Die Möglichkeit der verschiedenen Meßresultate ist vor der Messung nicht nur subjektiv bedingt, d. h. nicht nur eine Folge der Unvollständigkeit unserer Kenntnis des Objekts oder der Meßinstrumente³³. Daß diese objektive Unentschiedenheit (oder Unschärfe) bei makrophysikalischen Körpern für die meisten Fragen vernachlässigt werden kann, ist von BOHR¹, HEISENBERG² und v. NEUMANN² in ihren Diskussionen ausdrücklich vorausgesetzt und von LUDWIG² mit Hilfe des quantenmechanischen Formalismus unter gewissen Annahmen bewiesen worden.

Die nun folgende Analyse des quantentheoretischen Meßprozesses führen wir hauptsächlich im Hinblick auf die genannte These durch. Ein Nebenergebnis dabei ist, daß zwischen dem v. NEUMANNschen und einem davon verschiedenen, durch LÜDERS³⁴ und LUDWIG³⁵ vorgeschlagenen Ansatz für die Zustandsreduktion im Falle der Messung von entarteten Observablen kein wirklicher Widerspruch besteht; sie beziehen sich nämlich auf verschiedene Typen von Meßinstrumenten. Die Ansätze können für einen beide Fälle umfassenden Typus verallgemeinert werden.

III. EINE ANALYSE DES MESSVORGANGS

Zur Vermeidung unwesentlicher mathematischer Komplikationen nehmen wir an, daß alle vorkommenden Operatoren reine Punktspektren besitzen; Konvergenzprobleme und Fragen wie die nach dem Definitionsbereich der Operatoren lassen wir außer Betracht. Zuerst behandeln wir die Maximalmessungen, bei denen die Eigenzustände alle aufeinander orthogonal sind, und schließlich – nach einer Widerlegung der Auswahl-These – die Messungen entarteter Größen, durch die im allgemeinen nur thermodynamische Zustandsangaben zustande kommen. Die durch Unvollkommenheiten des Meßinstrumentes bedingten und grundsätzlich vermeidbaren Unbestimmtheiten werden außer acht gelassen. Es werden also stark idealisierte Meßvorgänge betrachtet. Um das Verständnis der Formeln zu erleichtern, setzen wir zunächst einen reinen Fall ψ oder $w = e_\psi$ voraus und gehen dann durch eine einfache Statistik zum allgemeinen Zustand $w = \sum_i w_i e_{\psi_i}$ über, und zwar sowohl beim Objekt als auch beim Meßinstrument.

³² W. PAULI sagt, es sei notwendig, primäre Wahrscheinlichkeiten in die Physik einzuführen (Dialectica 8 [1954] 112, 283).

³³ Die klassisch zugrunde gelegten „elementaren“ Zustandsgrößen (q, p) sind ja bekanntlich von der Unstetigkeit der bloßen Kenntnisnahme nicht betroffen.

³⁴ G. LÜDERS: Ann. d. Phys. (6) 8 (1951) 322.

³⁵ G. LUDWIG: Berliner Vorlesung, SS. 1950, vgl. Anm. 2, Axiom VI b und Gl. (3. 1).

Entsprechend der vorangegangenen Diskussion unterscheiden wir am Meßprozeß folgende Teile:

1. Zerlegung
2. Aufteilung
 - a) Erweiterung
 - b) Aufnahme
 - c) Schnitt
3. Ablesung.

Sie sind von sehr verschiedener Art: die Zerlegung darf vielleicht als ein „mathematischer“, die Erweiterung und der Schnitt als ein „logischer“, die Aufnahme als ein „materieller“, die Aufteilung als ein „physikalischer“ und die Ablesung als ein „psychischer“ Vorgang bezeichnet werden. Eine Übersicht über die nun folgende Analyse findet man für den denkbar einfachsten Fall (Messung einer einfachen Alternative sowie reine Fälle für Objekt und Instrument) auf S. 16. Der Übergang zu vielfachen Alternativen und zu beliebigen Gemischen ist nicht schwer, aber formal ein wenig schwerfällig. Bei der Erörterung der Auswahlthese (II und III B) ist es allerdings erforderlich, thermodynamische Zustände zuzulassen.

A. DIE MAXIMALMESSUNG

In diesem Fall wird ein vollständiges System kommensurabler (d. h. gleichzeitig meßbarer) Größen gemessen; ihm entspricht im Hilbertraum ein System untereinander vertauschbarer hermitescher Operatoren, deren simultane Eigenräume eindimensional sind. Wir nennen sie $a_1, a_2, \dots, a_f$ (ihre Anzahl ist im allgemeinen gleich der Zahl der Freiheitsgrade des Objektsystems) und das System kurz a . Das System der Meßwerte heißt entsprechend $a' \equiv (a'_1, a'_2, \dots, a'_f)$ und die Eigenvektoren $\varphi_{a=a'}$ oder nach DIRAC $|a=a'\rangle$; wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, schreiben wir kurz $\varphi_{a'}$ bzw. $|a'\rangle$. Die Eigenvektoren seien auf 1 normiert; dann lauten die Orthonormierungs- und Vollständigkeitsrelationen

$$\langle a' | a'' \rangle = \delta_{a' a''} \quad \text{und} \quad \sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| = 1. \quad (1)$$

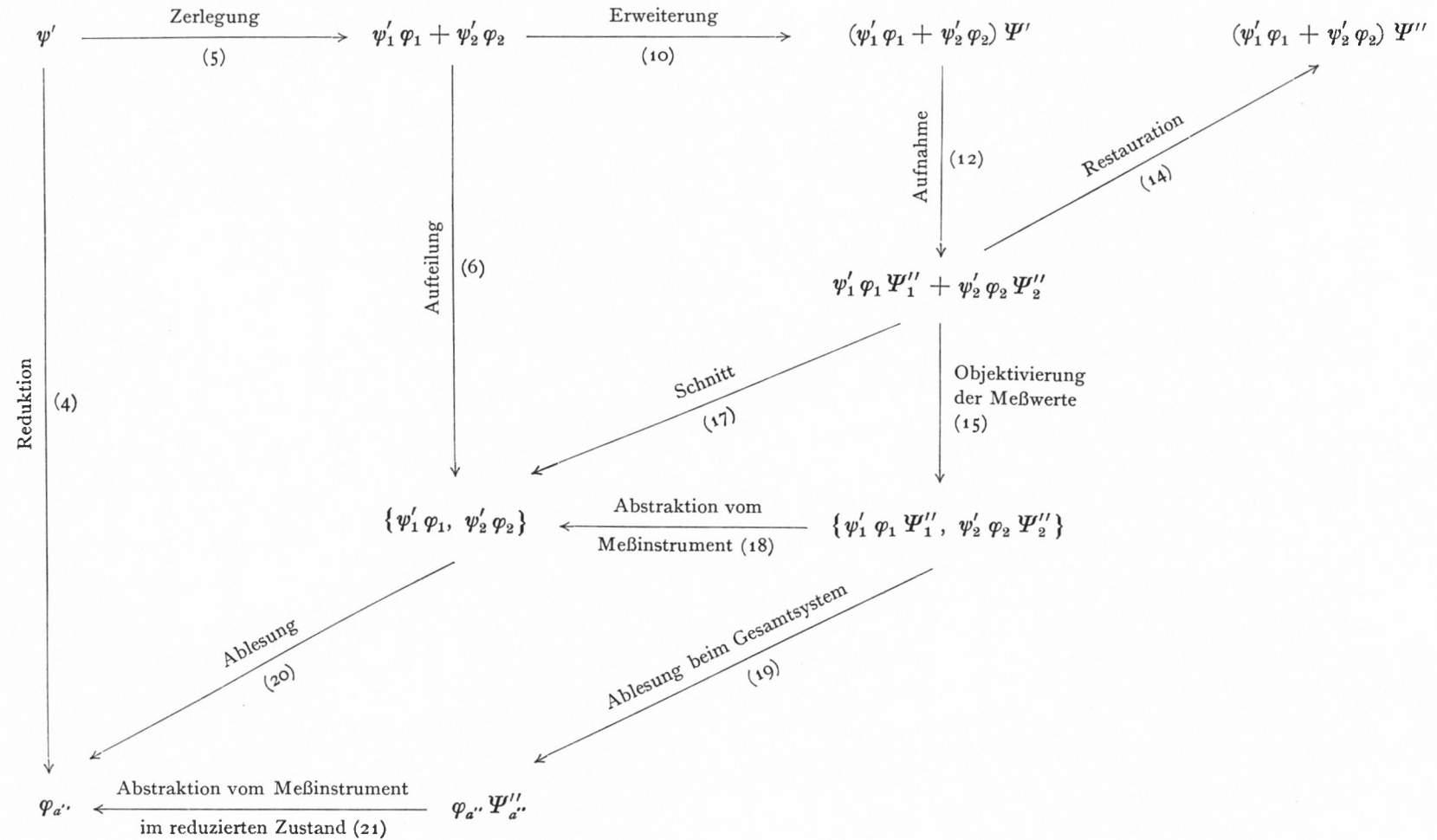
Wegen der Eigenwertgleichungen

$$a |a'\rangle = |a'\rangle a' \quad (2)$$

ist in dieser Darstellung a auf Diagonalform, $\langle a' | a | a'' \rangle = a' \delta_{a' a''}$, d. h. es multipliziert einfach mit seinen Eigenwerten. Entsprechend beschreiben wir die anderen Observablen b, c usw. Wir machen in der Bezeichnung keinen Unterschied zwischen den Observablen und ihren Operatoren und reden der Kürze halber meist von „Operatoren“, ihren

Tabelle. Übersicht über die Analyse des Meßvorgangs (Kap. III) am Beispiel der Messung einer einfachen Alternative (z. B. STERN-GERLACH-Versuch oder Youngsches Zwei-Löcher-Experiment). Einfachheit halber ist ferner sowohl für das Objekt als auch für den Meßapparat ein reiner Fall angenommen.

Die eingeklammerten Zahlen bezeichnen die Gleichungsnummer im Text.



„Eigenwerten“ usw. statt von Systemen solcher Größen³⁶. Daß sie nicht entartet sind, setzen wir nur dann voraus, wenn die dazugehörigen Darstellungen $|\delta'\rangle, |\epsilon'\rangle, \dots$ ausdrücklich benutzt werden. Aus der Hermitizität $a = a^*$ folgt wie bekannt die Realität $a' = a'^*$.

α) Reiner Fall. Der Zustand des Objekts sei durch den Zustandsvektor ψ bzw. $|\psi\rangle$ beschrieben; $|\psi| = 1$. Der Vektor $\psi' = e^{i\alpha} \psi$ mit beliebigem $\alpha = \alpha^*$ bezeichnet denselben Zustand. Der Koeffizient $\psi_a = \langle \varphi_a | \psi \rangle$ in der Entwicklung

$$\psi = \sum_a \psi_a \varphi_a$$

ist die „Wahrscheinlichkeitsamplitude“ dafür, daß $a = a'$ ist: $w_{a'} = |\psi_{a'}|^2$. Nach Feststellung dieses Meßergebnisses ist $\psi' = \varphi_{a'}$ der neue Zustand. Diese Aussagen können durch eine Theorie des Meßprozesses nicht abgeleitet werden; sie sind im Gegenteil ihr Fundament. Denn ohne eine Übertragung dieser Annahmen auf den durch das Meßinstrument zu erweiternden Zustandsraum ist eine Diskussion der Messung nicht möglich.

Aus den genannten Annahmen folgt zunächst leicht, daß die Unschärfe

$$\delta c \equiv \sqrt{4\pi (\overline{c} - \bar{c})^2}$$

von c genau dann verschwindet, wenn es eine reelle Zahl c' gibt, so daß $c\psi = c'\psi$ ist; dann ist der Erwartungswert $\bar{c}$ gleich dem Meßwert c' . Die Eigenwertgleichung $(c - c')\psi = 0$ gilt insbesondere dann, wenn ψ durch eine Messung von c mit dem Ergebnis c' gewonnen wurde: $\psi = \varphi_{c'}$. Die dazugehörige Amplitude $\psi_{a'} = \varphi_{c'a'} = \langle c' | a' \rangle$ ist zugleich ein Element der von der c - zur a -Darstellung transformierenden unitären Matrix. Sie ergibt die Übereinstimmungswahrscheinlichkeit

$$w_{c'a'} = |\varphi_{c'a'}|^2$$

zwischen den Meßergebnissen $c = c'$ und $a = a'$. Es gilt folglich die „quantenmechanische Wahrscheinlichkeitsrechnung“:

$$\varphi_{c'a'} = \sum_{\delta'} \varphi_{a'\delta'} \varphi_{\delta'c'} \quad \text{und} \quad \varphi_{c'a'} = \varphi_{a'c'}^*;$$

insbesondere ist $w_{a'a''} = \varphi_{a'a''} = \delta_{a'a''}$ und $w_{c'a'} = w_{a'c'}$. Die sekundlichen Übergangswahrscheinlichkeiten lassen sich wie alle anderen Aussagen der Quantentheorie aus den Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten unter Berücksichtigung der Relativbewegung ableiten. Besonders wichtig sind die Erwartungswerte

$$\bar{a} = \sum_a w_a a' = \langle \psi | a | \psi \rangle.$$

Jede quantenmechanische Aussage läßt sich auf sie zurückführen, denn die Wahrscheinlichkeit w_a ist nichts anderes als der Erwartungswert der Eigenschaft $a = a'$. Diese wird durch die Orthogonalprojektion $e_{a'} = |a'\rangle \langle a'|$ auf die Richtung $\varphi_{a'}$ beschrieben, so daß damit $w_a = \bar{e}_{a'}$ ist. Unter „Eigenschaften“ versteht man allgemein Observable

³⁶ Ein bekanntes Vorbild dafür ist der „Ortsoperator“ τ , der eigentlich ein Operatorentripel ist.

mit den Meßwerten 1 oder 0, d. h. „ja“ und „nein“. Sie werden durch die Orthogonalprojektionen e dargestellt, und diese können durch

$$e = e^2 = e^*$$

charakterisiert werden.

