BAYERISCHE AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
MATHEMATISCH-NATURWISSENSCHAFTLICHE KLASSE

SITZUNGSBERICHTE

JAHRGANG

1982

MÜNCHEN 1983

VERLAG DER BAYERISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
In Kommission bei der C. H. Beck'schen Verlagsbuchhandlung München

Zur Theorie des Satzes von Stokes

Von Georg Nöbeling

Diese Mitteilung ist veranlaßt durch eine unveröffentlichte Notiz von G. Aumann. Darin werden für eine dehnungsbeschränkte reelle Funktion f, die definiert ist auf einem eindeutigen, umkehrbar dehnungsbeschränkten Bild F im $\boldsymbol{R}^m$ eines n-dimensionalen Würfels $(1 < n < m)$ Ableitungen $\partial f / \partial x_\mu$ $(\mu = 1, \ldots, m)$ fast überall auf F eingeführt (sie stimmen mit den üblichen partiellen Ableitungen überein, soweit diese existieren); für die somit definierten Funktionaldeterminanten solcher Funktionen f wird der Satz von Stokes bewiesen.

Wir reproduzieren und führen diese Überlegungen weiter unter gleichzeitiger Verallgemeinerung auf dehnungsbeschränkte, alternierende Differentialformen.

Es liege der euklidische Punktraum E^m $(m \geqq 2)$ mit der euklidischen Norm $|\cdot|$ und orthonormierten Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ vor. Wir betrachten den E^m zugleich als Vektorraum $\mathfrak{V}^m$ über $\boldsymbol{R}$:

$$(x_1, \ldots, x_m) + (y_1, \ldots, y_m) = (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m),$$
$$t(x_1, \ldots, x_m) = (tx_1, \ldots, tx_m).$$

Punkte im E^m bezeichnen wir i. a. mit dem Buchstaben q, Vektoren im $\mathfrak{V}^m$ mit $\mathfrak{v}$.

§ 1.[1] Im E^m sei eine nicht leere Punktmenge M gegeben. Wir bezeichnen für jeden Punkt $q \in M$ mit $\mathfrak{T}_q M$ den kleinsten Vektor-Unterraum von $\mathfrak{V}^m$, welcher alle Tangentenvektoren in q an M enthält, und mit $\mathfrak{T}_q^\perp M$ den zu $\mathfrak{T}_q M$ (orthogonalen) komplementären Unterraum von $\mathfrak{V}^m$ (sodaß also $\mathfrak{V}^m = \mathfrak{T}_q M \times \times \mathfrak{T}_q^\perp M$ ist). Ist q ein isolierter Punkt von M, so ist $\mathfrak{T}_q M = O$ und $\mathfrak{T}_q^\perp M = \mathfrak{V}^m$.

[1] Zu § 1 vgl. G. Nöbeling, „Integralsätze der Analysis"; Berlin-New York: de Gruyter 1978; § 11 u. 12.

1.1. Es liege nun vor eine Funktion $f: M \to \boldsymbol{R}$ und ein Punkt $q \in M$. Die Funktion f sei differenzierbar in q, d. h. es existiere (mindestens) eine lineare Funktion $\lambda: \mathfrak{V}^m \to \boldsymbol{R}$ mit der Eigenschaft

$$(1) \qquad f(q') - f(q) = \lambda(q' - q) + o(|q' - q|) \qquad (q' \in M).$$

Genau ein λ hat neben (1) auch die Eigenschaft

$$(2) \qquad \lambda(q^{\perp} - q) = 0 \text{ für } q^{\perp} - q \in \mathfrak{T}_q^{\perp} M.$$

Diese Funktion λ betrachten wir im folgenden.

Für jeden Vektor $\mathfrak{v} \in \mathfrak{V}^m$ definieren wir

$$(3) \qquad \frac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}}(q) := \lambda(\mathfrak{v}).$$

Die Funktion λ hat, mit $q' = (x_1', \ldots, x_m')$ und $q = (x_1, \ldots, x_m)$, eine eindeutige Darstellung

$$(4) \qquad \lambda(q' - q) = \sum_{\mu=1}^{m} a_\mu(q)(x_\mu' - x_\mu).$$

Aus (3) folgt dann

$$(5) \qquad \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(q) = a_\mu(q) \qquad (\mu = 1, \ldots, m).$$

Durch diese Gleichungen (5) werden in der eingangs erwähnten Notiz die Ableitungen $\partial f / \partial x_\mu$ von f definiert (allerdings ohne eine die Eindeutigkeit sichernde Einschränkung wie (2)). Wir nennen daher die Ableitungen (3) und (5) die *Aumannschen Ableitungen* von f.