Ist ψ zu keinem der Basisvektoren φ_b eines Orthogonalsystems b proportional, so enthält der Erwartungswert

$$\bar{a} = \sum_{b'} \sum_{b''} \psi_b^* a_{b'b''} \psi_{b''} = \sum_{b'} \sum_{b''} \langle \psi | b' \rangle \langle b' | a | b'' \rangle \langle b'' | \psi \rangle$$

nichtverschwindende „gemischte Terme“, falls a mit b nicht kommensurabel ist; d. h. die Meßwerte b' und b'' „koexistieren“ miteinander im Zustand ψ . Diese Koexistenz kann nicht am Einzelfall, sondern nur statistisch nachgewiesen werden. Das Nichtverschwinden der Interferenzterme ($\psi_b^* a_{b'b''} \psi_{b''}$ mit $b' \neq b''$) zeigt aber, daß das Nebeneinanderbestehen der Möglichkeiten $b = b'$ und $b = b''$ nicht nur auf Unkenntnis beruht. Man kann daher von einer „objektiven statistischen Koexistenz“ einander klassisch ausschließender Eigenschaften reden. Man kann diesen Sachverhalt auch kurz umschreiben mit der Aussage, daß die ψ darstellende statistische Gesamtheit in sich „kohärent“ ist.

Die Zustandsgröße $\psi = \varphi_c$ kann auch als die Gesamtheit derjenigen Implikationen aufgefaßt werden, die in den $\varphi_{c'a'}$, den $\varphi_{c'b}$ usw. enthalten sind und deren gemeinsamer Vordersatz durch die Optimalmessung $c = c'$ verifiziert worden ist. Die Schlußsätze der Implikationen sind Wahrscheinlichkeitsaussagen von der Art $\omega_{a=a'} = |\varphi_{c'a'}|^2$. Demnach ist dasjenige Objekt, über das die Aussage ψ gemacht wird (oder dasjenige Subjekt, dem das Prädikat ψ zugeschrieben wird), eigentlich nicht wie in der klassischen Mechanik das physikalische Objektsystem selbst, sondern die Gesamtheit der möglichen Zustandsmessungen; über das Objektsystem wird nur mittelbar eine Aussage gemacht. Ihrem logischen Charakter nach sind die Aussagen der Quantenmechanik im allgemeinen Wahrscheinlichkeitsaussagen. Um sie auf die Form einer „Gewißheitsaussage“ zu bringen, denkt man sich oft eine statistische Gesamtheit von unendlich vielen gleichartigen Experimenten. Da aber unendlich viele Experimente nicht durchführbar sind, ist diese Ausdrucksweise rein formal und nur aus dem Wunsch heraus zu erklären, die Physik möge es allein mit Wahr-Falsch-Aussagen zu tun haben. Demgegenüber muß daran festgehalten werden, daß der Wahrscheinlichkeitscharakter der quantenmechanischen Aussagen unvermeidbar und logisch fundamental ist. Macht man zahlreiche (aber endlich viele) gleichartige Experimente, so liefert die Quantenmechanik für die relative Häufigkeit keine Gewißheitsaussage, sondern doch nur wieder eine Wahrscheinlichkeitsaussage, wenn auch die Wahrscheinlichkeit nahe bei 1 (bzw. 0) liegt. Wahrscheinlichkeiten sind eben nicht relative Häufigkeiten, sondern etwas davon logisch Verschiedenes. Sie beziehen sich nämlich, im Unterschied zu den relativen Häufigkeiten, stets auf den Einzelfall, z. B. auf das einzelne Ereignis oder die einzelne Versuchsreihe. – Die modal- bzw. wahrscheinlichkeitslogischen Implikationen sind natürlich nur dann anwendbar oder gültig, wenn das Objektsystem in der Zwischenzeit nicht gestört worden ist.

β) Thermodynamischer Zustand. Nun nehmen wir an, daß der Zustand des Systems nicht so genau vorliegt, wie es quantentheoretisch möglich ist. Nach der Analogie zur klassischen Theorie erscheint es dann als naheliegend, ihn durch eine statistische Gesamtheit $\{\dots \psi^{(n)} \dots\}$ von Hilbertvektoren zu beschreiben, die wir mit HEISENBERG als Gemenge bezeichnen wollen. (Es ist von dem durch w beschriebenen „Gemisch“ wohl

zu unterscheiden.) Die Elemente $\psi^{(v)}$ sind nicht normiert, sondern $w^{(v)} = |\psi^{(v)}|^2$ ist die Wahrscheinlichkeit, mit der $\psi^{(v)}$ in dem Gemenge vertreten ist; $\sum_v w^{(v)} = 1$. Die gedankliche Zusammenfassung der für möglich gehaltenen $\psi^{(v)}$ zu einem Gemenge ist wesentlich verschieden von der Koexistenz der Komponenten in einem Hilbertvektor: Die $\psi^{(v)}$ können nicht miteinander interferieren, denn sie werden nicht addiert, sondern nur als Elemente einer Menge gewissermaßen nebeneinandergestellt. In den Wahrscheinlichkeiten, Erwartungswerten und Übergangselementen fehlen deshalb die gemischten Glieder; insbesondere ist $\bar{a}$ nicht etwa die Doppelsumme über alle Integrale $\langle \psi^{(v')} | a | \psi^{(v'')} \rangle$, sondern es enthält nur die Diagonalterme³⁷:

$$\bar{a} = \sum_v \langle \psi^{(v)} | a | \psi^{(v)} \rangle = \sum_{a'} a' w_{a'}.$$

Dabei ist

$$w_{a'} = \sum_v w_{a'}^{(v)}, \quad w^{(v)} = \sum_{a'} w_{a'}^{(v)} \quad \text{und} \quad w_{a'}^{(v)} = |\psi_{a'}^{(v)}|^2.$$

Die „Übereinstimmungswahrscheinlichkeit“ zwischen zwei Gemengen $\{\dots \psi_I^{(\mu)} \dots\}$ und $\{\dots \psi_{II}^{(\mu)} \dots\}$ hat den Wert

$$w_{I, II} = \sum_{\mu'} \sum_{\mu''} |\langle \psi_I^{(\mu')} | \psi_{II}^{(\mu'')} \rangle|^2 = \sum_{\mu} \sum_v w_I^{(\mu')} w_{II}^{(\mu'')} w_{I, II}^{(\mu' \mu'')} = w_{II, I}.$$

Sie ist im allg. kleiner als Eins; nur im Limes eines reinen Falles, $\{\dots \alpha_v \psi \dots\}$ mit $|\psi|^2 \sum_v |\alpha_v|^2 = 1$, wird die Übereinstimmungswahrscheinlichkeit der Zustandsgröße mit sich selbst gleich Eins.

Dabei ist zu beachten, daß die $\psi^{(v)}$ keineswegs aufeinander orthogonal zu sein brauchen. Ein einfaches Beispiel dafür erhält man, wenn man den Strahl ψ eines Lichtquants durch mehrere Spiegel und Polarisatoren in zwei miteinander nicht interferierende Komponenten $\psi^{(1)}$ und $\psi^{(2)}$ zerlegt, deren Polarisationsrichtungen miteinander einen spitzen Winkel bilden; die Interferenz kann man z. B. dadurch verhindern, daß man die beiden in gleicher Richtung laufenden Teilstrahlen durch einen kleinen Abstand voneinander räumlich trennt. Wenn nur der Polarisationszustand des Quants interessiert, so hat man ein Gemenge $\{\psi^{(1)}, \psi^{(2)}\}$ mit $\langle \psi^{(1)} | \psi^{(2)} \rangle \neq 0$. Ein anderes Beispiel ist eine STERN-GERLACHSche Spinnmessung, bei der die Richtung des Magnetfeldes nicht genau bekannt ist. Das Gemenge besteht dann aus unendlich vielen Spinfunktionen, deren Richtungen miteinander sehr spitze Winkel bilden. Dieses Beispiel zeigt zugleich die mathematische Schwierigkeit, die einer Beschreibung des thermodynamischen Zustandes durch ein Gemenge oft entgegensteht: Umfaßt die statistische Gesamtheit ein Kontinuum von Hilbertvektoren $\psi^{(v)}$, so muß die v -Summe als eine Integration im Hilbertraum aufgefaßt werden. Die Integrationen im Hilbertraum sind aber mathematisch nicht einfach. Diese Schwierigkeit ist bei den Fragen nach dem Polarisationszustand von Photonen oder Elektronen noch nicht akut, sie wird es aber, sobald man es mit Hilberträumen von unendlich vielen Dimensionen zu tun bekommt.

³⁷ Dies wird manchmal auch so aufgefaßt, als sei das Gemenge gleich der Summe seiner Komponenten mit unbestimmten relativen Phasen; denn durch eine gleichmäßige Mittelung über alle relativen Phasen (von 0 bis 2π) müssen sämtliche Interferenzterme verschwinden. Wir vermeiden aber diese Sprechweise, denn der Begriff einer solchen „Summe“ ist nicht klar, es sei denn, man meint die statistische Gesamtheit eines Kontinuums von Summen mit allen möglichen, gleich häufig vorkommenden relativen Phasen. Diese Auffassung aber ist insofern nicht ratsam, als man so nur das ursprüngliche Gemenge $\{\dots \psi^{(v)} \dots\}$ durch ein äquivalentes (s. S. 20), aber sehr viel komplizierteres ersetzt, nämlich durch $\{\dots \sum_v e^{i\alpha_v} \psi^{(v)} \dots\}$ mit $0 \leq \alpha_v < 2\pi$ für $v \geq 2$ und $\alpha_1 = 0$.

Hier hilft nun das Superpositionsprinzip. Es hat nämlich zur Folge, daß viele verschiedene Gemenge in bezug auf die aus ihnen folgenden quantenstatistischen Voraussagen äquivalent sind ($\sim$). Denn es gilt für beliebige Operatoren:

$$\bar{b} = \sum_{a'} \sum_{a''} b_{a' a''} w_{a' a''} \quad \text{mit} \quad w_{a' a''} = \sum_v \psi_{a'}^{(v)} \psi_{a''}^{(v)*},$$

und man kann sich nun an Hand einfacher Beispiele leicht überzeugen, daß es im allg. unendlich viele verschiedene Aufteilungen der Matrix w in „Bestandteile“ $\psi^{(v)}$ gibt, s. Fig. 1.

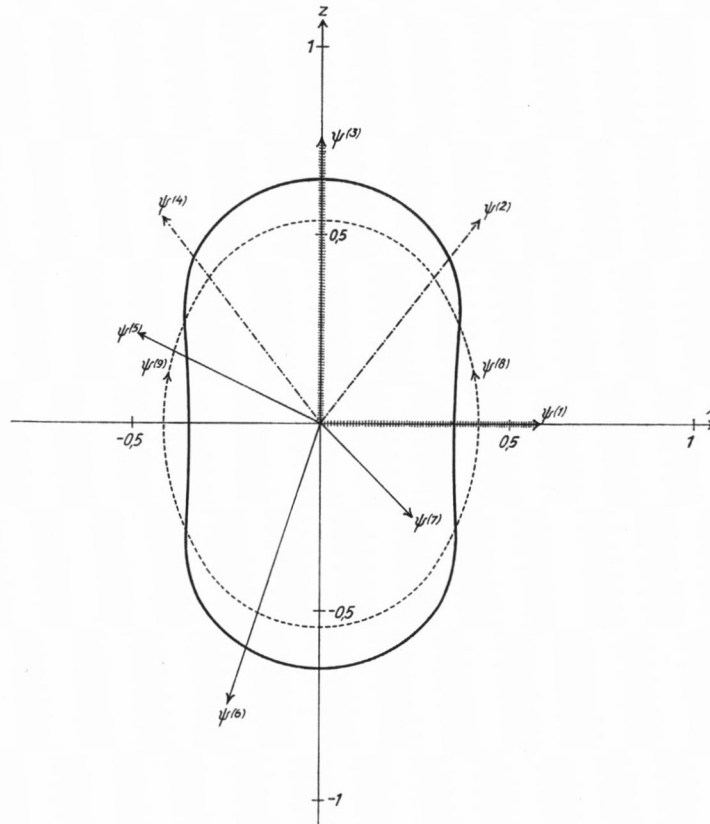


Fig. 1

Teilweise polarisiertes Licht. Der Polarisationszustand wird in der Quantenmechanik durch das Gemisch w beschrieben. Einige der dazugehörigen Gemenge sind $\{\psi^{(1)}, \psi^{(3)}\} \sim \{\psi^{(2)}, \psi^{(4)}\} \sim \{\psi^{(5)}, \psi^{(6)}, \psi^{(7)}\} \sim \{\psi^{(8)}, \psi^{(9)}\} \sim \{\frac{1}{3}\psi^{(1)}, \dots, \frac{1}{3}\psi^{(9)}\}$. Dabei stellen $\psi^{(1)}, \dots, \psi^{(7)}$ linear polarisierte und $\psi^{(8)}, \psi^{(9)}$ elliptisch polarisierte Strahlen dar. Der jeweilige Abstand der ausgezogenen Linie vom Mittelpunkt ist ein Maß für die Intensität (bzw. Wahrscheinlichkeit) in der dazugehörigen Richtung.