Für die Aumannschen Ableitungen gelten dieselben Rechenregeln bezüglich der rationalen Kombinationen von Funktionen f wie für die üblichen partiellen Ableitungen.

Ebenso gilt für sie die Kettenregel. Es sei nämlich $\dot{M}$ eine Punktmenge in einem $E^{\dot{m}}$ und $g: \dot{M} \to M$ eine eindeutige Abbildung, differenzierbar in $p \in \dot{M}$ mit $g(p) = q$ (d. h. jede Komponente g_μ von g differenzierbar in p). Für jeden Vektor $\dot{\mathfrak{v}} \in \mathfrak{V}^{\dot{m}}$ gilt dann:

$$\frac{\partial (f \circ g)}{\partial \dot{\mathfrak{v}}}(p) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(q) \cdot \frac{\partial g_\mu}{\partial \dot{\mathfrak{v}}}(p).$$

1.2. Eine *r-Form* (alternierende Differentialform r-ten Grades; $r \geqq 0$) auf M ist eine reelle Funktion ω von $r+1$ Variablen $q \in M$; $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r \in \mathfrak{T}_q M$ mit der Eigenschaft, daß für jeden Punkt $q \in M$ die Funktion $(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r) \mapsto \omega(q; \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r)$ eine alternierende, r-fache Linearform auf $\mathfrak{T}_q M$ ist. (Für $r = 0$ ist ω eine Funktion $f: M \to \boldsymbol{R}$.) Als *komplette r-Form* auf M bezeichnen wir jede reelle Funktion $\tilde{\omega}$ von $r+1$ Variablen $q \in M$; $\tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r \in \mathfrak{V}^m$ derart, daß für jeden Punkt $q \in M$ die Funktion $(\tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r) \mapsto \tilde{\omega}(q; \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r)$ eine alternierende, r-fache Linearform auf $\mathfrak{V}^m$ ist.

Zu jeder r-Form ω auf M definieren wir folgendermaßen eine komplette r-Form $\tilde{\omega}$ auf M, die *Komplettierung* von ω: für je r Vektoren $\tilde{\mathfrak{v}}_\varrho = \mathfrak{v}_\varrho + \mathfrak{v}_\varrho^\perp$ aus $\mathfrak{V}^m$ ($\mathfrak{v}_\varrho \in \mathfrak{T}_q M$, $\mathfrak{v}_\varrho^\perp \in \mathfrak{T}_q^\perp M$; $\varrho = 1, \ldots, r$) sei

(6) $$\tilde{\omega}(q; \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r) := \omega(q; \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r).$$

Für $r = 0$ ist $\tilde{f} = f$. Die Komplettierung kommutiert mit der Linearkombination und der alternierenden Multiplikation von Formen.

Bezüglich der Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ des E^m hat für $r \geqq 1$ jede komplette r-Form $\tilde{\omega}$ die Normaldarstellung

(7) $$\tilde{\omega} = \sum_{1 \leqq \mu_1 < \ldots < \mu_r \leqq m} f_{\mu_1, \ldots, \mu_r} \, dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Die Koeffizienten $f_{\mu_1, \ldots, \mu_r}$ sind dabei reelle Funktionen auf M, die folgendermaßen definiert sind: es seien $\mathfrak{n}_1, \ldots, \mathfrak{n}_m$ die Einheitsvektoren der Koordinatenachsen (also $\tilde{\mathfrak{v}} = \sum x_\mu \mathfrak{n}_\mu$ für jeden Vektor $\tilde{\mathfrak{v}} \in \mathfrak{V}^m$); dann ist

(7a) $$f_{\mu_1, \ldots, \mu_r}(q) := \tilde{\omega}(q; \mathfrak{n}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mu_r}) \qquad (q \in M).$$

Für jedes $\mu = 1, \ldots, m$ ist die Linearform dx_μ auf $\mathfrak{V}^m$ definiert durch:

(7b) $$(dx_\mu)(\mathfrak{v}) := x_\mu.$$

1.3. Beispiel. Sei $\dim \mathfrak{T}_q M = \text{konst.} = n$ und $\mathfrak{T}_q M$ orientiert für jedes $q \in M$.

Die Volumenform ν auf M ist folgendermaßen definiert. Für $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n \in \mathfrak{T}_q M$ ist $\nu(q; \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n) := 0$, falls $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$

linear abhängig sind; andernfalls ist $\nu(q;\, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n) = \pm$ Volumen des von $\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n$ aufgespannten, n-dimensionalen Parallelotops P, wobei das Plus- bzw. Minuszeichen gilt, je nachdem das geordnete n-Tupel $(\mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ die Orientierung von $\mathfrak{T}_q M$ repräsentiert oder nicht (also $\nu(q;\, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_n)$ das „orientierte" Volumen von P).