Solch eine Klasse statistisch äquivalenter Gemenge nennen wir nach v. NEUMANN ein Gemisch. Es ist gleichbedeutend mit der (durch v. NEUMANN axiomatisch eingeführten) „Erwartungswert-Funktion“, die den hermiteschen Operatoren $a, b, c, \dots$ die quantentheoretisch vorausgesagten Erwartungswerte $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \dots$ zuordnet. Diese Funktion³⁸ läßt sich leicht angeben:

³⁸ Es handelt sich eigentlich um ein Funktional.

$$\bar{a} = \langle aw \rangle,$$

wobei $\langle \rangle$ die Spurbildung bedeutet und

$$w = \sum_{\nu} |\psi^{(\nu)}\rangle \langle \psi^{(\nu)}| = \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle w_{a' a''} \langle a''|$$

ein auf die Spur 1 normierter positiv definiter³⁹ hermitescher Operator ist;

$$\langle w \rangle = \sum_{\nu} w^{(\nu)} = \sum_{a'} w_{a' a'} = 1.$$

Die Gemische werden durch solche Wahrscheinlichkeits- oder Zustandsoperatoren

$$w = w^* \geq 0 \quad \text{mit} \quad \langle w \rangle = 1$$

umkehrbar eindeutig beschrieben. Für die dazugehörigen Matrizen $w_{a' a''}$ gilt also u. a.

$$w_{a' a''} = w_{a'' a'}^*, \quad w_{a' a'} \geq 0, \quad \sum_{a'} w_{a' a'} = 1.$$

Die Übereinstimmungswahrscheinlichkeit zweier Gemische w_I und w_{II} ergibt sich zu

$$w_{I, II} = \langle w_I w_{II} \rangle = w_{II, I};$$

sie verschwindet genau dann, wenn $w_I w_{II} = 0$ ist. Die Größe $\langle w^2 \rangle$ ist als „Übereinstimmungswahrscheinlichkeit mit sich selbst“ ein Maß für die Genauigkeit der Zustandsangabe w ; sie erfüllt natürlich die Ungleichungen

$$0 \leq \langle w^2 \rangle \leq 1.$$

Ein Maß für die durch den Zustandsoperator w zum Ausdruck gebrachte Unkenntnis über das Objekt ist die Entropie

$$S = -k \langle w \log w \rangle.$$

Sie ist eine nichtnegative Größe:

$$S \geq 0.$$

Dies gilt allerdings nur in der Quantentheorie. In der klassischen Theorie gibt es keine „Phasenzellen“, so daß in der Entropie eine additive Konstante unbestimmt bleibt; nur im reinen Fall ist die Entropie „eindeutig“ $= -\infty$. (Der NERNSTSche Wärmesatz zeigt somit bereits einen Quanteneffekt an; und die Entropiekonstanten der Gase etwa enthalten bereits beide Naturkonstanten: das „Wirkungsquantum“ h ebenso wie das „Entropiequantum“ k .) Die Unschärfe von a im Zustand w_I verschwindet genau dann, wenn es ein a' mit $aw_I = a'w_I$ gibt. Ist außerdem $aw_{II} = a'w_{II}$ mit $a' \neq a''$, so gilt $w_I w_{II} = 0$. Umgekehrt

³⁹ D. h. alle Eigenwerte w_e , und damit auch sämtliche „Erwartungswerte“ $\langle \psi | w | \psi \rangle = \sum_e w_e |\psi_e|^2$, sind größer als oder gleich Null. Wir schreiben dafür kurz $w \geq 0$ und bezeichnen die Spur $\langle w \rangle = \sum_e w_e$ ($= 1$) auch als „Norm“ von w . Es existiert der Operator $w^{1/2} \equiv \sum_e |e'\rangle \sqrt{w_e} \langle e'| \geq 0$ mit $(w^{1/2})^2 = w$. Wegen $w \geq 0$ ist ferner auch $\langle w^2 \rangle^{1/2} = w$. Das Quadrat eines hermiteschen Operators ist stets positiv definit.

folgt aus $\langle w_I w_{II} \rangle = 0$, daß $w_I w_{II} = 0$ ist und daraus die Existenz von Observablen a mit $aw_I = a'w_I$, $aw_{II} = a''w_{II}$ und $a' \neq a''$. – Unsere Benennung von w als Zustandsoperator⁴⁰ deutet bereits an, daß nicht das Gemenge, sondern das Gemisch die quantentheoretisch sachgemäße Beschreibung eines thermodynamischen Zustandes ist. Die beiden Begriffe sind genau nur dann gleichwertig, wenn sie mit dem des reinen Falles übereinstimmen⁴¹. Durch ψ , $\{\dots \alpha_\nu \psi \dots\}$ oder $w = e_\psi \equiv |\psi\rangle\langle\psi|$ wird derselbe Zustand bezeichnet. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines solchen Vektors ψ , auf den $w = w^*$ (orthogonal) projiziert, ist die Gleichung $w = w^2$ (Idempotenz) oder $\langle w^2 \rangle = 1$ oder auch $S = 0$. Im Falle positiver Entropie dagegen umfaßt jedes Gemisch unendlich viele voneinander wesentlich⁴² verschiedene Gemenge.

Das bekannteste Beispiel dafür ist total unpolarisiertes Licht. In der klassischen Theorie mit ihren realen Wellen gibt es sehr viele wesentlich verschiedene statistische Gesamtheiten, die eine „total unpolarisierte“ Lichtwelle darstellen. Einer der vielen Fälle liegt vor, wenn das Licht mit Sicherheit zirkular polarisiert ist und beiden Drehrichtungen dieselbe Wahrscheinlichkeit zugeschrieben wird; einen anderen Fall hat man dann, wenn das Licht sicher linear polarisiert ist und alle Richtungen gleich wahrscheinlich sind; oder wenn nur zwei beliebige, aufeinander senkrechte Richtungen vorkommen können, und zwar mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Die klassische Theorie nimmt an, daß einer der vielen Polarisationszustände an sich vorliegt, und sie gibt Experimente an, die den Zustand beliebig wenig ändern, und mit deren Hilfe man herausfinden kann, welches die objektive Polarisation ist. In der Quantentheorie mit ihren symbolischen Wellen dagegen äußern sich alle Gemenge dieses Gemisches in allen Experimenten statistisch in genau gleicher Weise. Aus einer Einzelmessung gar kann man wegen der unvermeidbaren Zustandsreduktion ohnehin nicht eindeutig auf den Zustand vor der Messung schließen; die Zustandsmessung ist eigentlich eine Zustandserzeugung. Dabei ist vorausgesetzt, daß man es wirklich mit einzelnen, wohldefinierten Lichtquanten zu tun hat⁴³. Dann gibt es nur das total unpolarisierte Licht. Das ist wahr, obwohl man die Gemenge nach der Erzeugungsweise des Gemisches unter-

⁴⁰ Bei v. NEUMANN heißt w „statistischer Operator“. Die DIRACsche Bezeichnung „Dichtematrix“ hat den Nachteil, daß eine Verwechslung mit dem Operator $\sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i)$ der Teilchendichte leicht möglich ist.

⁴¹ In der klassischen Thermodynamik dagegen sind die Begriffe „statistische Gesamtheit“ $w(q, p)$ und „Erwartungswert-Funktion“ $A(q, p) \rightarrow \bar{A}$ stets äquivalent. Das hängt damit zusammen, daß man hier, da es keine Unschärferelationen gibt, für A speziell die δ -Funktion $\delta(q - q_0, p - p_0)$ setzen kann. Jeder Erwartungswertfunktion entspricht somit eindeutig eine Phasenverteilung $w = w^* \geq 0$. Das Umgekehrte gilt natürlich auch: $\bar{A} = \int dq dp w A$.

⁴² D. h. nicht nur trivial durch Wiederholung desselben Vektors bzw. durch Aneinanderreihung von Vielfachen $\alpha_\nu \psi$ eines einzigen Vektors.

⁴³ Ist die Unschärfe der Quantenzahl sehr groß im Vergleich zur Eins, aber sehr klein im Vergleich zur Quantenzahl selbst, so kann man es mit dem klassischen Grenzfall zu tun bekommen, und dann gilt für die Polarisation das weiter oben Gesagte. Es handelt sich dann nicht mehr um Wahrscheinlichkeitswellen für das elektromagnetische Feld, sondern um (angenähert scharfe) elektromagnetische Wellen. In diesem Zusammenhang sei bemerkt, daß (entgegen verschiedenen Äußerungen in der Literatur) die Schrödingerwelle eines Photons nicht einfach mit einer entsprechenden Maxwell-Welle der Energie $\hbar\omega$ identifiziert werden darf. Denn in Wirklichkeit sind die elektromagnetischen Feldstärken eines Photons sehr unscharf; ihr Erwartungswert verschwindet und die Wellenphase ist ganz unbestimmt. Die 21-cm-Wellen, die von den kosmischen H -Atomen durch die magnetischen Momente der Spins ausgestrahlt werden, sind in dieser Hinsicht von den Hertzischen Wellen gleicher Frequenz wesentlich verschieden. Der Polarisationszustand des eigentlichen Lichtes ist im Unterschied zu dem der Hertzischen Wellen sicher nicht an sich definiert, denn die vielen Quanten haben verschiedene Polarisationszustände und können miteinander wegen der Unbestimmtheit der Wellenphase nicht interferieren. Die Unbestimmtheit der Wellenphase des Lichtquants hat natürlich ihre Ursache in der bekannten Unbestimmtheit der Umlaufphase des emittierenden Elektrons.

scheiden könnte. Die Unterscheidung hat aber wegen des DIRACschen Koexistenzprinzips keinerlei physikalische Bedeutung: durch Zerlegung in Komponenten kann man von jedem Gemenge zu einem beliebigen anderen desselben Gemisches übergehen. Es muß nur dafür gesorgt werden, daß in einer beliebigen Darstellung die Quadrate und die gemischten Produkte der Komponenten übereinstimmen. Dies alles gilt auch für teilweise polarisierte Lichtquanten. Wie das erste der im vorletzten Absatz erwähnten zwei Beispiele zeigt, gibt es auch hier viele verschiedene Gemenge, die denselben Polarisationszustand des Lichtquants darstellen, vgl. Fig. 1, wobei aber die Elemente der Gesamtheit i. allg. aufeinander nicht orthogonal sind. Merkwürdigerweise betrachtet man meist nur die Gesamtheiten mit orthogonalen Elementen $\psi^{(v)}$. Eine Folge davon ist, daß in der bekannten Literatur die Äquivalenz von Gemischen nur für diese Art von statistischen Gesamtheiten diskutiert wird; sie kann dann nur in den speziellen Fällen auftreten, in denen der Zustandsoperator w des Gemisches entartet ist, falls der entartete Eigenwert nicht verschwindet (also positiv ist). In Wirklichkeit ist die Äquivalenz von Gemengen eine sehr viel allgemeinere Erscheinung.

Dabei ist die Tatsache, daß voneinander wesentlich⁴² verschiedene Gemenge äquivalent sein können, für die im zweiten Teil unserer Arbeit (S. 13) formulierte These sehr wichtig. Diese These wäre nämlich anderenfalls von vornherein nicht denkbar: Der Objektzustand kann durch die Wechselwirkung mit der Meßapparatur nur dann wirklich in Komponenten aufgeteilt werden, wenn es möglich ist, von dem ursprünglichen Gemenge zu einem anderen desselben Gemisches überzugehen. Die Komponenten des Objektzustandes müssen ja auf verschiedene Elemente desjenigen Gemenges verteilt sein, aus dem bei der Ablesung des Meßergebnisses gewählt werden soll. (Das ist mit dem Worte „Auswahl“ gemeint.) Von solch einer Verteilung kann aber in dem ursprünglichen Gemenge auch nach der Wechselwirkung nicht die Rede sein. Denn wegen der Unitarität der Relativbewegung enthält jedes Element des ursprünglichen Gemenges den vollen Zustand des Objekts; d. h. sämtliche Komponenten-Einheiten des Objektzustandes müssen in jedem Gemenge-Element auch nach der Wechselwirkung mit den ihnen von Anfang an zukommenden Wahrscheinlichkeitsamplituden vertreten sein. – Die These von der „bloßen Auswahl“ könnte also höchstens in dem eingeschränkten Sinne gelten, daß man vor dem Auswählen eine solche ausgesprochen logische Operation, wie ein Wechsel des Gemenges bei gleichbleibendem Gemisch es ist, ausdrücklich vornehmen muß (um die Ablesung als eine Auswahl deuten zu können). Damit wäre zwar ein expliziter „Widerspruch“ gegen die Schrödingergleichung umgangen unter Benutzung der Tatsache, daß sie ja auf die logische Operation ihrem Begriffe nach nicht angewandt werden kann. Von einer Ähnlichkeit des so beschriebenen quantentheoretischen Meßvorganges mit einer klassischen Messung könnte jedoch nur noch sehr bedingt die Rede sein, von einer Objektivität der ψ -Funktion überhaupt nicht. Es hilft auch nichts zu postulieren, daß nicht nur das Meßinstrument, sondern auch das Objekt nur durch ein Gemenge bzw. Gemisch beschrieben werden darf; denn bei einem Zustand positiver Entropie wundert man sich zwar auch vom klassischen Standpunkt aus nicht über die Unstetigkeit in der Messung, aber die gewünschte Kontinuität und Objektivität besteht nun natürlich erst recht nicht. Eine zeitlich unstetige Wahrscheinlichkeitsverteilung kann gewiß nicht als eine reale, dem System objektiv zukommende Größe ausgegeben werden (was auch immer das Wort „real“ genau bedeuten mag). Wenn das Gemisch die letzte erlaubte Idealisierungsstufe ist, kann seine Unstetigkeit nicht weniger anstößig sein als die – den Ausgangspunkt der ganzen Bemühung bildende – „Verletzung“ der Schrödingergleichung durch die Zustandsreduktion.

Hinzu kommt, daß solch ein Postulat weder für das Objekt noch für das Meßgerät begründet ist, im Unterschied etwa zur Einführung der quantentheoretischen Unschärfen,

die durch den Teilchen-Feld-Dualismus erzwungen wurde (das quantitative Maß dafür ist die Plancksche Konstante h .) Etwas Ähnliches fehlt hier, und daher wirkt die genannte Forderung ein wenig willkürlich. Die Kenntnis der makrophysikalischen Eigenschaften schließt die Angabe mikrophysikalischer nicht aus. Gewiß, die Objekte und die Meßinstrumente sind keine reinen Fälle; sie sind aber auch keine Gemische, sondern Dinge. Die Zustandsoperatoren w sind, ebenso wie die Schrödingerfunktionen ψ , nur (stilisierende) Beschreibungen unseres Wissens von den Dingen (oder allenfalls der Dinge selbst), also sicher nicht mit ihnen identisch. Die reinen Fälle verhalten sich zu den Gemischen ähnlich wie Punkte zu Intervallen oder Verteilungsfunktionen. Es handelt sich also stets um mathematisch exakte Begriffe; ohne diese Exaktheit ist eine streng rationale Theorie nicht möglich. Wenn aber überhaupt idealisiert wird, dann ist schwer einzusehen, warum es nicht auch grundsätzlich erlaubt sein soll, einen reinen Fall vorauszusetzen; es ist nichts bekannt, was dagegen spricht⁴⁴. Zum mindesten ist bisher nicht zu sehen, wo das behauptete prinzipielle, positive Entropieminimum liegen soll; ohne Not sollte seine Existenz nicht gefordert werden. Für die Theorie des Meßvorgangs wird dadurch auch nichts gewonnen, denn wir werden zeigen, daß sich die diskutierte These nicht einmal in der neuen, ihre Bedeutung bereits stark herabmindernden Version halten läßt.

Zu diesem Zweck setzen wir unsere Analyse fort und fassen zunächst das für uns Wesentliche noch einmal in DIRACscher Schreibweise zusammen. Über das Ergebnis der Messung macht die „statistische Transformationstheorie“ folgende Voraussagen: Die einzig möglichen Meßwerte von a sind die Eigenwerte a' , und die Wahrscheinlichkeit für das Meßergebnis $a = a'$ beträgt

$$\begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \end{array} \quad w_{a'} = \left\{ \begin{array}{l} |\langle a' | \psi \rangle|^2 \\ \langle a' | w | a' \rangle. \end{array} \right\} \quad (3)$$

Nach der Feststellung des Ergebnisses $a = a''$ ist die Wirkung der Messung auf den Zustand durch die Zustandsreduktion

$$\begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \end{array} \quad \begin{array}{l} |\psi'\rangle \rightarrow |a''\rangle \\ w' \rightarrow |a''\rangle \langle a''| \end{array} \quad (4)$$

zu beschreiben. Auch im reinen Fall (α) kann man dies unter Benutzung des Wahrscheinlichkeitsoperators ausdrücken, die Aussage:

$$|\psi'\rangle \langle \psi'| \rightarrow |a''\rangle \langle a''| \quad (4\alpha)'$$

ist mit (4 α) logisch äquivalent.

⁴⁴ Bei einem makroskopischen Körper wird man natürlich nicht eine ψ -Funktion ansetzen dürfen, deren Impuls oder Drehimpuls scharf ist (etwa = 0), denn dann wären ja (nach der Unschärferelation) die Schwerpunktskoordinaten bzw. Eulerwinkel gänzlich unbestimmt. Eine angemessene ψ -Funktion ist ein außerordentlich langsam auseinanderfließendes Wellenpaket, dessen Unschärfen alle mikrophysikalisch klein sind. Das Auseinanderfließen ist kein Einwand, denn die Gemische fließen auch auseinander. Durch die Wechselwirkung mit den Freiheitsgraden der Umgebung wird ferner ψ immer wieder in solcher Weise verändert, daß man gewissermaßen von einer „faktischen Lokalisierung“ des Körpers reden kann (vgl. die Diskussion im ersten Teil der Arbeit, S. 9). Beim Hinschauen ergibt sich dann jeweils, welche der vielen verbleibenden Möglichkeiten die wirkliche ist.

Den Zustand des Meßapparates bezeichnen wir mit Ψ oder mit W , je nachdem ob wir es mit einem reinen Fall oder mit einem Gemisch zu tun haben, und den Zustand des Gesamtsystems „Objekt + Instrument“ entsprechend mit Ψ bzw. W . Das Gemisch W denken wir uns öfters, vor allem bei der Untersuchung der „Auswahlthese“, durch eines seiner Gemenge $\{\dots \Psi^{(\mu)} \dots\}$ beschrieben. Wir benützen das Tomonagabild, in dem diese Zustände vor Beginn und nach Abschluß des Meßprozesses zeitlich konstant sind. In der Zwischenzeit ($t' < t < t''$) findet die Wechselwirkung zwischen dem Objekt und der Meßvorrichtung statt. Wir unterscheiden daher zwischen dem konstanten Anfangszustand W' , dem variablen Zwischenzustand $W(t)$ und dem konstanten Endzustand W'' ; aus Stetigkeitsgründen ist

$$W(t') = W' \quad \text{und} \quad W(t'') = W''.$$

Analoge Bezeichnungen führen wir für Ψ und die verschiedenen Komponenten der Zustandsgrößen ein. Die Bewegungsgleichung für den reinen Fall ist die Schrödingergleichung

$$i \hbar \dot{\Psi} = H_1 \Psi,$$

wobei H_1 die Wechselwirkungsenergie ist; für das Gemisch folgt daraus die Liouvillesche Gleichung

$$i \hbar \dot{W} = H_1 W - W H_1.$$

Zum Beweis genügt es, W durch eines seiner Gemenge darzustellen.

1. DIE ZERLEGUNG

Die der Messung zugrunde liegende mathematische Analyse ist in der statistischen Transformationsstheorie enthalten. Diese sagt insbesondere, welches die möglichen Meßwerte sind, und welche Wahrscheinlichkeiten man für sie zu erwarten hat. Die Grundlage dieser Theorie ist das quantenmechanische Superpositionsprinzip von DIRAC. Um den Meßvorgang mathematisch verfolgen zu können, hat man danach den Objektzustand vor der Messung durch Entwicklung nach den φ_a in die α -Darstellung zu transformieren. Diese vorbereitende Zerlegung lautet:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha) & |\psi'\rangle = \sum_a |a'\rangle \langle a' | \psi'\rangle \\ \beta) & w' = \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w' | a''\rangle \langle a''|. \end{array} \right\} \quad (5)$$

Faßt man den reinen Fall nicht als spezielles Gemisch auf, sondern beschreibt ihn einfacher durch einen Zustandsvektor, so tritt an die Stelle von (5 α) die damit äquivalente Entwicklung

$$|\psi'\rangle \langle \psi'| = \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \psi'\rangle \langle \psi' | a''\rangle \langle a''|. \quad (5 \alpha)'$$

Die Richtigkeit der Umformungen (5) folgt unmittelbar aus (1 b).

Mit dem Zustand des Meßapparates hat die Zerlegung nichts zu tun. Sie gilt in dieser einfachen Form nur für die Zeit vor dem Eintritt der Wechselwirkung zwischen der Meßvorrichtung und dem Objekt.

2. DIE AUFTEILUNG

Das Entscheidende am Meßprozeß besteht in einer Aufteilung des Objektzustandes in seine Komponenten, die das Ziel hat, eine Interferenz zwischen ihnen zu verhindern. Dieses Ziel kann nur erreicht werden durch einen in irgendeinem Sinne irreversiblen Prozeß. Sieht man vom Meßinstrument ab, so hat man es i. allg. ohne Frage mit einer Vergrößerung der Entropie zu tun, denn aus einem reinen Fall z. B. wird in den meisten Fällen ein eigentliches Gemisch (mit $S > 0$). Diese Entropievermehrung kann nicht spurlos rückgängig gemacht werden. Zieht man aber den Zustand des Meßapparates mit in Betracht, so ist eine Umkehrung des Prozesses grundsätzlich immer denkbar, denn die stetige Relativbewegung ist reversibel. Die Irreversibilität liegt in den logischen Akten des Schnittes und der Abstraktion vom Meßinstrument. In einfachen Beispielen wie der Polarisationsmessung eines Photons oder Elektrons (bzw. Atoms) kann sogar leicht angegeben werden, durch welchen Eingriff in das Meßmittel die getrennten Komponenten wieder zur Interferenz gebracht werden können. Der „Zustand des Meßinstrumentes“ ist hier nichts anderes als der räumliche Anteil derjenigen Wellenfunktion, deren Polarisationszustand gemessen wird; die Aufteilung besteht einfach in einer räumlichen Trennung, und diese kann leicht rückgängig gemacht werden, vgl. Fig. 2. In komplizierten Fällen, bei denen sehr viele

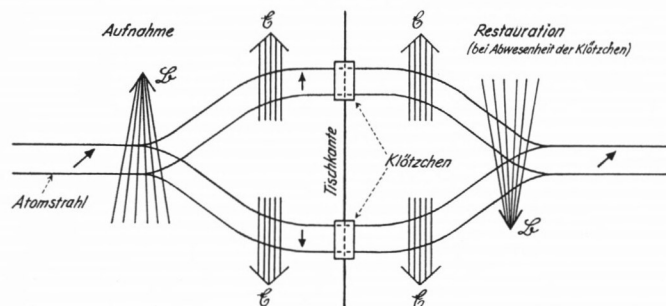


Fig. 2

Schema eines STERN-GERLACH-Versuches mit ausschließender Ortsmessung und einer Vorrichtung, die es gestattet, die beiden Teilstrahlen wieder zur Interferenz zu bringen. Vgl. dazu auch HEISENBERG⁴⁵, S. 32 und 45.

Freiheitsgrade ins Spiel kommen ($\simeq 10^{20}$), ist solch eine „Restauration“ praktisch ausgeschlossen. Der Meßprozeß ist dann faktisch irreversibel, denn die wirkliche Gesamtinformation über das System nimmt im Laufe der Zeit stark ab. Die Relativbewegung allein ist jedoch grundsätzlich nicht in der Lage, solch einen Informationsverlust auszudrücken, denn sie ist deterministisch (und reversibel), konserviert also durch ihre Gleichungen alle Information⁴⁵. Daß trotzdem Kenntnis verlorengeht, liegt vor allem an unserer mangelnden

⁴⁵ Bei Berücksichtigung der Schrödingergleichung (bzw. der Liouvilleschen Gleichung) allein ist die Entropie S bekanntlich zeitlich konstant, vgl. z. B. M. BORN, Natural Philosophy of Cause and Chance, Oxford 1949, Chap. VII. Die Zeit- oder Bewegungs-Umkehr erreicht man in der nichtrelativistischen Theorie durch Übergang zum konjugiert Komplexen ($\psi_{a'} \rightarrow \psi_{a'}^*$ bzw. $w_{a' a''} \rightarrow w_{a'' a'}$).

Fähigkeit, die Gleichungen zu lösen; allein das Mitteilen solch komplizierter Funktionen, wie es die strengen Lösungen in 10^{20} Dimensionen sein müssen, stößt auf unüberwindliche Schwierigkeiten. Die meisten Meßprozesse können also auch in diesem Sinne als irreversibel angesehen werden. Darin liegt aber nichts spezifisch Quantentheoretisches, sondern dies alles gilt für die klassische Thermodynamik in genau der gleichen Weise. – Ein typisches Beispiel für einen irreversiblen Meßprozeß erhält man, wenn man an die STERN-GERLACHSche Spinmessung durch folgende Versuchsanordnung eine Ortsmessung anschließt (vgl. Fig. 2): In den Weg eines jeden der beiden Strahlen werde über einer Tischkante je ein Klötzchen gelegt. Sein Schwerpunkt sei so nahe an der Kante, daß es von einem auftreffenden Atom praktisch immer umgestoßen wird. Andererseits soll der Schwerpunkt doch so weit von der Tischkante entfernt sein, daß die Wahrscheinlichkeit für das spontane Einsetzen dieses irreversiblen Prozesses vernachlässigt werden kann. Diese beiden Forderungen lassen sich grundsätzlich sehr wohl miteinander und mit der Unschärferelation des Klötzchens in Einklang bringen. Es braucht nur dafür gesorgt zu werden, daß der vom Atom übertragene Drehimpuls groß genug ist und die Wahrscheinlichkeit des Tunnel-effektes klein genug. Die potentielle Energie des Klötzchens geht nach dem Umstürzen in Wärme über, wobei die Entropie um sehr viele Boltzmann-Einheiten k zunimmt.

Wir fassen nun das für den quantentheoretischen Meßprozeß Wesentliche zusammen, und zwar so, daß die einfacheren Fälle (mit möglicher Restauration) mit umfaßt werden. Über den Zustand des Gesamtsystems und den des Instrumentes machen wir also zunächst keine Aussage. Der Zustand des Objektsystems allein erleidet jedenfalls folgende Aufteilung:

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \psi' \rangle \langle \psi' | a'' \rangle \langle a'' | \rightarrow \sum_{a''} |a''\rangle |\langle a'' | \psi' \rangle|^2 \langle a'' | \\ \beta) \quad & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w' | a'' \rangle \langle a'' | \rightarrow \sum_{a''} |a''\rangle \langle a'' | w' | a'' \rangle \langle a'' | \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Es werden also einfach die gemischten Glieder weggelassen. Eine nähere Begründung dafür werden wir im Verlaufe der folgenden drei Unterabschnitte a), b) und c) geben. Die Gemische auf der rechten Seite von (6) gestatten eine sehr naheliegende Deutung als Gemenge:

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad & \sum_{a'} |a''\rangle |\langle a'' | \psi' \rangle|^2 \langle a'' | \sim \{ \dots |a''\rangle \langle a'' | \psi' \rangle \dots \} \\ \beta) \quad & \sum_{a'} |a''\rangle \langle a'' | w' | a'' \rangle \langle a'' | \sim \{ \dots |a''\rangle \sqrt{\langle a'' | w' | a'' \rangle} \dots \} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Vielleicht darf man mit einer gewissen Berechtigung behaupten, daß der Meßvorgang gerade diese Gemenge erzeugt⁴⁶. Die „vektorielle“ Form der linken Seite von (6 α) findet man in (5 α'). Ersetzt man die rechte Seite von (6 α) durch das Gemenge (7 α), so entsteht die Formel

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a' | \psi' \rangle \rightarrow \{ \dots |a''\rangle \langle a'' | \psi' \rangle \dots \} \quad (6\alpha)'$$

für die Aufteilung des reinen Falles. – Bei alledem ist vorausgesetzt, daß der Meßapparat ideal ist, d. h. daß die mit der Messung verbundene Störung des Objektzustandes nicht größer ist, als von der Quantentheorie prinzipiell verlangt werden muß. Die bereits in der klassischen Physik, im Limes $\hbar \rightarrow 0$ sozusagen⁴⁶, vorkommenden Störungen können wir hier ignorieren.