Die Komplettierung von ν ist

$$\tilde{\nu} = \sum_{1 \leq \mu_1 < \ldots < \mu_n \leq m} c_{\mu_1, \ldots, \mu_n} \, dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_n},$$

wobei die $c_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(q)$ die Stellungscosinus von M in q, d. h. von $\mathfrak{T}_q M$ sind. Denn ist $\tilde{P}$ das n-dimensionale Parallelotop in $\mathfrak{V}^m$, das aufgespannt wird von den Basisvektoren $\mathfrak{n}_{\mu_1}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mu_n}$ und ist P die Orthogonalprojektion von $\tilde{P}$ in $\mathfrak{T}_q M$, so ist das orientierte Volumen von P gleich $c_{\mu_1, \ldots, \mu_n}(q)$.

Ist weiter ω eine beliebige n-Form auf M, so existiert eine Funktion $f\colon M \to \boldsymbol{R}$ derart, daß $\omega = f\nu$ ist. Für die Funktionen $f_{\mu_1, \ldots, \mu_n}$ in (7), mit $r = n$, gilt dann

$$f_{\mu_1, \ldots, \mu_n} = f\, c_{\mu_1, \ldots, \mu_n}. \tag{8}$$

Aus der letzteren Gleichung folgt umgekehrt

$$\sum f_{\mu_1, \ldots, \mu_n} c_{\mu_1, \ldots, \mu_n} = f. \tag{9}$$

1.4. Eine komplette r-Form $\tilde{\omega}$ auf M heiße *dehnungsbeschränkt* bzw. in einem Punkt $q \in M$ *differenzierbar*, wenn für jedes r-Tupel $\tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r$ von Vektoren $\in \mathfrak{V}^m$ die durch $q' \mapsto \tilde{\omega}(q';\, \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r)$ definierte Funktion $M \to \boldsymbol{R}$ dehnungsbeschränkt bzw. in q differenzierbar ist. Wenn dabei $\tilde{\omega}$ die Komplettierung einer r-Form ω auf M ist, so heiße auch ω dehnungsbeschränkt bzw. in q differenzierbar.

Eine komplette r-Form $\tilde{\omega}$ auf M ist dehnungsbeschränkt bzw. in q differenzierbar genau dann, wenn dies für die Funktionen $f_{\mu_1, \ldots, \mu_r}$ in (7) gilt.

Sei $\tilde{\omega}$ eine in einem zunächst festen Punkt $q \in M$ differenzierbare, komplette r-Form auf M. Dann existiert für je $r+1$ Vektoren

$$\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_\nu \in \mathfrak{V}^m$$

die Aumannsche Ableitung

$$\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \tilde{\omega}}(q;\, \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r) =: \partial \tilde{\omega}(q;\, \tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r)$$

Die $(r+1)$-fache Linearform $\partial\tilde{\omega}(q)$ auf $\mathfrak{V}^m$ liefert eine alternierende, $(r+1)$-fache Linearform $d\tilde{\omega}(q)$ auf $\mathfrak{V}^m$:

$$(10) \qquad d\tilde{\omega}(q;\, \tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{v}}_1, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_r) := \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn}\pi \cdot \partial\tilde{\omega}(q;\, \tilde{\mathfrak{v}}_{\pi_0}, \tilde{\mathfrak{v}}_{\pi_1}, \ldots, \tilde{\mathfrak{v}}_{\pi_r}),$$

wobei $\tilde{\mathfrak{v}} = \tilde{\mathfrak{v}}_0$ gesetzt ist und summiert wird über alle Permutationen π des $(r+1)$-Tupels $0, 1, \ldots, r$.

Ist dabei $\tilde{\omega}$ die Komplettierung einer r-Form ω auf M, so sei $d\omega(q)$ die Restriktion von $d\tilde{\omega}(q)$ auf $\mathfrak{T}_q M$, also für je $r+1$ Vektoren

$$\mathfrak{v}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r \in \mathfrak{T}_q M:$$

$$(11) \qquad d\omega(q;\, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r) := d\tilde{\omega}(q;\, \mathfrak{v}, \mathfrak{v}_1, \ldots, \mathfrak{v}_r).$$

$d\omega(q)$ ist eine alternierende, $(r+1)$-fache Linearform auf $\mathfrak{T}_q M$, das Differential von ω in q.