⁴⁶ Gemeint ist der Grenzfall hoher Quantenzahlen.

a) Die Erweiterung

Um die Wechselwirkung des Objekts mit dem Meßinstrument beschreiben zu können, muß man seinen Zustandsraum durch den des Instruments erweitern. Das geschieht durch Übergang zum Produktraum; die Dimensionen werden also nicht wie im klassischen Phasenraum addiert, sondern multipliziert. (Die Dimensionen des Konfigurationsraumes, über dem der quantenmechanische Zustandsraum als Funktionenraum errichtet ist, werden addiert). Man erhält allgemein die Zustandsgrößen des Gesamtsystems durch Bildung des direkten Produktes der Zustandsgrößen der Teilsysteme⁴⁷:

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \end{array} \right\} \begin{array}{l} |\Psi\rangle\rangle = |\psi\rangle |\Psi\rangle \\ W = w \times W. \end{array} \quad (8)$$

Um die direkten Produkte zu erklären, muß man in den beiden Teilräumen Darstellungen $|a'\rangle$ und $|A'\rangle$ zugrunde legen mit den in (1) genannten Eigenschaften. Der Produktraum wird dann nach Definition durch die Gesamtheit der formal eingeführten neuen Einheitsvektoren

$$|a'\rangle |A'\rangle \equiv |a' A'\rangle$$

aufgespannt. Damit ist

$$|\Psi\rangle\rangle = \sum_{a'} \sum_{A'} |a' A'\rangle \langle a' | \psi \rangle \langle A' | \Psi \rangle$$

oder

$$\langle\langle a' A' | \Psi \rangle\rangle = \langle a' | \psi \rangle \langle A' | \Psi \rangle,$$

und für den thermodynamischen Zustand gilt

$$W = \sum_{a'} \sum_{a''} \sum_{A'} \sum_{A''} |a' A'\rangle \langle a' | w | a'' \rangle \langle A' | W | A'' \rangle \langle\langle a'' A'' |$$

oder

$$\langle\langle a' A' | W | a'' A'' \rangle\rangle = \langle a' | w | a'' \rangle \langle A' | W | A'' \rangle.$$

Diese Definitionen sind invariant gegen unitäre Transformationen $|a'\rangle \rightarrow |c'\rangle$ und $|A'\rangle \rightarrow |C'\rangle$. Natürlich können nicht alle Vektoren des zusammengesetzten Systems in dieser Weise in zwei Teile separiert werden; Größen von der Art (8) sind seltene Spezialfälle. PAULI bezeichnet diese Behandlung zusammengesetzter Systeme als das für die neuere Quantentheorie am meisten Charakteristische⁴⁸. Sie ist ein deutlicher Hinweis auf den symbolischen, logischen, informationstheoretischen oder statistischen Charakter der ψ -Funktion.

Wir unterscheiden von nun an vier Fälle, je nachdem ob für das Objekt bzw. das Instrument ein reiner Fall oder ein Gemisch vorausgesetzt ist. Vor Beginn der Wechselwirkung müssen wir den Zustand des Objekts mit dem des Meßgeräts multiplizieren:

⁴⁷ Die Antimetrisierung oder Symmetrisierung gleicher Teilchen kann in unserem Fall vernachlässigt werden. Die Berücksichtigung der Austausch-Effekte würde an den Gleichungen und am Ergebnis nichts Wesentliches ändern.

⁴⁸ W. PAULI², S. 111.

$$\begin{array}{ll}
 \alpha\alpha) & |\psi'\rangle \rightarrow |\psi'\rangle |\Psi'\rangle \\
 \alpha\beta) & |\psi'\rangle \langle\psi'| \rightarrow |\psi'\rangle W' \langle\psi'| \\
 \beta\alpha) & w' \rightarrow |\Psi'\rangle w' \langle\Psi'| \\
 \beta\beta) & w' \rightarrow w' \times W'
 \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \alpha\alpha) \\ \alpha\beta) \\ \beta\alpha) \\ \beta\beta) \end{array}} \right\} (9)$$

oder im reinen Fall auch

$$|\psi'\rangle \langle\psi'| \rightarrow \sum_a \sum_{a''} |\psi'\rangle |\Psi'\rangle \langle\Psi'| \langle\psi'|. \quad (9\alpha\alpha)'$$

Hierin setzen wir noch die Entwicklung (5) ein und erhalten damit für die Erweiterung des zerlegten Zustandes folgende Formeln:

$$\begin{array}{ll}
 \alpha\alpha) & \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \psi'\rangle \langle\psi' | a''\rangle \langle a''| \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \Psi'\rangle \langle\Psi' | a''\rangle \langle a''| \\ \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \psi'\rangle W' \langle\psi' | a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\} \\
 \alpha\beta) & \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \psi'\rangle \langle\psi' | a''\rangle \langle a''| \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \Psi'\rangle \langle\Psi' | a''\rangle \langle a''| \\ \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \psi'\rangle W' \langle\psi' | a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\} \\
 \beta\alpha) & \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w'\rangle \langle w' | a''\rangle \langle a''| \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \Psi'\rangle \langle\Psi' | a''\rangle \langle a''| \\ \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w'\rangle W' \langle w' | a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\} \\
 \beta\beta) & \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w'\rangle \langle w' | a''\rangle \langle a''| \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | \Psi'\rangle \langle\Psi' | a''\rangle \langle a''| \\ \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w'\rangle W' \langle w' | a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\}
 \end{array} \quad (10)$$

und im reinen Fall auch einfacher:

$$\sum_a |a'\rangle \langle a' | \psi\rangle \rightarrow \sum_a \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi\rangle \langle\Psi' | a''\rangle \langle a''| \psi\rangle. \quad (10\alpha\alpha)'$$

Die Erweiterung ist unumgänglich, weil der Gesamtzustand Ψ bzw. W nach Eintritt der Wechselwirkung zeitlich verändert wird.

Das typisch Quantentheoretische daran ist, daß eine Separation in die beiden Teilsysteme von da an nicht mehr möglich ist, nicht einmal nach dem Aufhören der Wechselwirkung. Zwischen dem Objekt und dem Meßinstrument treten nämlich Korrelationen auf, die sich durch eine einfache Zusammensetzung zweier Zustandsgrößen nach dem Vorbild von (8), (9) oder (10) sicher nicht wiedergeben lassen. Diese Erscheinung ist eine Konsequenz der merkwürdigen Tatsache, daß man in der Quantenmechanik bei der gedanklichen Zusammenfassung zweier Systeme das direkte Produkt der Zustandsräume zu bilden hat und nicht, wie in der klassischen Mechanik, die direkte Summe. Für eine rationale Theorie der spezifisch quantentheoretischen Störungen, die wegen der Unschärfe der Meßapparate mit jeder Messung verknüpft sind, ist dies von entscheidender Bedeutung. Im Prinzip bereits klassisch verständlich dagegen sind die von den Schwankungserscheinungen des Meßinstrumentes bewirkten thermodynamischen Störungen. Die beiden Effekte müssen voneinander wohl unterschieden werden (wie die beiden atomistischen Grundkonstanten h und $\hbar$). Die quantentheoretischen Störungen sind die Hauptursache für den Ausfall vieler Interferenzmöglichkeiten als Folge einer Wechselwirkung mit dem Meßinstrument⁴⁹.

⁴⁹ Diese Störungen sind deshalb so viel gründlicher in bezug auf die Interferenzfähigkeit als die durch die Schwankungserscheinungen bewirkten, weil nach dem Übergang zu dem hochdimensionalen Produkt-raum mit der anschließenden Wechselwirkung die Orthogonalität von Vektoren sehr häufig auftreten muß.

b) Die Aufnahme

Einfachheitshalber betrachten wir zunächst wieder den reinen Fall ($\alpha\alpha$). Der Anfangszustand ist $\Psi' = \sum \psi'_{a'} \Phi'_{a'}$, wobei zur Abkürzung die Produktvektoren $\Phi'_{a'} = \varphi_{a'} \Psi'$ bzw. $|\Phi'_{a'}\rangle = |a'\rangle |\Psi'\rangle^{a'}$ eingeführt worden sind; die $\psi'_{a'} \equiv \langle a' | \Psi' \rangle$ sind einfache Koeffizienten. Ist nun das Instrument wirklich auf eine Messung von a eingerichtet, so hat sein Zustand folgende Eigenschaften: Auf Grund der Wechselwirkung verursacht jede Komponenten-Einheit $\varphi_{a'}$ von Ψ' wegen der Linearität der Schrödingergleichung des Gesamtsystems eine zeitliche Veränderung der entsprechenden Komponenten-Einheit $\Phi'_{a'}$ von Ψ' . Die aus den $\Phi'_{a'}$ hervorgehenden Hilbertvektoren nennen wir $\Phi_{a'}(t)$. Zu Beginn der Wechselwirkung gehen sie also nach Definition stetig in die $\Phi'_{a'}$ über: $\Phi_{a'}(t') = \Phi'_{a'}$. Während der Wechselwirkung sind sie i. allg. weder zeitlich konstant noch separierbar. Wegen der Hermitizität des Wechselwirkungsoperators besteht aber immer noch die Orthonormierung

$$\langle \Phi_{a'}(t) | \Phi_{a''}(t) \rangle = \delta_{a' a''};$$

die Vollständigkeitsrelation gilt natürlich für sie nicht, denn vom Meßinstrument wurde nur ein Zustand benutzt. Durch die $\Phi_{a'}(t)$ ist der Zwischenzustand eindeutig gegeben:

$$\Psi(t) = \sum_{a'} \psi'_{a'} \Phi_{a'}(t) \quad \text{mit} \quad |\Psi(t)|^2 = \sum_{a'} |\psi'_{a'}|^2 = 1.$$

Der Zustandsvektor wird demnach im Verlauf der Wechselwirkung so in den hochdimensionalen Produktraum aufgenommen, daß eine Separation nicht mehr möglich ist. Das gilt auch für die Zeit nach dem Aufhören der Wechselwirkung, in der er wieder konstant ist. Beim Aufhören der Wechselwirkung gehen die $\Phi_{a'}(t)$ stetig in konstante Vektoren über, die wir $\Phi''_{a'}$ nennen: $\Phi_{a'}(t'') = \Phi''_{a'}$. Sie sind zwar separierbar, aber mit verschiedenen, vom Meßwert a' abhängigen Zuständen des Instruments: $\Phi''_{a'} = \varphi''_{a'} \Psi''_{a'}$. Wegen dieser a' -Abhängigkeit von Ψ'' ist der Endzustand Ψ'' des Gesamtsystems nicht separierbar, denn

$$\Psi'' = \sum_{a'} \psi'_{a'} \Phi''_{a'} = \sum_{a'} \psi'_{a'} \varphi''_{a'} \Psi''_{a'}.$$

Die Normierung gilt übrigens nicht nur für die $\Phi''_{a'}$, sondern aus Hermitizitätsgründen in aller Strenge auch für ihre Faktoren⁵⁰:

$$|\varphi''_{a'}|^2 = |\Psi''_{a'}|^2 = 1.$$

Die Orthogonalität dagegen läßt sich allgemein nicht beweisen. Ein streng aufteilendes Meßinstrument muß aber so konstruiert sein, daß die Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten zwischen den $\Psi''_{a'}$ verschwinden. Bestünde diese Beziehung nicht, so dürfte man keinen objektivierenden (verschiebbaren) Schnitt zwischen das Objekt und das „Meßinstrument“ legen. Wir nehmen an, daß die Bedingung erfüllt ist. Vom Ausgangszustand Ψ' sind diese Endzustände trotz vieler Gemeinsamkeiten gleichfalls wesentlich verschieden. Die $\Psi''_{a'}$ müssen sogar (bis auf evtl. eine Ausnahme) auf Ψ' orthogonal sein, denn anderenfalls

⁵⁰ Das Objekt wird natürlich mit der Wahrscheinlichkeit 1 irgendwo im Zustand $\varphi''_{a'}$ gefunden, wenn $\psi'_{a'} = \delta_{a' a''}$, also $\psi' = \varphi''_{a'}$ und $\psi'' = \varphi''_{a'}$ ist. Entsprechendes gilt für das Instrument.

wären sie nicht imstande, das Meßergebnis deutlich anzuzeigen. Bei den $\varphi''_{a'}$ dagegen ist das ganz anders: Handelt es sich um einen störungsfreien Meßapparat, so sind die prinzipiell vermeidbaren Störungen unendlich klein und folglich

$$\varphi''_{a'} = \varphi'_{a'}. \quad (11)$$

Das Instrument muß dann natürlich unendlich empfindlich sein⁵¹.

Im Falle eines Gemisches ($\beta\beta$) gehen wir entsprechend von einer „Einheitskomponente“ $|a'\rangle \langle a''|$ des Objektoperators w aus. Der Instrumentoperator

$$W' = \sum_{\mu} |\Psi^{(\mu)'}\rangle \langle \Psi^{(\mu)'}|$$

wird dabei in einen Operator

$$W''_{a'a''} = \sum_{\mu} |\Psi_{a'}^{(\mu)''}\rangle \langle \Psi_{a''}^{(\mu)''}|$$

übergeführt; es gilt $W''_{a'a''}^* = W''_{a''a'}$ und $W''_{a'a''} \geq 0$. Die Unitarität der Streumatrix (d. h. die der zeitlichen Änderung) ergibt

$$\langle W''_{a''a''} \rangle = \sum_{\mu} |\Psi_{a''}^{(\mu)''}|^2 = 1$$

und die Forderung nach Eindeutigkeit der Messung

$$\langle \Psi_{a'}^{(\mu')''} | \Psi_{a''}^{(\mu'')''} \rangle = 0$$

für $a' \neq a''$. Alles andere kann fast wörtlich übertragen werden.

Wir fassen das an der Aufnahme Wesentliche zusammen:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha\alpha) \sum_{a'} |a'\rangle |\Psi'\rangle \langle a'|\psi\rangle & \rightarrow \sum_{a'} |a'\rangle |\Psi_{a'}''\rangle \langle a'|\psi\rangle \\ \alpha\beta) \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|\psi\rangle W' \langle \psi|a''\rangle \langle a''| & \rightarrow \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|\psi\rangle W''_{a'a''} \langle \psi|a''\rangle \langle a''| \\ \beta\alpha) \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi'\rangle \langle a'|w|a''\rangle \langle \Psi'|\langle a''| & \rightarrow \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi_{a'}''\rangle \langle a'|w|a''\rangle \langle \Psi_{a''}''|\langle a''| \\ \beta\beta) \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|w|a''\rangle W' \langle a''| & \rightarrow \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|w|a''\rangle W''_{a'a''} \langle a''| \end{array} \right\} \quad (12)$$

bzw.

(12 $\alpha\alpha$)'

$$\sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi'\rangle \langle a'|\psi\rangle \langle \psi|a''\rangle \langle \Psi'|\langle a''| \rightarrow \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi_{a'}''\rangle \langle a'|\psi\rangle \langle \psi|a''\rangle \langle \Psi_{a''}''|\langle a''|.$$

Die Zwischenzustände interessieren nicht. Für die Endzustände des Meßinstruments, durch welche die verschiedenen Meßwerte angezeigt werden, gilt die Aufteilungsbedingung

⁵¹ Wir haben diese Idealisierung nur deshalb vorgenommen, um übersichtliche Formeln und einen einfachen Begriff der „Zustandsreduktion“ zu bekommen, vgl. (4). Tatsächlich könnte man bereits in dem Falle daß die $\varphi'_{a'}$ durch den Meßvorgang berechenbare Veränderungen ($\rightarrow \varphi''_{a'}$) erleiden, von einer „idealen Maximalmessung“ reden.

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad & \langle \Psi''_{a'} | \Psi''_{a''} \rangle = \delta_{a' a''}, \\ \beta) \quad & \langle W''_{a' a''} \rangle = \delta_{a' a''}, \quad \langle W''_{a' a'} W''_{a'' a''} \rangle = \delta_{a' a''} \langle W''_{a'' a''}{}^2 \rangle. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

Sie bezieht sich aber eigentlich nur auf die nichtdiagonalen Fälle ($a' \neq a''$), denn die Normierungen $|\Psi''_{a'}|^2 = 1$ bzw. $\langle W''_{a'' a''} \rangle = 1$ gelten aus Unitaritätsgründen sicher streng. Die übrigen Gleichungen sind äquivalent zu den Orthogonalitätsbedingungen $\langle \Psi_{a'} | \Psi_{a''} \rangle = 0$ bzw. $W''_{a' a'} W''_{a'' a''} = 0$ für $a' \neq a''$, letzteres wegen

$$\langle W''_{a' a'} W''_{a'' a''} \rangle = \sum_{\mu'} \sum_{\mu''} |\langle \Psi_{a'}^{(\mu')} | \Psi_{a''}^{(\mu'')} \rangle|^2,$$

so daß alle $\langle \Psi_{a'}^{(\mu')} | \Psi_{a''}^{(\mu'')} \rangle$ verschwinden werden müssen. In (13 β) folgt also die erste Orthogonalitätsforderung aus der zweiten. Bei der Spezialisierung auf den reinen Fall, $W''_{a' a''} = |\Psi''_{a'} \rangle \langle \Psi''_{a''}|$, gehen beide Gleichungen (13 β) in (13 α) über.

Wegen der Orthogonalitäten (13) können die Komponenten des Objektzustandes nicht mehr in einfacher Weise zur Interferenz gebracht werden. Um die Kohärenz vollständig wiederherzustellen, müßte man eine Restauration des Instruments vornehmen:

$$\left. \begin{aligned} \alpha) \quad & |\Psi''_{a''} \rangle \rightarrow |\Psi''_{a'} \rangle \\ \beta) \quad & W''_{a' a''} \rightarrow W''_{a' a'} \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

bzw.

$$|\Psi''_{a'} \rangle \langle \Psi''_{a''}| \rightarrow |\Psi''_{a'} \rangle \langle \Psi''_{a'}|. \quad (14\alpha)'$$

In allen nicht zu einfachen Fällen ist solch ein Prozeß praktisch nicht möglich, denn es dürfen dabei keine neuen Freiheitsgrade angeregt werden. Bei 10^{20} Freiheitsgraden kann sogar eine partielle Wiederherstellung der Kohärenz ausgeschlossen werden.

Die Bedingung (13) ist für die Deutlichkeit und Zuverlässigkeit der Messung von entscheidender Bedeutung. Sie sorgt dafür, daß die Zuordnung zwischen den „Zeigerstellungen“ des Instruments und den Meßwerten des Objekts umkehrbar eindeutig ist. Für die Verschiebbarkeit des Schnittes ist dies wesentlich⁵².

c) Der Schnitt

Nachdem der Meßprozeß (im engeren Sinne des Wortes) abgelaufen ist, kommt es darauf an festzustellen, in welchem der möglichen Zustände $\Psi''_{a''}$ (bzw. $W''_{a'' a''}$) sich das Meßinstrument befindet. Daraus kann dann eindeutig auf den Zustand $\varphi_{a'}$ des Objekts geschlossen werden, denn zwischen den $\varphi_{a''}$ und den $\Psi''_{a''}$ (bzw. $W''_{a'' a''}$) besteht, wie wir gesehen haben, eine vollständige Korrelation. Zu diesem Zwecke muß man ein Observablensystem A des Instruments messen, durch dessen Eigenwerte A'' die Zustände $\Psi''_{a''}$ (bzw. $W''_{a'' a''}$) eindeutig charakterisiert werden können. Notwendig und hinreichend für die Existenz eines solchen

⁵² V. NEUMANN² legt in seiner Diskussion des Meßprozesses das Hauptgewicht auf die Frage, ob es eine unitäre Transformation von der Art (12) und (13) geben kann (S. 234 und 235). Dazu konstruiert er ein physikalisch bedeutungsloses, aber mathematisch einfaches Beispiel: $U = \sum_n \sum_m |a'_n \rangle |a'_{m+n} \rangle \langle a'_m| \langle a'_n|$ und $|\Psi''_{a'} \rangle = |a'_0 \rangle$, $|\Psi''_{a''} \rangle = |a'_n \rangle$, wobei die Basisvektoren $|a' \rangle$ und $|a'' \rangle$ von $-\infty$ bis $+\infty$ numeriert sind.

Systems vertauschbarer Operatoren sind die Orthogonalitätsbedingungen (13). Das wichtigste Beispiel für $\mathcal{A}$ ist die Gesamtheit der Eigenschaften $E''_{a''}$, die auf die durch $\Psi''_{a''}$ (bzw. die $\Psi''_{a''}(\psi)$) aufgespannten Unterräume projizieren, deren Erwartungswerte also gleich sind den Übereinstimmungswahrscheinlichkeiten mit den $\Psi''_{a''}$ (bzw. $W''_{a'' a''}$). Nun kommt es darauf an, ob die gemischten Glieder ($a' \neq a''$) im Endzustand (12) vernachlässigt werden, oder ob man sie mitberücksichtigt. Werden die Interferenzterme beibehalten, so heißt das nichts anderes, als daß das Meßinstrument mit zum quantenmechanisch beschriebenen Objekt gerechnet wird. Der Schnitt wird verschoben, und damit auch die Problematik des Meßvorgangs. Beides läßt sich aber nicht vermeiden, denn die gemischten Terme müssen spätestens bei der Ablesung des Meßresultates als ungültig weggelassen werden⁵³.

Wir nehmen daher am Zustand des Gesamtsystems durch Weglassen der Interferenzterme eine gedankliche Objektivierung der Meßwerte a' vor:

$$\left. \begin{aligned} \alpha\alpha) \quad & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi''_{a''}\rangle \langle a'|\psi\rangle \langle \psi|a''\rangle \langle \Psi''_{a''}|\langle a''| \rightarrow \sum_{a''} |a''\rangle |\Psi''_{a''}\rangle \langle a''|\psi\rangle^2 \langle \Psi''_{a''}|\langle a''| \\ \alpha\beta) \quad & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|\psi\rangle W''_{a'a''} \langle \psi|a''\rangle \langle a''| \rightarrow \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|\psi\rangle^2 W''_{a'' a''} \langle a''| \\ \beta\alpha) \quad & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi''_{a''}\rangle \langle a'|w'\rangle \langle \Psi''_{a''}|\langle a''| \rightarrow \sum_{a''} |a''\rangle |\Psi''_{a''}\rangle \langle a''|w'\rangle \langle \Psi''_{a''}|\langle a''| \\ \beta\beta) \quad & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|w'\rangle W''_{a'a''} \langle a''| \rightarrow \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|w'\rangle W''_{a'' a''} \langle a''|. \end{aligned} \right\} (15)$$

Sobald die gemischten Glieder fehlen, darf man die Messung von $\mathcal{A}$ als nicht wesentlich verschieden von denjenigen Messungen ansehen, die in der klassischen Physik postuliert werden können. Da nämlich keine Interferenzmöglichkeiten bestehen, darf man sagen, daß diese Messung keinen wirklichen Eingriff in das gemessene System darstellt, sondern lediglich die rein subjektive Unkenntnis des Beobachters behebt. Es kann dann keine dazu komplementäre Versuchsanordnung geben, durch die die Koexistenz der Zustände statistisch nachgewiesen werden könnte. Durch die Objektivierung wird im allg. die Entropie des Zustandes vermehrt, denn mit dem Weglassen der Interferenzterme ist ein Informationsverlust verbunden. Insbesondere geht fast jeder reine Fall in ein Gemisch (oder Gemenge) über; die einzige Ausnahme liegt dann vor, wenn a vor der Messung scharf war.

Der Zustand des Meßgeräts interessiert nur als Mittel zum Ablesen des Objektzustandes. Man gewinnt den letzteren aus dem Zustand des Gesamtsystems dadurch, daß man die Er-

⁵³ Allerdings ist es von einem mehr formal-mathematischen Standpunkte aus durchaus möglich, die Interferenzterme unbegrenzt beizubehalten, indem man die Zustandsreduktion nicht vornimmt. Es kann – wegen der Linearität der Bewegungsgleichung für das umfassendste Gesamtsystem – sicher niemals zu Widersprüchen führen, wenn man die „nichtrealisierten“ Komponenten des Gesamtzustandes nicht wegläßt, sondern auch in der Zukunft weiterhin mitberücksichtigt. Diese Ψ -Funktion drückt indessen nicht das wirkliche Wissen (und seine quantenlogischen Konsequenzen) aus, sondern einen geringeren, „veralteten“ Wissenszustand und seine entsprechend ärmeren Prognosen für das zukünftige Verhalten des Objektsystems. Faßt man aber Ψ (bzw. W) nur als die Gesamtheit der quantenlogischen Konsequenzen aus wirklichem Wissen auf, so ist das nichtreduzierte Ψ sicher logisch korrekt. Dies alles setzt allerdings voraus, daß auch der menschliche Beobachter streng den Gesetzen der Quantenmechanik genügt; dieser hypothetische „Entwurf“ ist natürlich ganz ungewiß. Doch wird man durch diese Überlegung dazu geführt, den klassischen Begriff des Wissens und Bewußtseins (auch) von der Quantentheorie her prinzipiell in Zweifel zu ziehen (C. F. v. WEIZSÄCKER), so wie ja schon früher (vgl. S. 3 u.) der klassische Begriff eines makrophysikalischen Körpers durch Einführung des Unbestimmtheits- oder Möglichkeitsbegriffes (nach Maßgabe der HEISENBERGSchen Unschärferelation) aufgehoben werden mußte.

weiterung des Zustandsraumes wieder rückgängig macht. Da nach der Messung zwischen den Zuständen des Objekts und denen des Instruments Korrelationen bestehen, wird die Entropie durch solch eine gedankliche Teilung des Zustandes notwendig vergrößert. Das dadurch aus W'' (bzw. Ψ'') entstehende Paar von Teilzuständen w'' und W'' kann nämlich über diese Korrelation keine Aussagen mehr enthalten. Insbesondere entsteht aus einem nicht separierbaren reinen Fall ein Gemisch oder Gemenge. Durch die „Verkürzung“ wird demnach zweierlei bewirkt: Der Zustand des Instruments wird gedanklich abgetrennt, und als Folge dieser Abstraktion zerfällt der Zustand des Objekts in nicht kohärente Bestandteile.