Ist schließlich ω in allen Punkten $q \in M$ differenzierbar, so heiße die $(r+1)$-Form $d\omega$ auf M das *Differential* von ω.

Für $r = 0$ ist $df(q;\, \mathfrak{v}) = \dfrac{\partial f}{\partial \mathfrak{v}}(q)$.

Bezüglich der Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ im E^m ergeben sich die folgenden Darstellungen:

$$(12) \qquad d\tilde{f} = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial x_\mu}\, dx_\mu$$

und für $r \geqq 1$ zufolge (7)

$$(13) \qquad d\tilde{\omega} = \sum_{1 \leqq \mu_1 < \cdots < \mu_r \leqq m} \; \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_{\mu_1, \ldots, \mu_r}}{\partial x_\mu}\, dx_\mu \wedge dx_{\mu_1} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Beweis. (12) folgt unmittelbar aus $\tilde{f} = f$ und (3)–(5). – Für (13) setzen wir gemäß (7) an:

$$d\tilde{\omega} = \sum_{1 \leqq \mu_0 < \cdots < \mu_r \leqq m} f_{\mu_0, \ldots, \mu_r}\, dx_{\mu_0} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Nach (7a) und (10) ist

$$f_{\mu_0, \ldots, \mu_r}(q) = (d\tilde{\omega})(q; \mathfrak{n}_{\mu_0}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mu_r})$$

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \mathfrak{n}_{\mu_{\pi_0}}}(q; \mathfrak{n}_{\mu_{\pi_1}}, \ldots, \mathfrak{n}_{\mu_{\pi_r}})$$

und dies ist nach (7a)

$$= \frac{1}{r!} \sum_{\pi} \operatorname{sgn} \pi \cdot \frac{\partial f_{\mu_{\pi_1}, \ldots, \mu_{\pi_r}}}{\partial x_{\mu_{\pi_0}}}(q).$$

Nach leichter Rechnung folgt nun (13).

Aus (13) folgt durch Umordnung die Normaldarstellung

$$\text{(13a)} \qquad \partial\omega = \sum_{1 \leq \mu_0 < \ldots < \mu_r \leq m} \; \sum_{\varrho = 0}^{r} (-1)^{\varrho} \frac{\partial f_{\mu_0, \ldots \hat{\mu}_\varrho \ldots, \mu_r}}{\partial x_{\mu_\varrho}} \, dx_{\mu_0} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_r}.$$

Es gelten die üblichen Rechenregeln für das Differential einer Linearkombination und das alternierende Produkt von Formen ω. Es ist jedoch für eine differenzierbare r-Form ω auf beliebigem M i. a. nicht $\tilde{d\omega} = d\tilde{\omega}$. Und existiert für ω das zweifache Differential $dd\omega$, so ist i. a. nicht $dd\omega = 0$. Vgl. dazu § 3, Bem. 3 und 4.

§ 2. Im E^m sei für ein ganzes n mit $1 < n < m$ eine n-Fläche $F = g(P)$ gegeben ($P = S_1 \cup \ldots \cup S_j$ eine (simpliziale) n-Pseudomannigfaltigkeit im E^m; g eine Injektion von P in den E^m derart, daß $g \mid S_i$ umkehrbar dehnungsbeschränkt ist für jedes $i = 1, \ldots, j$). Auf F ist dann ein Maß O_n definiert derart, daß für eine Menge $N \subset P$ dann und nur dann $O_n(g(N)) = 0$ ist, wenn das Lebesgue-Maß $\lambda^n(N) = 0$ ist.[2]

Wir treffen folgende Verabredung. Wir betrachten eine Aussage oder Definition A über Punkte $q \in F$ als gültig „auf F mod 0", wenn eine Menge $F_0 \subset F$ mit $O_n(F \setminus F_0) = 0$ derart existiert, daß A gilt für alle Punkte $q \in F_0$.

---

[2] Vgl. G. Aumann – O. Haupt, „Einführung in die reelle Analysis", Bd. III. Berlin – New York: de Gruyter 1982. Nr. 6.

2.1. Wir behaupten nun erstens: Jede dehnungsbeschränkte Funktion $f: F \to \mathbf{R}$ ist differenzierbar auf F mod o (im Sinne von 1.1).