Wir untersuchen zunächst die Verkürzung⁵⁴ eines beliebigen Zustandes W des Gesamtsystems auf den Zustandsraum des Objekts; der reine Fall Ψ ergibt sich durch einfache Spezialisierung: $W = |\Psi\rangle\langle\Psi|$. Diese Größen sind im Gegensatz zu (8) i. allg. nicht separierbar. Gesucht ist die Erwartungswertfunktion, die den Produktoperatoren $b \equiv b \times 1$ die Erwartungswerte $\bar{b} = \overline{b \times 1}$ zuordnet. Nach Definition ist

$$\langle\langle a'A' | b | a''A'' \rangle\rangle = b_{a'a''} \delta_{A'A''}$$

und folglich

$$\bar{b} = \sum_{a'} \sum_{a''} b_{a'a''} w_{a'a''} \quad \text{mit} \quad w_{a'a''} = \sum_{A'} \langle\langle a'A' | W | a''A' \rangle\rangle.$$

Man erhält also den verkürzten Zustandsoperator

$$w = \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle w_{a'a''} \langle a''|$$

durch partielle Spurbildung, eine Operation, die gegen unitäre Transformationen $|a'\rangle \rightarrow |c'\rangle$ und $|A'\rangle \rightarrow |C'\rangle$ ebenso invariant ist wie die Bildung des Produktoperators. Eine naheliegende Bezeichnung dafür ist

$$\langle W \rangle = \sum_{A'} \langle A' | W | A' \rangle = \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \cdot \sum_{A'} \langle\langle a'A' | W | a''A' \rangle\rangle \cdot \langle a''|$$

und entsprechend

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle\langle\Psi| &= \langle|\Psi\rangle\rangle \langle\langle\Psi| \rangle = \sum_{A'} \langle A' | \Psi \rangle \langle\langle\Psi | A' \rangle\rangle \\ &= \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \cdot \sum_{A'} \langle\langle a'A' | \Psi \rangle\rangle \langle\langle\Psi | a''A' \rangle\rangle \cdot \langle a''|. \end{aligned}$$

Diese Größen dürfen natürlich nicht mit der (vollen) Spur $\langle\langle W \rangle\rangle = 1$ und dem Projektionsoperator $|\Psi\rangle\langle\langle\Psi| = P_\Psi$ verwechselt werden. Die zu Ψ bzw. W gehörige verkürzte Zustandsgröße ist damit

$$\begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \end{array} \quad w = \left\{ \begin{array}{l} |\Psi\rangle\langle\Psi| \\ \langle W \rangle. \end{array} \right\} \quad (16)$$

⁵⁴ Dieser Ausdruck stammt von LUDWIG²; v. NEUMANN² sagt „Projektion“, was aber leicht mit der Wirkungsweise eines idempotenten Hilbert-Operators ($e = e^2$) verwechselt werden kann.

Dies ist die Umkehrung der Produktbildung (8), aber mit Verallgemeinerung auf die nicht separierbaren Zustände des Gesamtsystems.

Wir wenden nun (16 β) auf die rechte Seite W'' von (12 $\beta\beta$) an und erhalten für das Matrixelement des verkürzten Zustandsoperators den Ausdruck

$$w''_{a'a''} = w'_{a'a''} \langle W''_{a'a''} \rangle = w'_{a'a''} \delta_{a'a''},$$

letzteres unter Benutzung der ersten Bedingung (13 β). Die Spezialisierung auf die drei anderen Fälle ist ganz einfach. Die Wirkung des Schnittes können wir somit folgendermaßen formulieren:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha\alpha) & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi''_{a'}\rangle \langle a'|\psi'\rangle \langle \psi'|a'\rangle \langle \Psi''_{a'}| \langle a''| \\ \alpha\beta) & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|\psi'\rangle W''_{a'a''} \langle \psi'|a''\rangle \langle a''| \\ \beta\alpha) & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle |\Psi''_{a'}\rangle \langle a'|w'|a''\rangle \langle \Psi''_{a'}| a''\rangle \\ \beta\beta) & \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a'|w'|a''\rangle W''_{a'a''} \langle a''| \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{a''} |a''\rangle |\langle a''|\psi'\rangle|^2 \langle a''| \\ \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|w'|a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\} \quad (17)$$

Die Summanden auf der rechten Seite repräsentieren die Möglichkeiten der einzelnen Meßwerte; ihre Normen sind die dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Das Fehlen der gemischten Glieder bedeutet, daß die Meßwerte a' durch das Absehen vom Meßinstrument (ähnlich wie durch die Objektivierung) fixiert werden. Zu genau demselben Ergebnis kommt man natürlich, wenn vorher die Objektivierung (15) vollzogen worden ist; wir bezeichnen die Verkürzung dann als Abstraktion vom Meßinstrument:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha\alpha) & \sum_{a''} |a''\rangle |\Psi''_{a''}\rangle \langle a''|\psi'\rangle^2 \langle \Psi''_{a''}| \langle a''| \\ \alpha\beta) & \sum_{a''} |a''\rangle |\langle a''|\psi'\rangle|^2 W''_{a''a''} \langle a''| \\ \beta\alpha) & \sum_{a''} |a''\rangle |\Psi''_{a''}\rangle \langle a''|w'|a''\rangle \langle \Psi''_{a''}| \langle a''| \\ \beta\beta) & \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|w'|a''\rangle W''_{a''a''} \langle a''| \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \sum_{a''} |a''\rangle |\langle a''|\psi'\rangle|^2 \langle a''| \\ \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|w'|a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\} \quad (18)$$

Der Übergang (17) kann auch als eine Zusammenfassung der Übergänge (15) und (18) aufgefaßt werden. Selbstverständlich braucht in (17) und (18) die Entropie der rechten Seite nicht größer zu sein als die der linken; sie ist meist sogar kleiner, denn es fehlt ja die Entropie des Meßinstruments.

Aus dem Ergebnis (17) bzw. (18) ist der Zustand des Meßinstruments vollständig herausgefallen. Insbesondere ist es gleichgültig, ob man dafür einen reinen Fall oder ein Gemisch voraussetzt. Wesentlich benutzt haben wir lediglich die Bedingungen (13). Durch Zusammenfassen von (10), (12) und (17) erhalten wir, wie behauptet, das Schema (6) für die Aufteilung des Objektzustandes.

3. DIE ABLESUNG

Sobald das Meßergebnis $\Psi_{a=a''}$ (bzw. $W_{a=a'', a=a''}$) bekannt geworden ist, ist die Zustandsangabe W' im allg. nicht mehr wahr. Die in W' enthaltenen Implikationen sind zwar immer noch formal richtig, aber im allg. nicht mehr gültig: ihr Vordersatz darf nicht mehr behauptet werden, denn inzwischen ist ja etwas Neues gemessen worden. Durch die Ablesung geht die rechte Seite von (15) in $|a''\rangle |\Psi_{a''}\rangle$ bzw. $|a''\rangle W_{a'' a''} \langle a''|$ über. Durch Verkürzung entsteht daraus (beide Male) der reine Fall $|a''\rangle$ bzw. $\langle a''|$. Zu demselben Ergebnis kommt man direkt, wenn man von der rechten Seite von (18) oder (17) ausgeht, d. h. wenn man schon vor der Ablesung auf die explizite Mitteilung des Instrumentzustandes verzichtet.

Das an der Ablesung Wesentliche kann somit folgendermaßen bezeichnet werden. Für das Gesamtsystem gilt:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha\alpha) & \sum_{a''} |a''\rangle |\Psi_{a''}\rangle \langle a''|\psi'\rangle^2 \langle \Psi_{a''}| \langle a''| \\ \beta\alpha) & \sum_{a''} |a''\rangle |\Psi_{a''}\rangle \langle a''|w'|a''\rangle \langle \Psi_{a''}| \langle a''| \\ \alpha\beta) & \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|\psi'\rangle^2 W_{a'' a''} \langle a''| \\ \beta\beta) & \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|w'|a''\rangle W_{a'' a''} \langle a''| \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} |a''\rangle |\Psi_{a''}\rangle \langle \Psi_{a''}| \langle a''| \\ |a''\rangle W_{a'' a''} \langle a''| \end{array} \right\} \quad (19)$$

und für das Objektsystem allein:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha) & \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|\psi'\rangle^2 \langle a''| \\ \beta) & \sum_{a''} |a''\rangle \langle a''|w'|a''\rangle \langle a''| \end{array} \right\} \rightarrow |a''\rangle \langle a''|. \quad (20)$$

Die rechte Seite hiervon geht auch aus der von (19) durch Verkürzung nach der Regel (16) hervor:

$$\left. \begin{array}{ll} \alpha) & |a''\rangle |\Psi_{a''}\rangle \langle \Psi_{a''}| \langle a''| \\ \beta) & |a''\rangle W_{a'' a''} \langle a''| \end{array} \right\} \rightarrow |a''\rangle \langle a''|; \quad (21)$$

bzw. im reinen Fall:

$$|a''\rangle |\Psi_{a''}\rangle \rightarrow |a''\rangle. \quad (21\alpha)'$$

Dieser Übergang beschreibt die Abstraktion vom Meßinstrument im reduzierten Zustand.

Es werden demnach alle Summanden bis auf einen weggelassen; der übrigbleibende wird durch seine Wahrscheinlichkeit (3) dividiert und damit auf die Gesamtwahrscheinlichkeit 1 normiert. Faßt man (5), (6) und (20) zusammen, so entsteht das Schema (4) für den gesamten Meßvorgang. Der Endzustand $\psi'' = \varphi_{a''}$ hat bei einer Maximalmessung stets verschwindende Entropie, unabhängig davon, ob vorher ein reiner Fall oder ein Gemisch vorlag.

B. DIE WIDERLEGUNG DER AUSWAHL-THESE

Nun können wir die Behauptung, daß die Messung im wesentlichen nur eine Auswahl aus einem Gemenge ist, genau formulieren. Sie besagt, daß der Endzustand des Gesamtsystems ein Gemenge⁵⁵

$$G'' = \{ \dots |X_{a''}^{(v)}\rangle \dots \}$$

ist mit

$$\sum_v |X_{a''}^{(v)}|^2 = w'_{a''} = \langle a'' | w' | a'' \rangle.$$

Da die gemischten Glieder fehlen, ist der Schnitt nicht nötig; es braucht lediglich abgelesen zu werden, welche Möglichkeit $X_{a''}^{(v)}$ realisiert ist. [Dabei ist noch wichtig, daß die Vektoren $X_{a''}^{(v)}$ einzeln separierbar sind und verschiedene Zeigerstellungen eine verschwindende Übereinstimmungswahrscheinlichkeit haben: $|X_{a''}^{(v)}\rangle \langle X_{a''}^{(v)}| = |X_{a''}^{(v)}\rangle \langle a''|$ und $\langle X_{a''}^{(v)} | X_{a''}^{(v)} \rangle = 0$ für $a'' \neq a'$. Wir werden aber von diesen Bedingungen keinen Gebrauch machen.]

Diese Behauptung über die mathematische Gestalt des Endzustandes läßt sich folgendermaßen widerlegen. Das Gemenge G'' gehört zu dem Gemisch

$$W'' = \sum_{a''} \sum_v |X_{a''}^{(v)}\rangle \langle X_{a''}^{(v)}| \equiv \sum_{a''} \langle a'' | w' | a'' \rangle \sum_v |E_{a''}^{(v)}\rangle \langle E_{a''}^{(v)}|, \quad (22)$$

wobei zweckmäßigkeitshalber die „Einheitsgemische“

$$|E_{a''}^{(v)}\rangle \equiv |X_{a''}^{(v)}\rangle w_{a''}^{-1/2}$$

eingeführt worden sind. Der dazugehörige Anfangszustand ist nach Voraussetzung

$$W' = \sum_{a'} \sum_{a''} |a'\rangle \langle a' | w' | a'' \rangle W' \langle a''|$$

mit

$$W' = \sum_{\mu} |\Psi^{(\mu)}\rangle \langle \Psi^{(\mu)}|,$$

vgl. (10ββ) und S. 25. Die unitäre Transformation

$$U = \exp [i H_1 (t_2 - t_1) / \hbar],$$

die W' in W'' überführt, kann – wenn es sie überhaupt gibt – nicht davon abhängen, durch welche Gemenge man die Gemische interpretiert. Mit der Abkürzung

$$U |a' \Psi^{(\mu)}\rangle \equiv |\Omega_{a'}^{(\mu)}\rangle$$

wird

$$U W' U^* = \sum_{a'} \sum_{a''} \langle a' | w' | a'' \rangle \sum_{\mu} |\Omega_{a''}^{(\mu)}\rangle \langle \Omega_{a''}^{(\mu)}|. \quad (23)$$

⁵⁵ Man hat hier also zwei Gemenge-Indizes (a'' und v), durch die die Elemente des Gemenges charakterisiert werden.

Man sieht nun leicht, daß ein U mit $UW'U^* = W''$ nicht existieren kann. Es müßte nämlich insbesondere die Gleichungen

$$\sum_{\mu} |\Omega_{a''}^{(\mu)}\rangle\langle\Omega_{a''}^{(\mu)}| = \sum_{\nu} |E_{a''}^{(\nu)}\rangle\langle E_{a''}^{(\nu)}|$$

erfüllen, die man erhält, wenn man für w' speziell $|a''\rangle\langle a''|$ setzt. Wegen der Linearität der unitären Operatoren kann folglich $UW'U^*$ nur dann mit W'' übereinstimmen, wenn w' bereits vor der Messung in der a -Darstellung diagonal war; denn der Operator (23) unterscheidet sich von (22) um die nichtdiagonalen Matrixelemente.

Das können wir auch folgendermaßen ausdrücken: Auf Grund der Interferenzterme $|a'\rangle\langle w'_{a'a''}|W'\langle a''|$ (mit $a' \neq a''$) muß vor der Messung von einer Koexistenz verschiedener Meßwerte a' gesprochen werden. Diese Koexistenz kann nicht allein – d. h. nur durch die Relativbewegung – gänzlich verschwinden. Dies wird besonders deutlich, wenn man sich diejenige Relativbewegung vorstellt, die den Meßprozeß in umgekehrter Zeitrichtung durchläuft; die Bewegungsgleichungen sind ja reversibel. Der logische Akt des Schnittes ist somit nicht zu vermeiden.