Zum Beweis können wir o.B.d.A. annehmen, daß P ein n-Simplex im E^n mit orthonormierten Koordinaten $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ ist. Wir setzen $f \circ g =: h$. Die Funktion h und die Komponenten $g_1, \ldots, g_m$ von g sind dehnungsbeschränkt auf S und daher nach Rademacher in λ^n-fast jedem inneren Punkt von S differenzierbar mit λ^n-meßbaren partiellen Ableitungen und mit

$$\left[\sum_{1 \leqq \mu_1 < \ldots < \mu_n \leqq m} \left(\frac{\partial(g_{\mu_1}, \ldots, g_{\mu_n})}{\partial(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)}\right)^2\right]^{1/2} > 0.$$[2]

Es sei p ein solcher Punkt. Wir beweisen, daß f in $q := g(p)$ differenzierbar ist. Es sei E die Tangential-n-Ebene $\subset E^m$ an F im Punkt q. Dann existiert eine lineare Bijektion $\varphi: E^n \to E$ derart, daß $|g(p') - \varphi(p')| = o(|p' - p|)$, $p' \in S$ gilt. Weiter existiert eine lineare Abbildung $\psi: E^n \to \mathbf{R}$ derart, daß $|h(p') - \psi(p')| = o(|p' - p|)$, $p' \in S$ gilt. Wir erweitern nun die lineare Abbildung $\psi \circ \varphi^{-1}: E \to \mathbf{R}$ zu einer linearen Abbildung $\chi: E^m \to \mathbf{R}$. Nun sei $q' \in g(S)$ beliebig und $p' := g^{-1}(q') \in S$. Dann ist $f(q') - \chi(q') = h(p') - \chi(g(p')) = \psi(p') - \chi(g(p')) + o(|p' - p|)$; dies ist aber nach Definition von φ und wegen der Linearität von χ weiter $= \psi(p') - \chi(\varphi(p)) + o(|p' - p|) = o(|p' - p|)$, weil wegen $\varphi(p') \in E$ gilt $\chi(\varphi(p')) = \psi(p')$. Also gilt $f(q') - \chi(q') = o(|p' - p|)$ und folglich, weil g auf S umkehrbar dehnungsbeschränkt ist, auch $f(q') - \chi(q) = o(|q' - q|)$. Für $\lambda := \chi - f(q)$ gilt also (1).

Wir behaupten zweitens: Die (auf F mod o existierenden) Aumannschen Ableitungen $\partial f / \partial x_\mu$ sind O_n-integrierbar über F.

Nach der Kettenregel genügen die $a_\mu(q) = \frac{\partial f}{\partial x_\mu}(q)$ den n-Gleichungen

$$\sum_{\mu=1}^{m} a_\mu \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_\nu} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n). \tag{14}$$

Die Bedingung (2) besagt, daß für jeden Vektor $\mathfrak{v} = (v_1, \ldots, v_m)$, der in q zu E orthogonal ist, gilt $\sum a_\mu v_\mu = 0$. Der Vektor $(a_1, \ldots, a_m)$ ist also zu jedem solchen Vektor $\mathfrak{v}$ orthogonal, also ein Tangentenvektor in q an F. Folglich existieren $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{R}$ so, daß

$$a_\mu = \sum_{\varkappa=1}^{n} b_\varkappa \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_\varkappa} \qquad (\mu = 1, \ldots, m)$$

ist. Dies in (14) eingesetzt, ergibt

$$\sum_{\varkappa=1}^{n} b_\varkappa \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_\varkappa} \frac{\partial g_\mu}{\partial \sigma_\nu} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

Die Koeffizientendeterminante dieses Gleichungssystems ist gleich $(\det(\partial g_\mu / \partial \sigma_\nu))^2 \neq 0$. Da die $\partial h / \partial \sigma_\nu$ und die $\partial g_\mu / \partial \sigma_\nu$, als Funktionen auf F mod 0 betrachtet, O_n-meßbar sind, gilt dasselbe für die $b_\varkappa$ und damit auch für die a_μ. Daß die a_μ auch beschränkt sind, ergibt sich folgendermaßen. In jedem Punkt $q \in F$ mod 0 können wir durch eine orthogonale Transformation der Koordinaten $x_1, \ldots, x_m$ in neue Koordinaten $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m$ erreichen, daß der Vektor $(\partial \dot{g}^1 / \partial \sigma_1, \ldots, \partial \dot{g}_m / \partial \sigma_1)$ in die x_1-Achse fällt, der Vektor $(\partial \dot{g}_1 / \partial \sigma_2, \ldots, \partial \dot{g}_m / \partial \sigma_2)$ in die $x_1 x_2$-Ebene, usw. (Dabei $\dot{g}_\mu = \mu$-te Komponente von g bzgl. $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m$). Das Gleichungssystem (14) für die Koordinaten $\dot{x}_1, \ldots, \dot{x}_m$ sieht so aus:

$$\sum_{\mu=1}^{\nu} \dot{a}_\mu \frac{\partial \dot{g}_\mu}{\partial \sigma_\nu} = \frac{\partial h}{\partial \sigma_\nu} \qquad (\nu = 1, \ldots, n)$$

(also ν an Stelle von m). Die erste Gleichung liefert, weil h dehnungsbeschränkt und g umkehrbar dehnungsbeschränkt ist, daß $|\dot{a}_1|$ eine von q unabhängige obere Schranke hat. Sodann liefert die zweite Gleichung dasselbe für $|\dot{a}_2|$. Usw. Da die Koordinatentransformation orthogonal ist, ihre Koeffizienten also die von q unabhängige obere Schranke 1 haben, so folgt, daß auch die $|a_\mu|$ eine von q unabhängige obere Schranke haben.

2.2. Die n-Fläche F sei nun orientiert und ω eine n-Form auf F mod 0.
Ist f die auf F mod 0 definierte reelle Funktion mit $\omega = f v$ (vgl. 1.3), so definiert man

$$\int_F \omega := \int_F f \, dO_n,$$

falls das Integral rechter Hand existiert. Wir untersuchen, wann dies der Fall ist.

Die Normaldarstellung (7) von ω liege vor. Auf F mod 0 sind die Stellungscosinus $c_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ von F definiert. Nach 1.3 gilt dann (9) auf F mod 0. Nun sind die $c_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ darstellbar als algebraische Funktionen der partiellen Ableitungen $\partial g_\mu / \partial \sigma_\nu$ und die letzteren sind, als Funktionen auf F mod 0 betrachtet, O_n-meßbar und daher, weil beschränkt, O_n-integrierbar über F. Es kommt also auf das Verhalten der Funktionen $f_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ in (7) an.

(a) Ist ω dehnungsbeschränkt, so sind nach 1.4 auch die $f_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ dehnungsbeschränkt und folglich O_n-integrierbar über F.

(b) Sei ω^* eine dehnungsbeschränkte $(n-1)$-Form auf F. Die Normaldarstellung ihrer Komplettierung $\tilde{\omega}^*$ sei

$$\tilde{\omega}^* = \sum_{1 \leq \mu_2 < \ldots < \mu_n \leq m} f^*_{\mu_2,\ldots,\mu_n}\, dx_{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_n}.$$

Wegen ihrer Dehnungsbeschränktheit ist ω^* auf F mod 0 differenzierbar und daher $\omega := d\omega^*$ auf F mod 0 definiert. Für die Funktionen $f_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ von ω gilt nach (13a):

$$f_{\mu_1,\ldots,\mu_n} = \sum_{\varrho=1}^{n} (-1)^{\varrho-1} \frac{\partial f^*_{\mu_1 \ldots \hat{\mu}_\varrho \ldots \mu_n}}{\partial x_{\mu_\varrho}}.$$

Wegen der Dehnungsbeschränktheit der $f^*_{\mu_2,\ldots,\mu_n}$ sind ihre Aumannschen Ableitungen O_n-integrierbar über F nach 2.1. Folglich sind die $f_{\mu_1,\ldots,\mu_n}$ ebenfalls O_n-integrierbar über F.

2.3. Satz von Stokes. *Es sei F eine orientierte n-Fläche im E^m und ω eine dehnungsbeschränkte $(n-1)$-Form auf F. Dann ist*

$$\int_F d\omega = \int_{\partial F} \omega.$$

Beweis. Die Komplettierung $\tilde{\omega}$ von ω habe die Normaldarstellung

$$\tilde{\omega} = \sum_{1 \leq \mu_2 < \ldots < \mu_n \leq m} f_{\mu_2,\ldots,\mu_n}\, dx_{\mu_2} \wedge \ldots \wedge dx_{\mu_n}.$$

Nach 2.2, (a), angewandt auf ∂F statt F und $n-1$ statt n, existiert

$$(17) \qquad \int_{\partial F} \omega = \int_{\partial F} \sum_{1 \leqq \mu_2 < \ldots < \mu_n \leqq m} f_{\mu_2, \ldots, \mu_n} c_{\mu_2, \ldots, \mu_n} dO_{n-1}.$$