C. DIE UNVOLLSTÄNDIGE MESSUNG

Die bisherigen Betrachtungen lassen sich leicht auf den Fall verallgemeinern, daß mehrere Eigenwerte der zu messenden Observablen a zusammenfallen, daß also das Spektrum von a „entartet“ ist. Die Eigenfunktionen von a sind dann außer durch den Eigenwert a' noch jeweils durch einen weiteren Parameter $\alpha' = 1, \dots, g_{a'}$ zu charakterisieren. Der Entartungsgrad (bzw. das statistische Gewicht) $g_{a'}$ braucht keineswegs endlich zu sein. Ist z. B. a eine Eigenschaft, so hat a' überhaupt nur die beiden Eigenwerte „ja“ und „nein“ (etwa 1 und 0), und der Parameter α' durchläuft wenigstens für einen der Eigenwerte unendlich viele Werte. Die Messung einer Eigenschaft ist der extreme Prototyp einer unvollständigen Messung. Die bisherigen $\varphi_{a'}$ sind somit durch Funktionen $\varphi_{a'\alpha'}$ zu ersetzen, und an die Stelle von (1) und (2) tritt

$$\langle a'\alpha' | a''\alpha'' \rangle = \delta_{a'a''} \delta_{\alpha'\alpha''} \quad (24)$$

sowie

$$a |a'\alpha'\rangle = |a'\alpha'\rangle a'. \quad (25)$$

In ähnlicher Weise lassen sich auch die übrigen Aussagen verallgemeinern. (Den Spezialfall der Maximalmessung bekommt man zurück, wenn alle $g_{a'} = 1$ sind.) Wir verzichten darauf, die Formeln noch einmal hinzuschreiben.

Nur einen Punkt müssen wir etwas genauer betrachten, da dort folgende Mehrdeutigkeit auftritt: Durch die Aufnahme gehen (im reinen Fall) die Basisvektoren $\Phi'_{a'\alpha'} = \varphi'_{a'\alpha'} \Psi'$ des Gesamtsystems in Zustände $\Phi''_{a'\alpha'} = \varphi'_{a'\alpha'} \Psi''_{a'\alpha'}$ über (vgl. S. 30), wobei wieder angenommen werden soll, daß die $\Psi''_{a'\alpha'}$ für verschiedene a' zueinander orthogonal sind:

$$\langle \Psi''_{a'\alpha'} | \Psi''_{a''\alpha''} \rangle = 0 \quad \text{für } a' \neq a''. \quad (26)$$

Wäre diese „Aufteilungsbedingung“ nicht erfüllt, so könnte man von dem Apparat keine sauberen α -Messungen erwarten. (Entsprechendes gilt für einen Meßapparat im Gemisch.) Die sicher streng erfüllte Normierung besagt, daß

$$|\Psi''_{a'\alpha'}|^2 = 1 \quad (27)$$

ist. Es erhebt sich nun die Frage, wie sich zwei Zustände $\Psi''_{a'\alpha'}$ mit gleichem a' aber verschiedenen α' zueinander verhalten.

Sicher sind hier viele verschiedene Möglichkeiten denkbar, doch sind die zwei extremen Fälle besonders interessant (obwohl oder weil sie die äußersten Idealisierungen und Vereinfachungen eines wirklichen Meßapparates darstellen). Im ersten Falle nehmen wir an, daß die Apparat Zustände mit gleichen a' , aber verschiedenen α' aufeinander orthogonal sind,

$$\text{I.} \quad \langle \Psi''_{a'\alpha'} | \Psi''_{a'\alpha''} \rangle = 0 \quad \text{für } \alpha' \neq \alpha''; \quad (28 \text{ I})$$

im zweiten Falle dagegen, daß sie einander gleich sind:

$$\text{II.} \quad |\Psi''_{a'\alpha'}\rangle = |\Psi''_{a'\alpha''}\rangle. \quad (28 \text{ II})$$

Wir sprechen im ersten Falle von einem (nach α) separierenden, im zweiten Falle von einem konservativen Meßapparat. Zusammenfassend erhalten wir in den zwei Fällen die Formeln

$$\begin{array}{l} \text{I.} \\ \text{II.} \end{array} \quad \langle \Psi''_{a'\alpha'} | \Psi''_{a'\alpha''} \rangle = \left\{ \begin{array}{l} \delta_{a'a''} \delta_{\alpha'\alpha''} \\ \delta_{a'a''} \end{array} \right\} \quad (29)$$

Der Unterschied zwischen I und II besteht darin, daß ein separierender Apparat die Kohärenz des Objektzustandes im Unterraum a' zerstört, während ein konservativer Apparat sie bestehen läßt. Ein (nach α) separierender Apparat führt die Aufteilung des Objektzustandes vollständig durch, als hätte er die Absicht, eine Maximalmessung (a, α) durchzuführen. Ein konservativer Apparat dagegen begnügt sich mit einer Trennung der Meßwerte a' voneinander und verzichtet auf eine unnötige feinere Unterteilung. (Man sieht nun auch, worin die Zwischenstufen I und II bestehen, nämlich in einer partiellen Unterteilung der Unterräume a'). Die Wirkung eines konservativen Meßapparates ist durch die Observable a eindeutig bestimmt, die Wirkung eines separierenden Apparates dagegen hängt von der Basis $\varphi_{a'\alpha'}$ ab. Eine separierende Messung ist durch die Observable a noch nicht eindeutig bestimmt⁵⁶, sondern es kommt noch darauf an, gemäß welcher Zerlegung α die „überflüssige“ Aufteilung geschieht.

Beispiele für die beiden Meßapparat-Typen sind leicht zu finden. I. Beim Zählrohr ist die Observable a die Eigenschaft, daß sich das Objektteilchen in einem bestimmten Raumbereich befindet. Es findet also eine recht grobe Ortsmessung statt. Trotzdem wird die Kohärenz des Wellenpaketes im Inneren des Zählrohres sehr weitgehend zerstört; denn im Prinzip wird die Teilchenbahn wie in einer Wilsonkammer sehr genau lokalisiert, nur verzichtet man – im Unterschied zur Wilsonkammer – auf eine so genaue photographische Registrierung. (Im Gegenteil: Die entstehende feine Ionisationsspur wird durch das elektrische Feld verwischt, und es wird nur ihre Existenz registriert.) Das Messen mit dem

⁵⁶ J. v. NEUMANN², S. 184 f.

Zählrohr kommt also dem Grenzfall einer (nach r) vollständig separierenden Messung sehr nahe. II. Bei der auf S. 27 diskutierten Ortsmessung mit zwei Klötzchen (vgl. Fig. 2) handelt es sich gleichfalls um eine unvollständige Ortsmessung. In der Näherung, in der man die Klötzchen als starr betrachten kann (d. h. solange ihre inneren Freiheitsgrade nicht angeregt werden können), wird durch das Umfallen eines Klötzchens die Kohärenz der Welle innerhalb des Teilstrahls nicht zerstört (wohl aber die Interferenzfähigkeit der beiden Teilstrahlen gegeneinander). Wir haben es somit in dieser Näherung mit einer konservativen Messung zu tun.

Damit sind wir in der Lage, die Aufteilung in den beiden Grenzfällen einer unvollständigen Messung zu formulieren:

$$\text{I.} \left\{ \begin{array}{l} \alpha) \sum_{a'} \sum_{\alpha'} \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a' \alpha'\rangle \langle a' \alpha' | \psi' \rangle \langle \psi' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \rightarrow \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | \psi' \rangle^2 \langle a'' \alpha'' | \\ \beta) \sum_{a'} \sum_{\alpha'} \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a' \alpha'\rangle \langle a' \alpha' | w' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \rightarrow \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | w' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \end{array} \right\} \quad (30 \text{ I})$$

und

$$\text{II.} \left\{ \begin{array}{l} \alpha) \sum_{a'} \sum_{\alpha'} \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a' \alpha'\rangle \langle a' \alpha' | \psi' \rangle \langle \psi' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \rightarrow \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | \psi' \rangle \langle \psi' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \\ \beta) \sum_{a'} \sum_{\alpha'} \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a' \alpha'\rangle \langle a' \alpha' | w' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \rightarrow \sum_{a''} \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | w' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \end{array} \right\} \quad (30 \text{ II})$$

Die Ablesung besteht darin, daß alle a' -Summanden bis auf einen weggelassen werden. Für die gesamte Zustandsreduktion erhalten wir damit

$$\left. \begin{array}{l} \text{I.} \left\{ \begin{array}{l} |\psi'\rangle \langle \psi'| \rightarrow \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | \psi'\rangle^2 \langle a'' \alpha'' | \\ w' \rightarrow \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | w' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \end{array} \right\} \\ \text{II.} \left\{ \begin{array}{l} |\psi'\rangle \langle \psi'| \rightarrow \sum_{\alpha'} \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | \psi'\rangle \langle \psi' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \\ w' \rightarrow \sum_{\alpha'} \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha'' | w' | a'' \alpha'' \rangle \langle a'' \alpha'' | \end{array} \right\} \end{array} \right\} \quad (31)$$

Im Gegensatz zu (5) haben wir diesmal die Renormierung auf die Spur 1 unterlassen. Die Spur der Ausdrücke auf der rechten Seite ist gleich der Wahrscheinlichkeit $w_{a''}$ für das Auftreten des Meßwertes a'' . Sie hat in beiden Fällen den Betrag

$$\left. \begin{array}{l} \alpha) \\ \beta) \end{array} \right\} w_{a''} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{\alpha''} |\langle a'' \alpha'' | \psi' \rangle|^2 \\ \sum_{\alpha''} \langle a'' \alpha'' | w' | a'' \alpha'' \rangle \end{array} \right\} \quad (32)$$

Um die Spur 1 zu bekommen, hat man durch $w_{a''}$ zu dividieren. – Eine konservative Messung macht aus einem reinen Fall wieder einen reinen Fall. Mit Verwendung des auf den Eigenraum $a = a''$ orthogonal projizierenden Operators

$$e_{a''} = \sum_{\alpha''} |a'' \alpha''\rangle \langle a'' \alpha''| = e_{a''}^2 = e_{a''}^* (= \sum_{\alpha''} e_{a'' \alpha''})$$

können die Formeln folgendermaßen vereinfacht werden:

$$\text{II. } \left\{ \begin{array}{l} \alpha) \quad |\psi'\rangle \rightarrow e_{a''} |\psi'\rangle \\ \beta) \quad w' \rightarrow e_{a''} w' e_{a''} \end{array} \right\} \quad (33)$$

bzw.

$$\text{II. } \left\{ \begin{array}{l} \alpha) \quad |\psi''\rangle = e_{a''} |\psi'\rangle w_{a''}^{-1/2} \\ \beta) \quad w'' = e_{a''} w' e_{a''} w_{a''}^{-1}. \end{array} \right\} \quad (34)$$

Die Zustandsreduktion ist in diesem Falle also einfach die Orthogonalprojektion auf den Unterraum $a = a''$. Für die separierende Messung gibt es keine entsprechende Vereinfachung, was damit zusammenhängt, daß die Zustandsreduktion durch den Meßwert a'' nicht eindeutig gegeben ist, sondern noch von der Basiswahl α abhängt. – In seiner Diskussion der unvollständigen Messungen wird bei v. NEUMANN⁵⁶ ein separierender Apparat zugrunde gelegt, bei LUDWIG³⁵ und LÜDERS³⁴ dagegen ein konservativer, wodurch sich der scheinbare Widerspruch zwischen den Autoren aufklärt.

Bei einer Maximalmessung hängt der reduzierte Zustand $w'' = |a''\rangle \langle a''|$ nur vom Meßwert a'' ab, nicht dagegen vom Anfangszustand w' , und er ist stets ein reiner Fall. Bei der unvollständigen Messung dagegen ist w' i. allg. nur ein Gemisch, das zudem außer von a'' auch noch von w' abhängt. Damit erhebt sich die Frage, welches Gemisch vor der ersten Messung zu verwenden ist. In Übereinstimmung mit allen anderen Autoren⁵⁷ postulieren wir, daß der Zustand völliger Unkenntnis durch die Wahrscheinlichkeitsmatrix

$$w_0 = 1 \quad (35)$$

zu beschreiben ist. Sie ist leider nicht normierbar, hat aber die maximale (wenn auch unendliche) Entropie und ist mit jedem Hamiltonoperator vertauschbar. (Anderenfalls wäre das Postulat mit den Bewegungsgleichungen nicht verträglich.) Man nennt (35) oft auch das „Prinzip von der gleichen apriori-Wahrscheinlichkeit aller Hilbertvektoren“. Es wird manchmal auch folgendermaßen formuliert: Bei Zugrundelegung eines beliebigen vollständigen Orthonormalsystems sind alle Basisvektoren a priori gleich wahrscheinlich und ihre (relativen) Phasen gleichmäßig verteilt⁵⁸. Ohne die zweite Forderung könnte die erste nicht für alle Orthonormalsysteme zugleich aufrechterhalten werden; sie wäre nicht unitär invariant.

Herrn Prof. C. F. v. Weizsäcker danke ich für viele klärende Diskussionen und den Herren Prof. W. Heisenberg und Prof. F. Bopp für ihr Interesse an dieser Arbeit.

⁵⁷ Zum Beispiel J. v. NEUMANN², S. 182 ff.

⁵⁸ Man spricht meist leider von einer „statistischen Verteilung“ der Phasen, obwohl es doch auch ungleichmäßige statistische Verteilungen gibt, z. B. die Gauß-Verteilungen.