Nach 2.2, (b), angewandt auf ω statt ω^*, existiert

$$\int_F d\omega = \int_F \sum_{1 \leqq \mu_1 < \ldots < \mu_n \leqq m} \sum_{\varrho=1}^{n} (-1)^{\varrho-1} \frac{\partial f_{\mu_1, \ldots \hat{\mu}_\varrho \ldots \mu_n}}{\partial x_{\mu_\varrho}} c_{\mu_1, \ldots, \mu_n} dO_n.$$

Hieraus folgt durch Umordnung (vgl. (13a) und (13)):

$$(18) \qquad \int_F d\omega = \int_F \sum_{1 \leqq \mu_2 < \ldots < \mu_n \leqq m} \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f_{\mu_2, \ldots, \mu_n}}{\partial x_\mu} c_{\mu, \mu_2, \ldots, \mu_n} dO_n.$$

Die Gleichheit der beiden Integrale rechter Hand in (17) und (18) ergibt sich nun wie im Aumannschen Beweis l.c.[2], Nr. 8.5.

§ 3. Bemerkungen. 1. Sei $q \in M$ ein Häufungspunkt von M und die Funktion $f: M \to \boldsymbol{R}$ differenzierbar in q. Ist $\mathfrak{v}$ ein Tangenteneinheitsvektor in q an M, so existiert eine Folge $(q^r)_{r=1,2,\ldots}$ von Punkten $q^r \neq q$ in M mit $q = \lim q^r$ und $\mathfrak{v} = \lim |q^r - q|^{-1}(q^r - q)$. Aus (1) folgt dann $\partial f/\partial \mathfrak{v}\,(q) = \lambda\,(\mathfrak{v}) = \lim\ |q^r - q|^{-1}(f(q^r) - f(q))$. Für jeden Tangenteneinheitsvektor in q an M und daher für jeden Vektor $\mathfrak{v} \in \mathfrak{T}_q M$ als Linearkombination von Tangenteneinheitsvektoren in q an M ist somit $\partial f/\partial \mathfrak{v}(q)$ von der Nebenbedingung (2) unabhängig. Diese wirkt sich also aus auf die Aumannschen Ableitungen $\partial f/\partial \bar{\mathfrak{v}}\ (q)$ nur für die nicht in $\mathfrak{T}_q M$ liegenden Vektoren $\bar{\mathfrak{v}}$: speziell $\partial f/\partial \mathfrak{v}^\perp(q) = 0$ für $\mathfrak{v}^\perp \in \mathfrak{T}_q^\perp(M)$.

2. Die Aumannschen Ableitungen einer Funktion $f: M \to \boldsymbol{R}$ reagieren sehr empfindlich auf Änderungen der Struktur von M. Beispiel: In der x_1,x_2-Ebene sei M_1 bzw. M_2 die Menge aller Punkte $q = (x_1, x_2)$ mit $|x_2| \leqq |x_1|$ bzw. mit $|x_2| \leqq x_1^2$. Für $i = 1,2$ sei nun $f_i: M_i \to \boldsymbol{R}$ die Restriktion auf M_i der Funktion $(x_1, x_2) \mapsto x_2$. Dann ist f_i überall auf M_i differenzierbar. In jedem Punkt q von M_i, verschieden vom Koordinatenursprung O, ist

$\partial f_i / \partial x_1 = 0$ und $\partial f_i / \partial x_2 = 1$. In O ist ebenfalls $\partial f_1 / \partial x_1 = 0$ und $\partial f_1 / \partial x_2 = 1$, jedoch $\partial f_2 / \partial x_1 = 0$ und $\partial f_2 / \partial x_2 = 0$.

3. Durch $\omega(q; \mathfrak{v}) := \partial f / \partial \mathfrak{v}(q)$ mit $\mathfrak{v} \in \mathfrak{T}_q M$ für eine in q differenzierbare Funktion $f: M \to R$ ist eine 1-Form ω auf M definiert. Für ihre Komplettierung $\tilde{\omega}$ gilt zufolge (3) und (2): $\tilde{\omega}(q; \tilde{\mathfrak{v}}) = \partial f / \partial \tilde{\mathfrak{v}}(q)$ für alle $\tilde{\mathfrak{v}} \in \mathfrak{V}^m$. Der Begriff der Komplettierung ist also eine natürliche Verallgemeinerung der Definition (3). – Es gilt jedoch für eine differenzierbare r-Form ω i. a. nicht $\widetilde{d\omega} = d\tilde{\omega}$. Beispiel. In der x_1, x_2-Ebene sei M die Menge aller Punkte $q = (x_1, x_2)$ mit $|x_2| \leqq x_1^2$ und $\omega(q; \mathfrak{v}) := x_1 v_2$ für $q \in M$ und $\mathfrak{v} = (v_1, v_2) \in \mathfrak{T}_q M$. Wegen (13) ist $d\tilde{\omega} = dx_1 \wedge \wedge\, dx_2$ auf ganz M. Wegen (11) und (6) ist zwar ebenfalls $\widetilde{d\omega} = dx_1 \wedge dx_2$ für $O \neq q \in M$, hingegen $\widetilde{d\omega} = 0$ für $q = O$. Es ist also $\widetilde{d\omega} \neq d\tilde{\omega}$ für $q = O$.

4. Die Aumannschen Ableitungen höherer Ordnung werden nach folgendem Muster definiert. Eine Funktion $f: M \to \boldsymbol{R}$ heißt zweimal differenzierbar in $q \in M$, wenn erstens f in jedem Punkt einer Umgebung U in M von q differenzierbar ist und wenn zweitens für jeden Vektor $\mathfrak{v} \in \mathfrak{T}_q M$ die (auf U definierte) Funktion $\partial f / \partial \mathfrak{v}$ differenzierbar ist in q. Dann existiert q für je zwei Vektoren $\tilde{\mathfrak{v}}, \tilde{\mathfrak{w}} \in \mathfrak{V}^m$ die Ableitung $\partial^2 f / \partial \tilde{\mathfrak{w}}\, \partial \tilde{\mathfrak{v}} := \partial(\partial f / \partial \tilde{\mathfrak{v}}) / \partial \tilde{\mathfrak{w}}$. Sie ist aber schon bei einfachen Funktionen f nicht invariant gegenüber der Vertauschung von $\tilde{\mathfrak{v}}$ und $\tilde{\mathfrak{w}}$. Beispiel: Im E^2 sei M' die Menge aller Punkte $q = (x_1, x_2)$ mit $|x_1| \leqq 1/2$, $|x_2| \leqq 1/2$ und $|x_2| \leqq x_1^2$, M'' die Menge aller q mit $|x_1| \leqq 1/2$, $|x_2| \leqq 1/2$ und $|x_1| \leqq x_2^2$, schließlich $M := M' \cup M''$. Weiter sei $f: M \to R$ auf M' gleich der Funktion $q \mapsto x_1 x_2$ und auf M'' gleich $q \mapsto -x_1 x_2$. Diese Funktion f ist in jedem Punkt q von M zweimal differenzierbar. Für $\mathfrak{v} = (v_1, v_2)$ und $\mathfrak{w} = (w_1, w_2)$ ist $\partial^2 f / \partial \mathfrak{w}\, \partial \mathfrak{v}(q)$ gleich $v_1 w_2 + v_2 w_1$, wenn $O \neq q \in M'$, und gleich $-v_1 w_2 - v_2 w_1$, wenn $O \neq' q \in M''$ ist, hingegen gleich $-v_1 w_2 + v_2 w_1$ im Ursprung $q = O$. In O ist daher $\partial^2 f / \partial x_1 \partial x_2 = 1$ und $\partial^2 f / \partial x_2 \partial x_1 = -1$ (und somit $ddf = 2\, dx_1 \wedge dx_2$ in O).

5. Nun sei M speziell eine n-dimensionale C^2-Mannigfaltigkeit in E^m und ω eine differenzierbare r-Form auf M $(0 \leqq r \leqq m)$.

Dann gilt: Das in 1.4 eingeführte Differential $d\omega$ stimmt mit dem üblichen überein. Denn sei q ein Punkt von M und τ: $T \rightarrow M$ eine Karte einer Umgebung in M von q (also T eine offene Menge im $\boldsymbol{R}^n$ aller n-Tupel $(t_1, \ldots, t_n)$, τ eine C^2-Injektion, $\tau(T)$ eine Umgebung in M von q, $\tau^{-1}(q) =: p$). Seien ω^* und $(d\omega)^*$ die aus ω und $d\omega$ durch Zurückholen auf T mittels τ entstehenden r- bzw. $(r+1)$-Formen auf T. In p ist dann $(d\omega)^* = d(\omega^*)$.